A biostatisztika matematikai alapjai

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A biostatisztika matematikai alapjai

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Tartalom

1. A biostatisztika matematikai alapjai ... 1
1. 1. Bevezető gondolatok, ajánlások és követelmények ... 1
2. 2. A matematikai modellalkotás ... 1
2.1. 2.1. Bevezetés ... 1
2.2. 2.2. A matematikai modellalkotás lépései ... 3
2.3. 2.3. Feladatok - átgondolásra ... 4
2.4. 2.4. Összegzés és további források ... 7
3. 3. Jelölések, táblázatok, formulák, fogalomtárak és szótárak ... 7
4. 4. Halmazelmélet (H) ... 8
4.1. 4.1. Halmazelméleti alapfogalmak (H1) ... 9
4.2. 4.2. Műveletek halmazokkal (H2) ... 13
4.3. 4.3. Halmazok számossága (H3) ... 18
4.4. 4.4. Néhány halmazelmélethez kapcsolódó további fogalom és eljárás (H4) ... 19
5. 5. Kombinatorika (K) ... 19
5.1. 5.1. Kombinatorikai összefoglaló (K1-4) ... 20
6. 6. Eseményalgebra (E) ... 26
6.1. 6.1. Eseményalgebrai összefoglaló (E1, E2) ... 26
7. 7. Mátrixok és determinánsok (M) ... 33
7.1. 7.1. Mátrix alapfogalmak (M1) ... 33
7.2. 7.2. Speciális mátrixok (M2) ... 37
7.3. 7.3. Műveletek mátrixokkal (M3) ... 39
7.4. 7.4. További speciális mátrix-fogalmak és -tulajdonságok (M4) ... 44
8. 8. Számsorozatok és számsorok (S) ... 46
8.1. 8.1. Számsorozatok fogalma (S1) ... 46
8.2. 8.2. Számsorozatok tulajdonságai (S2) ... 48
8.3. 8.3, Számsorok fogalma és tulajdonságai (S3) ... 51
8.4. 8.4. Alkalmazás - Kamatszámítás (SK) ... 52
9. 9. Függvények (F) ... 55
9.1. 9.1. A függvény fogalma (F1) ... 55
9.2. 9.2. Függvények jellemző talajdonságai (F2) ... 59
9.3. 9.3. Elemi függvények (F3) ... 65
9.4. 9.4. Függvények határértéke és folytonossága (F4) ... 80
10. 10. Differenciálszámítás (D) ... 82
10.1. 10.1. A differenciálszámítás alapfogalmai (D1 - D5) ... 83
10.2. 10.2. Függvényvizsgálat (D6) ... 87
10.3. 10.3. Kiegészítő fejezetek (D7) ... 87
11. 11. Integrálszámítás (I) ... 90
11.1. 11.1. A határozatlan integrál (I1 - I2) ... 90
11.2. 11.2. A határozott integrál (I3) ... 93
11.3. 11.3. Az impropius integrál (I4) ... 93
11.4. 11.4. A határozott integrál alkalmazása (I5) ... 94
12. 12. Valószínűségszámítás (V) ... 95
12.1. 12.1. A valószínűség fogalma (V1) ... 95
12.2. 12.2. Valószínűségi változók (V2) ... 102
13. 13. A modellalkotásról ismét ... 110
14. 14. Modulzárás ... 120

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az ábrák listája

1.1. 1. ábra - A modellalkotás lépései 3
1.2. H2.1. 1. ábra - Venn-diagram 13
1.3. H2.1. 2.ábra - Venn-diagram 13
1.4. H2.2. ábra - Halmazok uniója. 14
1.5. H2.3. ábra - Halmazok metszete. 14
1.6. H2.4. ábra - Halmazok különbsége. 15
1.7. H2.5. ábra - Komplementer halmaz. 16
1.8. H2.6. ábra - Szimmetrikus differencia. 17
1.9. 1. ábra - A modellalkotás lépései 110

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A táblázatok listája

1.1. Iskolába (alap-, közép-, felsőfok) beiratkozott lányok/nők aránya, India 5
1.2. Takarmánykeverési feladat adatai 5
1.3. Takarmánykeverési feladat adatai 114

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

1. fejezet - A biostatisztika matematikai alapjai

1. 1. Bevezető gondolatok, ajánlások és követelmények

A modul célja a középfokú matematikai ismeretek összefoglalása és továbbfejlesztése. A közvetlen cél annak biztosítása, hogy a biostatisztikai és epidemiológiai tanulmányok biztos matematikai alapokra támaszkodhassanak.

Az anyag eredetileg egy eLearning keretrendszerben (Moodle) készült. A források egy részét változatlan formában és szerkezetben integráltuk ebbe a leírásba; viszont sok utalás és hivatkozás megmaradt az eredeti anyagból - ilyen például az, hogy az olvasó/tanuló legtöbb esetben önellenőrző teszt kitöltésével zárhatná le a fejezetet és léphetne a következő részre. Ezen elemek változatlan formában való közlése utalás az elektronikus tananyagra, valamint annak jelzése, hogy az eLearning keretrendszerekben sokkal tágabb lehetőségek állnak az oktatók és a tanulók rendelkezésére, mind a tananyag részletezésére, mind az elsajátítás ellenőrzésére.

A bevezető fejezetekben hivatkozások találhatók más, a világhálón elérhető forrásokra. Az állandó változások miatt főleg a Kempelen Farkas Digitális Tankönyvtár, valamint a Magyar Elektronikus Könyvtár írásaira kell hivatkozunk, de bőven találunk hasznos forrásokat más oldalakon is.

Másik sajátossága a munkának a matematikai modellalkotás szerepének erősítése. Ebben az irányban csak óvatos lépéseket tettünk, várva a szakmai közösség reakcióját a leírtakra. Véleményünk szerint a gyakran emlegetett és elvárt gyakorlati életben felhasználható matematikai tudás elérését lehene ebbe az irányba haladva erősíteni. Igazolhatja ezeket a gondolatokat a matematika oktatásában bekövetkező változások, amelyeket nyomon követhetünk a világ számos országában (például a világhálón).

A következő rész betekintést nyújt a matematikai modellakotás alapjaiba. Ezután a matematika biostatisztikai szempontból leglényegesebb fejezetei kerülnek összefoglalásra. A tananyag-modul végén ismét visszatérünk a matematikai modellalkotáshoz.

2. 2. A matematikai modellalkotás

A matematikai modellezés fogalmát ebben a jegyzetben nem célunk szabatosan, definíció szintjén vizsgálni. Erre a tudományos kutatásnak, a szűkebb szakmának kell vállalkoznia, - amely egészen filozófiai mélységekig boncolhatja, elemezheti a fizikai, kémiai, biológiai, stb. témakörű matematikai modellek közös és eltérő vonásait. Szándékunk a modellezés gyakorlati megközelítése. A matematikai modellek mélyebb, szakmaibb megismeréséhez a fejezet végén található irodalomjegyzék nyújthat kiindulópontot.

2.1. 2.1. Bevezetés

Matematikai feladatokat megoldani sok esetben nem könnyű feladat. Sokan foglalkoztak azzal, hogy milyen módon célszerű egy problémát megközelíteni, hogyan kell egy feladat megoldásának lépéseit kidolgozni. Pólya György (George Pólya, 1887-1987, magyar származású matematikus, akit a heurisztikus problémamegoldás atyjának tekintenek; ezirányú (magyarul is megjelent) főbb művei: A gondolkodás iskolája (How to solve it, 1945); A problémamegoldás iskolája.) ajánlása szerint egy feladat megoldását tudatosan szakaszokra kell bontani, és ezeken belül érdemes konkrétabb kérdéseket vizsgálni:

1. **Megértés szakasza.** Mit keresünk? Mi van megadva? Milyen kikötések vannak? Szétválaszthatók a kikötések? Kielégíthetők-e a kikötések? Készítsünk ábrát. Mit mivel jelöljünk? ...

2. **Tervkészítés szakasza.** Nem ismerünk hasonló feladatot, hozzá kapcsolódó megoldási módszert? Bontsuk részekre a problémát. Van olyan tétel, képlet vagy összefüggés, ami használható a kérdéskörben? Át lehet

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

fogalmazni a feladatot? Lehet egyszerűsíteni, redukálni a feladatot? Milyen számítási részlépések szükségesek a megodáshoz? Minden megadott adatot felhasználtunk? Minden kikötés figyelembe lett véve? Alakítsunk ki megoldási tervet, jelöljünk ki különálló részeket, amelyeket egymás után meg akarunk oldani. ...

3. **Végrehajtási szakasz.** Hajtsuk végre a különálló részek megoldását. Ellenőrizzük a lépéseket a terv végrehajtása során. ...

4. **Vizsgálati szakasz.** Hogyan tudnánk ellenőrizni az eredményt, a bizonyítást? Le lehet más módon is vezetni az eredményt? Alkalmazható lenne más probléma esetén is a megoldott feladat? ...

   Jellemzője ennek a szemléletmódnak a „letisztult" matematikai feladatok vizsgálata, a „tiszta" matematikai problémákhoz kapcsolódó kérdések kezelése. Gyakorlatibb problémák esetén viszont nem minden esetben találkozunk letisztult, precízen megadott kihívásokkal. A „nem letisztult" kérdések esetén nekünk kell döntenünk arról is, hogy milyen paramétereket kell figyelembe vennünk, és melyeket lehet elhanyagolnunk. Egyszerű példákat sorolhatunk egy tervezési feladattól kezdve, különböző mérésekig, egészen a mai kor sok műszaki problémaköréig:

   - Adjuk meg a Pízai ferde torony magasságát; anélkül, hogy felmennénk a toronyba - műemlékvédelmi okok miatt zárva.
   - Adjuk meg egy fa magasságát; anélkül, hogy felmásznánk rá.
   - Mérjük meg egy folyó, vagy egy csatorna szélességét; anélkül, hogy átkelnénk rajta.
   - Adjuk meg, hogy mennyi csempére van szükségünk egy szoba padlójának burkolásához.
   - Számítsuk ki a Föld tömegét.
   - Becsüljük meg a Nap felszíni hőmérsékletét.
   - Számítsuk ki egy emberben lévő vér mennyiségét.
   - Számítsuk ki, hogy mennyi ideig tart egy műhold pályára állítása.
   - Becsüljük meg egy háztartási/használati eszköz élettartamát.
   - Adjunk időjárási előrejelzést a következő napra.
   - Becsüljük meg Magyarország lakosainak számát a következő évre.
   - Elemezzük járványok terjedését. Becsüljük meg, hogy mennyi oltóanyagra lenne szükség a járvány megakadályozására. Készítsünk gazdaságossági számításokat, hatásvizsgálatot.
   - Vizsgáljuk meg, hogy milyen hatása lenne 0,25 %-os jegybanki alapkamat emelésnek a magyar gazdaságban.
   - stb. ...

   Ezeknek a feladatoknak a megoldása, vizsgálata matematikai modellek kidolgozását igénylik. (A továbbiakban a matematikai modelleket tekintsük úgy, mint a Pólya-féle heurisztikus megközelítés egyfajta bővítését, általánosítását, amely célja a gyakrorlatibb, „nem letisztult" problémák megoldásának segítése.) A megoldás technikája talán a „szöveges feladatoknak" nevezett problémák megoldásához áll legközelebb. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő egyszerű példát (A példa célja annak a bemutatása, hogy a matematikai modellalkotás nem ismeretlen számunkra, hiszen találkozhattunk már hasonló feladatokkal a különböző oktatási szinteken, de valószínű, hogy nem matematikai modellalkotásnak nevezték az ilyen típusú feladatok megoldását. A példa szemléltető célú, annak biológiai tartalmát ne értékeljük!):

   - Feladat: Tegyük fel, hogy egy apa életkora most éppen négyszerese a fiának. Öt év múlva az apa már csak háromszor annyi idős lesz, mint a fia. Adjuk meg a két ember életkorát. Megoldás: Jelölje x az apa életkorát; y a fiáét. A feladatban megfogalmazott feltételek egyenletrendszerbe írhatók: $x = 4y$; $x + 5 = 3(y + 5)$ Az egyenletrendszer megoldása pedig: $x = 40$ és $y = 10$. Tehát az apa 40 éves, a fia pedig 10 éves.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A fenti feladat tehát egy matematikai modellre ad példát. A megoldás során az életkorok biológiai problémáját egy matematikai problémává (elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer) alakítottuk át. A matematikai probléma megoldása során nem kellett ügyelnünk arra, hogy mely változó mit jelent - tisztán az egyenletrendszer megoldására kellett figyelmünket összpontosítanunk. Az egyenletek megoldásait a feladat végén értelmezzük, a biológiai szint keresett életkor adataival azonosítjuk; megadva az apa és a fia életkorát. A legnehezebb lépések a matematikai problémává alakítás, és az eredmények értelemzése szokott lenni számunkra. A „letisztult" feladatok megoldásában általában nagyobb gyakorlatunk van.

Hasonló módon oldhatunk meg fizikai, biológiai, szociális, stb. témakörhöz kapcsolódó feladatokat; először egy matematikai modellt kidolgozva, majd azt megoldva és értelmezve.

További célunk, hogy áttekintsük a matematikai modellakotás lépéseit és egyszerűbb feladatokat tűzzünk ki a lépések begyakorlására. Feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a középszintű matematika érettségi tananyagát.

2.2. 2.2. A matematikai modellalkotás lépései

A matematikai modellezés során általában egy valós, a világban megfigyelhető, mérhető problémából, problémarészletből kell kiindulnunk. Ezt első lépésben egy ekvivalens matematikai problémává alakítjuk. Ezután megoldjuk a matematikai problémát. A megoldást értelmezzük az eredeti probléma körében. Az utolsó lépésben módunk nyílik a megoldás érvényességének vizsgálatára is.

1. **Formalizálás szakasza.** Ebben a lépésben elemezzük a problémát, matematikai leírást alakítunk ki a feladathoz. Itt választjuk ki azt a matematikai eszközrendszert, amellyel később dolgozni fogunk (egyes feladatok, problémák megoldásánál több modell is kialakítható - eltérő matematikai eszközök vethetők be a cél elérésére). Ez a lépés feltételezi a probléma alapos megértését, a feltételek felismerését és rögzítését. Ebben a szakaszban a modell megköveteli a probléma tudományterületének (fizika, matematika, kémia, biológia, stb.) megfelelő szintű ismeretét. Ebben a lépésben döntünk arról, hogy mely faktorokat tekintünk lényegesnek, és melyeket elhanyagolhatónak. A lényeges faktorok kiválasztása igen fontos mozzanat, hiszen a bevont faktorok számának növelése igen bonyolultá teheti a modellt, kérdésessé teszi annak érdemi vizsgálhatóságát. A matematikai leírás sok esetben egy egyenletet, egy egyenletrendszert jelent.

2. **Problémamegoldás matematikai szakasza.** A „tiszta" matematikai probléma megoldása. Lényegében itt a legszorsabb a kapcsolat a korábban vázolt problémamegoldási folyamattal.

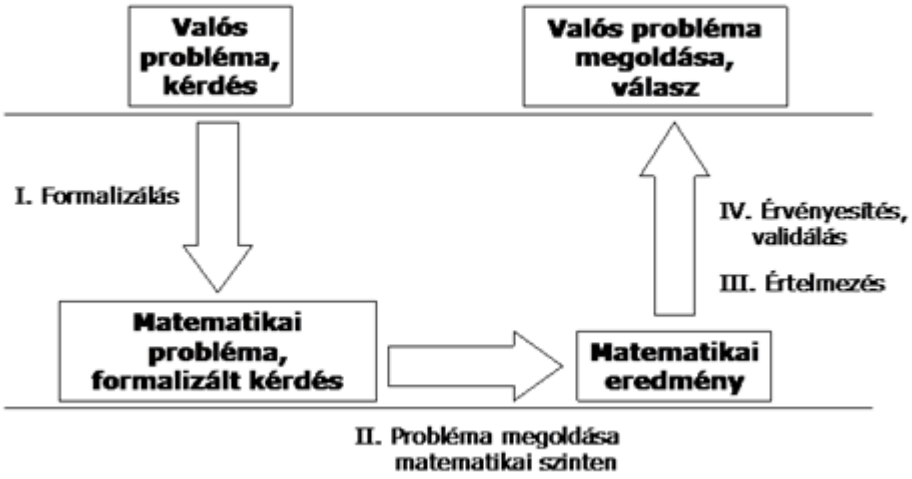
3. **Értelmezés szakasza.** Ebben a szakaszban megvizsgáljuk a probléma matematikai megoldása során nyert eredményeket az eredeti, valós probléma nézőpontjából. Ennek szükségessége az, hogy a matematikai probléma megoldása még nem adja meg az eredeti kérdésre a választ. Nekünk kell értelmeznünk a megoldást az adott tudományterület tekintetében.

4. **Érvényesítés szakasza.** Ebben a szakaszban a megoldás helyességét vizsgáljuk, a megoldás érvényességi körét határozzuk meg. Az egyszerűbb problémák esetén ez a lépés elhanyagolható, redukálható; a bonyolultabb esetekben viszont kulcsfontossága van ennek a szakasznak a modell lezárása tekintetében. Nem fogadhatunk el olyan megoldást, amely ellentétes a valós világban tapasztaltakkal. Abban az esetben, amikor valós eredményekkel ellentétes eredményt szolgáltat a modell, vissza kell lépnünk a formalizálás szakaszába, meg kell vizsgálnunk a bevont faktorokat, esetleg újakat kell bevonnunk a modellbe. Ebben a szakaszban jelentkezik az a kérdés is, hogy elfogadható-e a modellünk hatékonysági, pontossági szempontokból is. A modellt „működtetve" értékeket nyerhetünk az általunk ismert tartományokból. Így a jelenség leírására két értéksorunk adódik: az egyik a valós értékek sora, a másik a modell által szolgáltatott értéksor. A valós és a modellbeli értékek különbsége a modell pontosságára jellemző mutató. Kétféle döntésünk lehet a különbséget vizsgálva. Dönthetünk úgy, hogy elfogadjuk a kidolgozott modell eltérését a valós értékektől; de dönthetünk úgy is, hogy az eltérést nem fogadjuk el. Az előbbi esetben befejezhetjük a probléma vizsgálatát, az utóbbi esetben viszont általában vissza kell térnünk az első szakaszhoz, hogy átalakítsuk a leírást a pontosság fokozása céljából.

A modellalkotás lépéseit összefoglalva az 1. ábra szemlélteti.

1.1. ábra - 1. ábra - A modellalkotás lépései

Created by XMLmind XSL-FO Converter.



Láthatjuk, hogy a matematikai modellalkotás és a „tiszta” feladatmegoldás igen sok ponton átfedi egymást, sok hasonlósággal bír; ugyanakkor érezhető az is, hogy a modellalkotás egy sokrétűbb, nehezebb probléma-megoldást jelent. Talán elmondható az, hogy az utolsó lépés (Érvényesítés szakasza) az, amely lényegesen eltér a hagyományos feladatmegoldás lépéseitől. A matematikai modellalkotásnak vannak előnyei és hátrányai is. Előnyként sorolhatjuk fel azt, hogy a matematikai modellek kidolgozása és alkalmazása során betekintést nyerhetünk a világ működésébe, olyan problémákat vizsgálhatunk meg, amelyek különböző okok miatt (a vizsgált objektum megsemmisülne, nincs közvetlen lehetőségünk a mérésre, költségek, stb.) nem engedik meg a tényleges kísérletek elvégzését. A matematikusok és a kapcsolódó szakterületek képviselői közösen, tudásukat megosztva alkotják meg általában a bonyolultabb modelleket. Ugyanakkor azt is tudomásul kell vennünk, hogy a modellalkotás egy olyan eszköz, amelynek korlátai vannak, nem alkalmazható minden esetben. Például a bevont paraméterek számát növelve egy modell igen bonyolulttá válhat, olyan számításokat követelve, amelyket mai eszközeinkkel nem tudunk elvégezni. Minden modell egyedi, kialakításuk sok esetben követeli meg az emberi leleményességet, a lényeges elemek kiemelésének képességét, a bonyolult problémák egyszerre történő teljes áttekintését ...

„Nincs királyi út” ...

2.3. 2.3. Feladatok - átgondolásra

A rövid összefoglaló után következzenek olyan feladatok, amelyek megoldását a fenti lépéseket követve kellene kialakítania az olvasónak. Modellt kellene kidolgozni, amely megfelelő szinten ragadja meg és írja le a kitűzött feladatot. Az első feladatok látszólag egyszerűek és nem igényelnék a bonyolultabbnak tűnő modellalkotási lépések alkalmazását. A későbbi feldatok viszont már egy kicsit nehezebb problémát ragadnak meg. Ezekben az esetekben kerül előtérbe az, hogy a „tiszta” problémamegoldást bővítenünk kell egy-egy gyakorlati probléma eredményes megoldása érdekében.

1. Üzemanyagfogyasztás problémája. Egy 432 kilométeres úton egy autó 48 liter üzemanyagot fogyasztott. Mennyi üzemanyagra van szükség egy 180 kilométeres út megtételéhez? Milyen külső körülményeket kell rögzíteni a minél helyesebb megoldás elérése érdekében?

2. Kamatszámítási feladat. Egy család 60.000 forintot bankba tesz 8%-os kamatozással. Egy 80.000 forintos házimozi rendszert akarnak vásárolni. Arra döntenek, hogy addig várnak, amíg a kamatok elérik a mozirendszer árát, és úgy vásárolják azt meg. Változatlan körülmények között mennyit kell várniuk? Milyen külső körülményeket kell rögzíteni a minél helyesebb megoldás elérése érdekében?

3. Motorcsónak a folyón. Egy motorcsónak egy folyón felfelé haladva két város közötti utat 6 óra alatt tette meg. Lefelé ugyanez az út 5 órába telik. A folyó sebessége 2 km/h. Határozzuk meg a motorcsónak sebességét álló vízben. Milyen külső körülményeket kell rögzíteni a minél helyesebb megoldás elérése érdekében?

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

4. Csempézési feladat. Egy 6 méter hosszú, 5 méter széles és 3 méter magas szoba padlóját le akarjuk fedni négyzet alakú, 30 centiméter oldalhosszú csempékkel. Hány csempét kell vásárolnunk? Milyen külső körülményeket kell figyelembe vennünk a minél pontosabb megoldás elérése érdekében?

5. Nemek aránya. 2000-ben az Egyesült Nemzetek 191 tagországa aláírt egy nyilatkozatot, amelyben az országok 2015-re tűztek ki különböző területeken elérendő célokat (ezredfordulós célok - millennium development goals). Az egyik cél a nemek egyenlőségének elérése, aminek egyik indikátora a fiú/leány arány az oktatásban. Indiában ez az arányszám a következőképpen alakult (A. táblázat):

1.1. táblázat - Iskolába (alap-, közép-, felsőfok) beiratkozott lányok/nők aránya, India

Év	Beiratkozott lányok/nők aránya (%)
1991-92	41,9
1992-93	42,6
1993-94	42,7
1994-95	42,9
1995-96	43,1
1996-97	43,2
1997-98	43,5
1998-99	43,5
1999-2000	43,6
2000-01	43,7
2001-02	44,1

Az adatokra támaszkodva adjunk matematikai modellt a beiratkozási arányszámra. Becsüljük meg a modell alapján az 50 %-os arány elérésének évét.

6. Halak száma egy tóban. Egy halgazdaságban a téli lehalászásra készítenek tervet. Ehhez szükséges a gazdaság tavában lévő halak mennyiségének ismerete. Milyen módon lehetne minél pontosabban megbecsülni ezt az értéket?

7. Kockadobás két kockával. Két őrséget álló középkori várvédő kockajátékot játszik. Két kockával dobnak felváltva - szabályos hat oldalú dobókocka, 1-6 pontozásssal -, és a kockákon lévő pontérték összegére adnak tippeket. Egy helyes tipp két garast ér, a helytelen két garas veszteség. Milyen stratégiát kell követni annak, aki nyerni akar? Adható nyerési stratégia?

8. Kamatszámítás újra. Egy termék ára 1800 egység. A vásárlónak 600 egysége van a vásárlásra. Az eladó felajánlja, hogy két hónapra hitelez 1200 egységet, havi 610 egységért. A vásárló kölcsönt is vehet fel egy bankból, évi 10 %-os kamatra. Melyik módozatot érdemes választania a vásárlónak? Milyen esetben egyenlők a kölcsönzési feltételek?

9. Torony magassága. Határozzuk meg egy torony, vagy egy nagyobb ház magasságát. Feltétel: nem tudunk felmenni a toronyba, hogy közvetlenül megmérjük a magasságot, például egy kötéllel.

10. Ingamozgás. Készítsünk matematikai modellt egy inga mozgásának leírására. Mitől függ az inga periódusideje?

11. Takarmánykeverés. Egy mezőgazdasági telepen legalább 800 kg speciális takarmánykeveréket használnak fel naponta. A speciális összetételű takarmány kukorica és szójabab keveréke a következő összetételben (B. táblázat):

1.2. táblázat - Takarmánykeverési feladat adatai

Anyag	Protein-tartalom / kg	Rost-tartalom / kg	Ár / kg
Kukorica	0,09	0,02	10 egység
Szójabab	0,60	0,06	20 egység

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A takarmány előírt összetétele: 30 % protein, legalább 5 % rost. Határozzuk meg a megadott feltételeknek eleget tevő, de minimális áru keverék összetételét!

12. Populáció létszáma. A világ országaiban a népesedés többféle problémával néz szembe. Egyes populációk létszáma csökken, másoké növekszik. A korösszetétel is igen változatos képet mutat. Magyarország vonatkozásában készítesünk modellt a népesség létszámának előre-becslésére.

13. Gyártási probléma 1. Egy vállalat P1, P2, P3 típusú termékeket gyárt. Ezekhez az R1 (330 db), R2 (455 db) , R3 (140 db) anyagokat használja. Az R1, R2, R3 alapanyagok különböző mennyiségben szerepelnek az egyes termékekben. P1-ben sorban 3, 4, 0; R1, R2; R3-ból. P2-ben sorban 7, 9, 3; R1, R2, R3-ból. P3-ban sorban 5, 12, 7; R1, R2, R3-ból. A vállalatnak két megrendelője van F1 és F2. Az F1 cég megrendelése: P1=10, P2=15, P3=6; F2 cégé: P1=10, P2=20, P3=0. Készítsünk modellt, melyben megvizsgáljuk a megrendelések teljesíthetőségét.

14. Gyógyszergyártás. Egy gyógyszergyár M1 és M2 termékeket gyárt. A rendelkezésre álló alapanyagok lehetővé teszik, hogy M1-ből 20.000 üveggel, M2-ből 40.000 üveggel gyártsanak, de csak 45.000 üveg áll a csomagoláshoz rendelkezésre. Az M1 termékből 3 óra alatt képesek előállítani 1000 üveggel, M2-ből 1 óra szükséges 1000 üveg előállításához. A gyártásra összesen 66 óra áll rendelkezésre. Az M1-en a gyártónak 8 egység haszna van, az M2 terméken 7 egység haszon. Feltéve, hogy nincs probléma a termékek eladásával, mindkettőt maradéktalanul el tudják adni; készítsünk modellt a profit maximalizálására!

15. Tengervíz probléma. Egy tartály 1.000 liter sós vizet tartalmaz, amelyben literenként 250g só van. A tartályba 25 liter/perc sebességgel olyan sós víz ömlik, amelynek sótartalma 200g literenként. A tartályból szintén 25 liter/perc sebességgel folyik ki a keverék. Készítsünk olyan matematikai modellt, amelynek segítségével meg tudjuk bármely időpontban adni a tartályban lévő só összmennyiségét.

Válasszon egy Ön számára egyszerűbbnek és egy bonyolultabbnak tűnő problémát. Készítsen megoldási tervet az 1. ábra alapján. Nem kell megoldania a problémát, csak utaljon arra a matematikai eszközrendszerre, amelyet alkalmazni kíván a megoldás érdekében. Minden esetben jelölje és fejtse ki a bemutatott modellépítési szakaszokat: 1. Formalizálás szakasza, 2. Problémamegoldás matematikai szakasza, 3. Értelmezés szakasza, 4. Érvényesítés szakasza. (A megoldási terveket az eLearning keretrendszerben megadott határidőre töltse fel. Lehetőségük van csoportos feladatmegoldásra, amit a keretrendszerben készíthetnek elő (fórum, workshop, wiki, stb.) - ebben az esetben egyeztessenek az oktatóval.)

Sorvezetőként két feladatra egy-egy vázlatot is mellékelünk, amelyben néhány útmutató gondolatot osztunk meg az olvasóval:

4. Csempézési feladat.

1. Formalizálás szakasza. A feladat egyszerűnek tűnik, hiszen meg kell határoznunk a szoba méretét, majd azt, hogy hány sor/oszlop csempe szükséges. Azonban nem tudjuk egész csempékkel lefedni a szobát, darabolni kell a csempéket. Döntenünk kell arról, hogy egy-egy csempét hány darabra vágva használunk fel. Külön megoldás az, amikor egy csempét megfelelő darabra vágva, a maradékot tovább már nem használjuk, és egy másik, amikor még a maradékokat is felhasználjuk ...

2. Problémamegoldás matematikai szakasza. Megfelelő egyenlet felírása.

3. Értelmezés szakasza. Az egyenlet megoldásaként értelmes értéket kapunk? Ténylegesen ennyi szükséges?

4. Érvényesítés szakasza. Elfogadjuk az eredményt, vagy felmerüllhet bennünk a kérdés, hogy a csempéző szakemberünk minden darab csempét el tud vágni a megfelelő helyen, vagy számolnuk kell esetleg olyan darabokkal is, amelyek rosszul viselik a törést/vágást. Tapasztalt szakember kevesebb selejttel dolgozik? Mekkora selejtaránnyal számoljunk? Másik meggondolandó feltétel lehet a vásárláskor felmerülő feltétel, hogy csak egész doboznyi csempét tudunk vásárolni ...

Végül is hány darab csempe szükséges - nem is olyan egyszerű a becslést megadni.

5. Nemek aránya feladat.

1. Formalizálás szakasza. A megadadott adatsort többféle módon is feldolgozhatjuk. Az egyik mód, hogy az egyes évek növekedését számítjuk ki. A növekedések átlaga már jó becslésünk lesz a változásra.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

2. Problémamegoldás matematikai szakasza. Lineáris egyenlet pamarmétereinek becslése. Előre számítás.

3. Értelmezés szakasza. A számított eredmény értelmezése, a tényleges évszám kiszámítása.

4. Érvényesítés szakasza. Az eredmény vizsgálata. Elfogadható? Amennyiben igen akkor lezárható a feladat. Amennyiben nem, úgy további meggondolásokkal finomíthatjuk a becslést, korrekciós tényező beiktatásával.

2.4. 2.4. Összegzés és további források

Ebben a részben áttekintést kaptunk a matematikai modellalkotás lépéseiről. Az első rész leírta azokat a lépéseket, amelyek elvezetnek egy probléma ilyen irányú megoldásához. A további modul-részek a matematika részterületeit sorra véve ismétlik át a középiskolai matematikai tananyag részeit, bővítve azokat olyan szintre, hogy erősebb matematikai modelleket tudjunk építeni. A részterültek (és azok későbbiekben használt betűjelei) sorra a következők:

- (H) Halmazok.
- (K) Kombinatorika.
- (E) Eseményalgebra.
- (M) Mátrixok és determinánsok.
- (S) Számsorozatok és számsorok.
- (F) Függvények.
- (D) Differenciálszámítás.
- (I) Integrálszámítás.
- (V) Valószínűségszámítás.

A matematikai modellek kialakítása és működtetése sok tapasztalatot, türelmet és kitartást igényel. Erről olvashatunk Pokorádi László írásában, amely pontos meghatározását igyekszik adni a matematikai modellnek, csoportosítja a különböző modelleket, rávilágít a modellezés és a szimuláció szoros kapcsolatára.

Pokorádi László: A matematikai modell. Szolnoki Tudományos Közlemények XI. Szolnok, 2007.

mindez bővebben: Pokorádi László: Rendszerek és folyamatok modellezése. MEK; Campus Kiadó, Debrecen, 2008.

Ezen elvek gyakorlati bemutatására álljon itt két egymással szoros kapcsolatban álló írás, amelyek betekintést nyújtanak a modellalkotás folyamatába.

Az első Marx György fizikus írása: Kockázat (Fizikai Szemle 1990/5. 129.o.), amely a sugárterhelés kockázatát elemzi.

Ehhez kapcsolódik Lennart Samuelsson cikke: Radon a lakásban (Fizikai Szemle 1990/5. 138.o.), amely kicsit más, gyakorlatibb megközelítését adja a témának.

3. 3. Jelölések, táblázatok, formulák, fogalomtárak és szótárak

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az interneten több olyan lexikon található, amely matematikai fogalmakat, ismereteket gyűjt össze. Amennyiben ismeretlen kifejezésekkel, tételekkel találkozik, első lépésben érdemes ezen források között kutakodni.

1. Görög ábécé
2. Mathematical Formulas abd Math Tables
3. Mathematical Formula Tables
4. Magyarul elérhető egy Oxford - Matematika kislexikon, amelynek főszerkesztője Tóth János (Typotex Kft., 2007)
5. Nem tekinthető még jelenleg (2011) teljesnek, de említést kell tennünk a magyar Wikipédia szabad enciklopédiáról, amelynek Matematikai modulja folyamatosan fejlődik, bővül.
6. Az angol Wikipédia és annak Matematika modulja még több szócikket tartalmaz.
7. Az egyik legteljesebb, haladó szintű angol oldal az Eric Weisstein által szerkesztett Wolfram Mathworld.
8. Michiel Hazewinkel a szerkesztője annak a Springer Kiadó által támogatott oldalnak - Encyclopaedia of Mathematics -, amely szintén matematikai szócikkeket gyűjt.
9. Általánosabb szócikk-kereső (amely több lexikont fog egybe) az OneLook portál, ahol matematikai fogalmakat is kereshetünk.
10. Angol-Magyar és Magyar-Angol szótárak:
    - Magyar Elektronikus Könyvtár
    - Sztaki - ez több nyelvű
    - Szegedi Egyetem
    - Google-fordító
11. És végül egy matematikatörténeti gyűjtemények, amelyek sok érdekes dolgot rejt magában:
    - MacTutor History of Mathematics

4. 4. Halmazelmélet (H)

A matematika alapjaira vonatkozó kutatások megmutatták, hogy a halmazok és a halmazok közötti kapcsolatok a legtöbb matematikai részterület felépítésében alapvető fontosságú elemek. A halmazelmélet pontosan rögzíti a halmaz fogalmát, tárgyalja a halmazok közötti viszonyokat és az alapvető műveleteket. Ezzel a konstrukcióval (vigyázva a halmazelméleti antinómiák - ellentmondások elkerülésére) a matematika több részterületeinek egységes kiindulópontjához juthatunk. Ebben a részmodulban célunk a halmazelmélet ilyen irányú alapjainak átismétlése és bővítése. A részmodul eredményes elvégzésével a halmazelmélet alapfogalmaival, a kapcsolódó műveletekkel és tulajdonságaival, a halmazok számosságával kell tisztába kerülnie az olvasónak.

A részmodul feldolgozásának ajánlott lépései:

1. Olvassa el a H1. Halmazelméleti alapfogalmak részt. Itt az alapvető halmazelméleti fogalmak tömör összefoglalását találja
2. Tekintse át a H1. Gyakorló feladatok megoldással részt. Itt feladatokat talál, amelyek megoldása adott. Hasonló feladatokra számíthat az ellenőrző teszt esetén is.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

3. Moodle: Kérjen le a rendszerből egy önellenőrző tesztet - H1. Önellenőrző teszt (több feladatból válogat a rendszer, a válaszokat cseréli!). Oldja meg a feladatokat. Amennyiben eredményesen válaszolt a tesztkérdésekre (80% felett), akkor lépjen tovább a H2. Műveletek halmazokkal részre. Amennyiben nem éri el a megadott százalékos eredményt, úgy térjen vissza a halmazelméleti alapfogalmak ismétléséhez és a gyakorló feladatok átnézéséhez, majd próbálja újra az önellenőrző tesztet. Az önellenőrző tesztek megoldásai nem számítanak bele a végső értékelésbe, azok a felkészülést szolgálják, a tanulmányok eredményességének mérőeszközei.

4. Amikor eredményesen teljesítette a H1. Önellenőrző tesztet, a következő lépésben olvassa el a H2. Műveletek halmazokkal részt. Ez a leírás a halmazműveletekkel kapcsolatos ismeretek tömör összefoglalása.

5. A H2. részben lehetőség van egy demonstrációs program kipróbálására. A programot Palincsár Zoltán készítette. Töltse le a programot. Indítsa el és gyakorolja a halmazműveleteket. A programhoz egy játékrész is tartozik, amely szintén a műveletek és tulajdonságaik elsajátítását gyakoroltatja. A program használata nem része a számonkérésnek.

6. A gyakorlás után tekintse át a H2. Gyakorló feladatok megoldással részt.

7. Ellenőrizze tudását. Amennyiben eredményesen teljesítette a kérdéssort, lépjen tovább, ha nem, lépjen vissza az elméleti részhez.

8. Dolgozza fel a H3. Halmazok számossága részt az előzőekhez hasonló módon.

9. Dolgozza fel a H4. Néhány halmazelmélethez kacsolódó további fogalom és eljárás részt az előzőekhez hasonló módon.

10. Moodle: Amennyiben úgy érzi, hogy megfelelő szinten elsajátította a részmodul ismereteit, úgy lépjen tovább a H - Ellenőrző teszt megoldására. Figyeljen! Az Ellenőrző teszt megoldása már a modul értékelésének része! A modul eredményes elvégzéséhez sikeresen kell teljesítenie a H - Ellenőrző teszt részt!

11. Az Ellenőrző teszt sikeres teljesítése után lépjen a következő részmodulra. Ahogy a modul bevezető ismertetőjében már szerepelt, és többször is ismétlésre kerül ezután is: ha nehézségei támadnak a részmodul egyes elemeivel, akkor használja a Hírfórumot, elektronikus levélben keresse meg a modul oktatóját!

12. Ezenkívül bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

    - Fodor János: Biomatematika 1. Bevezetés. Halmazok. Szent István Egyetem Állatorvos-tudományi Kar, Biomatematikai és Számítástechnikai Tanszék.Budapest, 2007
    - Lajkó Károly: Analízis I. Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, 2002
    - Dancs István, Magyarkúti Gyula, Medvegyev Péter, Puskás Csaba, Tallos Péter: Bevezetés a matematikai analízisbe. MEK
    - Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára. Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem, Orvosi Informatikai Intézet, Szeged, 1996

    Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

4.1. 4.1. Halmazelméleti alapfogalmak (H1)

H1.1. A hétköznapokban sok esetben találkozunk élőlények, tárgyak, fogalmak összességével, vagy különböző csoportosításával. Ezek az összességek a matematika absztrakt szintjén **halmazelmélet** néven jelennek meg. A mindennapi alkalmazások általában valamilyen közös tulajdonságon alapuló elkülönítést használnak. A matematika is hasonló megközelítést alkalmaz. A következőkben a halmazelmélet alapfogalmait fogalaljuk össze.

A **halmaz fogalma** olyan alapfogalom, amely meghatározott objektumok egyértelmű elkülönítésekor létrejövő csoportokat jelöl.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

H1.2. Akkor tekintünk egy **halmazt adott**nak, ha bármely dologról meg tudjuk mondani, hogy része-e az adott halmaznak, vagy sem. A halmazokat általában latin nagybetűkkel (**A**;**B**;**C**; . . .) jelöljük. A halmazt alkotó objektumokat latin kisbetűkkel szokás jelölni (**a**; **b**; **c**; . . .). Azt, h $a \in A$ y a-val jelölt dolog beletartozik egy A halmazba ú $a \notin A$ ndjuk, hogy az a adott dolog **eleme** a halmaznak: . Azt, hogy az a dolog **nem eleme** az A halmaznak, jelöli.

H1.3. Két halmaz akkor **egyenlő**, ha ugyanazok az elemeik: $A = B$ Azt, hogy két halmaz nem egyenlő, $A \neq B$ jelöli.

H1.4. Egy **halmaz elemeit** többféleképpen **adhatjuk meg**:

H1.5. 1. **Felsorolás**: kapcsos zárójelben felsoroljuk a halmaz elemeit: A = {a; b; c}. Egyes esetekben a felsorolás végtelen sok elemet is jelölhet: A = {a; b; c; : : :}. Ekkor általában szóbeli kiegészítés teszi egyértelművé a halmaz megadását.

H1.5. 1.Példa - Felsorolással megadott halmazok.

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27\}$

$1 \in U, 2 \in U, \ldots, 28 \in U$

$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26\}$

$1 \in A;\ 2 \in A;\ 3 \in A;\ \ldots$

$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27\}$

$1 \in B;\ 2 \in B;\ 3 \in B$

$C = \{5; 10; 15; 20; 25\}$

$1 \in C;\ 2 \in C; \ldots;\ 5 \in C;\ \ldots$

H1.6. 2. **Halmazalkotó tulajdonság megadása**: kettősponntal, vagy függőleges vonallal elválasztva szerepel a halmazalkotó tulajdonság leírása a kapcsos-zárójeles jelölésen belül: $A = \{a : \text{tulajdonság}\} = \{a \mid \text{tulajdonság}\}$

H1.6. 1.Példa - Halmazalkotó tulajdonsággal megadott halmazok.

U = { u | 1 és 27 közötti természetes számok }

A = { a | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

B = { b | 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

C = { c | 1 és 27 közötti 5-tel osztható természetes számok }

H1.7. **Számhalmazok.** A matematikában sok esetben számhalmazokkal dolgozunk. Az alapvető, és középiskolai szinten tárgyalt számhalmazok a következők: Az egyes halmazok leírásában szerepel a \ jel (halmazok különbsége), amelynek definiálása a H2.17. pontban található. Itt a számhalmazok felsorolásának teljesebbé tétele miatt használjuk a műveleti jelet.

1. **Természetes számok** halmaza: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

2. **Egész számok** halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

3. **Negatív egész számok** halmaza: $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} / \mathbb{N} = \{\ldots, -2, -1\}$

4. **Pozitív egész számok** halmaza: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} / \mathbb{Z}^- = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

5. **Racionális számok** halmaza: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

6. **Irracionális számok** halmaza: $\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{a}{b} \text{nem} \right\}$ - az a/b alakban nem felírható számok halmaza

7. **Valós számok** halmaza: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

A teljesebb összefoglalásért szerepeljen itt a komplex számok értelmezése is:

8. **Komplex számok** halmaza: $\mathbb{C} = \left\{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1} \right\}$

H1.8. **Intervallumok.** Sok esetben szükséges a számhalmazok egyes részeit is megkülönböztetnünk. Ez általában intervallumok definiálásával lehetséges (jelöljön X egy tetszőleges rögzített számhalmazt):

H1.9. Egy [a; b]-vel jelölt halmaz **zárt intervallum**, ha $[a; b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$.

H1.9. 1. Példa - zárt intervallum.

$[5; 9] = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 9\} \ldots ; 4 \notin [5; 9]; 5 \in [5; 9]; \ldots; 9 \in [5; 9]; 10 \notin [5; 9]; \ldots$

H1.10. Egy (a; b)-vel (vagy]a; b[-vel) jelölt halmaz **nyílt intervallum**, ha $(a; b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$

H1.10. 1.Példa - nyílt intervallum.

$(5; 9) = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 9\} \ldots; 4 \notin [5; 9]; 5 \notin [5; 9]; 6 \in [5; 9]; \ldots; 8 \in [5; 9]; 9 \notin [5; 9]; 10 \notin [5; 9]; \ldots$

H1.11. Egy [a; b)-vel (vagy [a; b[-vel) jelölt halmaz **balról zárt, jobbról nyílt intervallum**, ha $[a; b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$

H1.11. 1.Példa - balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

$[5; 9) = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 9\} \ldots; 4 \notin [5; 9]; 5 \in [5; 9]; 6 \in [5; 9]; \ldots; 8 \in [5; 9]; 9 \notin [5; 9]; 10 \notin [5; 9]; \ldots$

H1.12. Egy (a; b]-vel (vagy]a; b]-vel) jelölt halmaz **balról nyílt, jobbról zárt intervallum**, ha $(a; b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

H1.12. 1.Példa - balról nyílt, jobbról zárt intervallum.

$(5; 9] = \{x \in \mathbb{N} | 5 < x \leq 9\}$ ...; $4 \notin [5; 9]$; $5 \notin [5; 9]$; $6 \in [5; 9]$; ...; $8 \in [5; 9]$; $9 \in [5; 9]$; $10 \notin [5; 9]$; ...

H1.13. **Üres halmaz**nak nevezzük azt a halmazt, amely egy elemet sem tartalmaz: $\varnothing$.

H1.14. **Rögzített alaphalmaz** - **Univerzum**. Egyes problémakörökben érdemes bevezetni az U univerzális halmazt (univerzumot). Ez a halmaz a feladattal kapcsolatos összes lehetséges objektumok összessége.

H1.15. Amennyiben egy A halmaz minden eleme egyben eleme a B halmaznak is, akkorazt mondjuk, hogy az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, amit $A \subseteq B$-vel jelölünk. Amennyiben B-nek van olyan eleme, amely A-nak nem eleme ($A \neq B$), akkor azt mondjuk, hogy A **valódi rész**e B-nek: $A \subset B$. A reláció tagadása: $A \not\subset B$.

H1.15. 1.Példa - tartalmazási reláció, részhalmaz.

A = { a | 1 és 27 közötti páros természetes számok }; $\{2; 4; 6\} \subset A$; $\{1; 2; 3\} \not\subset A$

A H1.7. pontban szereplő **számhalmazok** közötti tartalmazási relációk:

H1.16. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tulajdonságok, megjegyzések:

(A, B, C tetszőleges halmazok)

H1.17. **1.** $A \subseteq A$ (reflexivitás). Minden halmaz része önmagának.

H1.18. **2.** Ha $A \subseteq B$ és ugyanakkor $B \subseteq A$, akkor $A = B$ (antiszimmetria).

H1.19. **3.** Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$ (tranzitivitás).

H1.20. **4.** Tetszőleges A halmaz esetén $\varnothing \subseteq A$, vagyis az üres halmaz része bármely halmaznak.

H1.21. Az 1. és 4. pont alapján egy tetszőleges A halmaz **triviális részhalmaz**ai maga az A halmaz és a $\varnothing$ üres halmaz. A minden más részhalmaza A nem triviális részhalmaza.

H1.22. Az A halmaz P(A) **hatványhalmaz**a az A részhalmazainak halmaza.

H1.22. 1.Példa - Hatványhalmaz.

D = {1; 2; 3}; P(D) = {$\varnothing$; {1}; {2}; {3}; {1; 2}; {1; 3}; {2; 3}; {1; 2; 3}; }

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

H1.23. Nem akármilyen összességet tekinthetünk halmaznak. Például, ha az összes halmaz összességét halmaznak tekintjük, ellentmondáshoz jutunk. Az ilyen eseteket **halmazelméleti antinómiá**nak nevezik. A probléma megoldására a matematikusok egy halmazoknál általánosabb fogalmat, az osztály fogalmát vezetik be. Így az összes halmazok összességét nem halmaznak, hanem osztálynak tekintjük.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

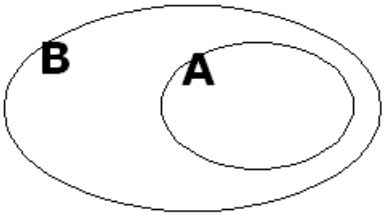
4.2. 4.2. Műveletek halmazokkal (H2)

H2.1. **Venn-diagram.** A halmazműveletek jelölésére sok esetben alkalmazhatók a Venn-diagrammok.A jelölés síkidomokat használ egy-egy halmaz ábrázolására. A halmazműveletek a síkidomok egymáshoz viszonyított helyzete alapján ábrázolhatók. Hangsúlyoznunk kell, hogy a Venn-diagrammok használata, az általuk szemléltetett összefüggések nem helyettesítik a matematikai bizonyításokat.

H2.1. 1.Példa - Venn-diagram.

H2.1. 1. ábra - Részhalmaz reláció ($A \subset B$) ábrázolása Venn-diagrammal.

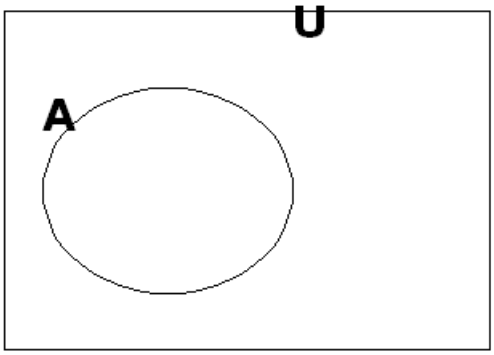
1.2. ábra - H2.1. 1. ábra - Venn-diagram



H2.1. 2.Példa - Venn-diagram:

H2.1. 2.ábra - Rögzített U alaphalmaz és $A \subseteq B$ halmaz ábrázolása Venn-diagrammal.

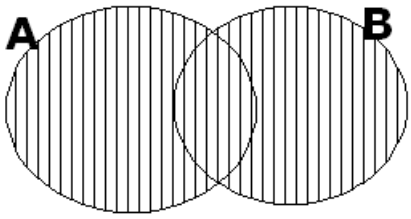
1.3. ábra - H2.1. 2.ábra - Venn-diagram



Created by XMLmind XSL-FO Converter.

H2.2. **Unió - Egyesítés.** Az A és B halmazok egyesítése ($A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$) jelölt halmaz, amelynek elemei vagy A-nak, vagy B-nek elemei (H2.2. ábra): .

1.4. ábra - H2.2. ábra - Halmazok uniója.



H2.2. 1.Példa - Halmazok egyesítése.

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26} = { $a \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

B = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27} = { $b \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

$A \cup B$ = { $x \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros, vagy 3-mal osztható természetes számok } = {2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; 26; 27}

Néhány tulajdonság (A, B, C tetszőleges halmazok).

H2.3. **1.** $A \cup B = B \cup A$ (komutativitás)

H2.4. **2.** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asszociativitás)

H2.5. **3.** $A \cup A = A$ (idempotencia).

H2.6. **4.** A halmazok egyesítésének művelete általánosítható kettőnél több tagra, az eredményhalmaz független a tagok zárójelezésétől és a tagok sorrendjétől.

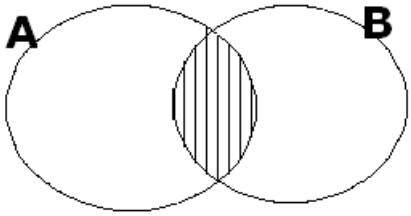
H2.7. **5.** $A \cup \varnothing = A$.

H2.8. **6.** $A \cup U = U$ (U alaphalmaz, univerzum).

H2.9. **Metszet - Közös rész**. Az A és B halmazok közös része (metszete,szorzata) az $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$ -vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak is és B-nek is elemei (H2.3. ábra): $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$

1.5. ábra - H2.3. ábra - Halmazok metszete.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.



H2.9. 1.Példa - Halmazok közös része.

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26} = { $a \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

B = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27} = { $b \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

$A \cap B$ = { $x \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros és 3-mal osztható természetes számok } = {6; 12; 18; 24}

Néhány tulajdonság (A, B, C tetszőleges halmazok):

H2.10. **1.** $A \cap B = B \cap A$ (komutativitás)

H2.11. **2.** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asszociativitás)

H2.12. **3.** $A \cap A = A$ (idempotencia)

H2.13. **4.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributivitás I.)

H2.14. **5.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (disztributivitás II.)

H2.15. **6.** $A \cup (A \cap B) = A$ (abszorpció - elnyelés I.)

H2.16. **7.** $A \cap (A \cup B) = A$ (abszorpció - elnyelés II.)

H2.17. **8.** A halmazok metszetének művelete általánosítható kettőnél több tagra.

H2.18. **9.** $A \cap \varnothing = \varnothing$.

H2.19. **10.** $A \cap U = A$ (U alaphalmaz, univerzum).

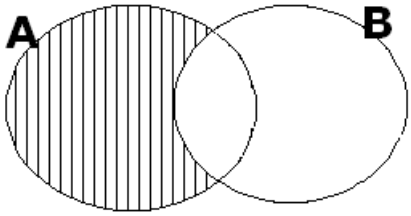
H2.20. Ha az A és B halmazoknak nincs közös része, vagyis $A \cap B = \varnothing$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B **halmazok diszjunktak**.

H2.21. **Különbség**. Az A és B halmazok különbsége az A\B -vel (vagy A − B) jelölt halmaz, amely A azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek B-ben (4. ábra):

$A \backslash B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ es } x \notin B\}$

1.6. ábra - H2.4. ábra - Halmazok különbsége.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.



H2.21. 1.Példa - Halmazok különbsége.

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26} = { $a \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

B = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27} = { $b \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

A\B = { $x \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros és 3-mal nem osztható természetes számok } = {2; 4; 8; 10; 14; 16; 20; 22; 26}

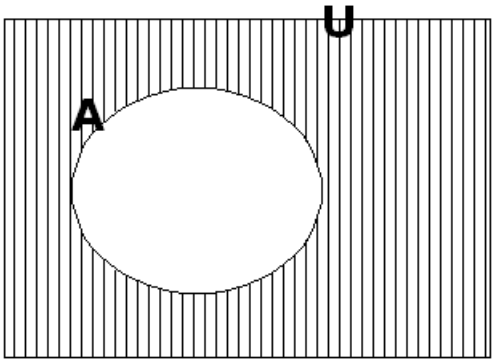
Néhány tulajdonság (A, B tetszőleges halmazok).

H2.22. **1.** $A \backslash B = A \backslash (A \cap B) = (A \cup B) \backslash B$.

H2.23. **Komplementer.** Az A halmaz U univerzumra vonatkozó komplementere azon U-beli elemek halmaza, amelyek nincsenek A-ban (H2.5. ábra).

Jelölése: $\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ és } x \notin A\} = U \setminus A$

1.7. ábra - H2.5. ábra - Komplementer halmaz.



H2.23. 1.Példa - Komplementer halmaz.

U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27}= { u | 1 és 27 közötti természetes számok }

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26}= { a | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

$\overline{A}$ = U\A = {1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27}

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Néhány tulajdonság (A, B tetszőleges halmazok, U az univerzum).

H2.24. **1.** $\overline{A} \cup A = U$

H2.25. **2.** $\overline{A} \cap A = \varnothing$

H2.26. **3.** $\overline{\overline{A}} = A$

H2.27. **4.** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (de-Morgan I.)

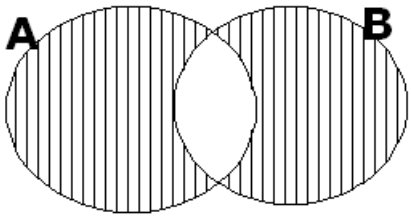
H2.28. **5.** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de-Morgan II.)

H2.29. **6.** $\overline{U} = \varnothing$

H2.30. **7.** $\overline{\varnothing} = U$

H2.31. **Szimmetrikus differencia.** Két halmaz szimmetrikus differenciáját a következőképp definiáljuk (H2.6. ábra): $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1.8. ábra - H2.6. ábra - Szimmetrikus differencia.



H2.31. 1.Példa - Szimmetrikus differencia.

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26} = { $a \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti páros természetes számok }

B = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27} = {$b \in \mathbb{N}$ | 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

$A \triangle B$ = {2; 3; 4; 8; 9; 10; 14; 15; 16; 20; 21; 22; 26; 27}

Néhány tulajdonság.

H2.32. **1.** $A \triangle B = B \triangle A$ (kommutativitás)

H2.33. **2.** $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (asszociativitás)

H2.34. **3.** $A \triangle A = \varnothing$

H2.35. **4.** $A \triangle \varnothing = A$

H2.36. **5.** $A \triangle (A \triangle B) = B$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(Halmazműveleteket bemutató program - letöltés (Sulinet))

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

4.3. 4.3. Halmazok számossága (H3)

H3.1. Egy A **halmaz számosságán** a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölése: |A|.

Alapvetően megkülönböztetünk véges, megszámláhatóan végtelen, és nem megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazokat.

H3.2. **Véges számosságú**nak (végesnek) nevezünk egy halmazt, ha pontosan meg tudjuk adni a halmazelemek számát. Ez a számosság egy természetes szám: $|A| = k \in \mathbb{N}$

H3.3. **Megszámlálhatóan végtelen** számosságú egy A halmaz, ha A ekvivalens a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazával. Ez azt jelenti, hogy a halmaz elemei sorrendbe rendezhetők, az elemek sorszámozhatók; és a sorszámozás minden határon túl folytatható. Viszont rögzítenünk kell azt, hogy két megadott elem között csak véges sok elem szerepelhet.

H3.4. Egy A halmaz **kontinuum számosság**ú (nem megszámlálhatóan végtelen számosságú), amennyiben A ekvivalens a valós számok $\mathbb{R}$ halmazával. Ez azt jelenti, hogy a halmaz elemei megfeleltetehetők a számegyenes pontjainak, és viszont. Két megadott halmazelem között tetszőlegesen sok más halmazelem lehet.

Néhány tulajdonság.

H3.5. **1.** Tetszőleges A és B véges halmazokra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

H3.5. 1.Példa - Halmazok számossága.

A = {2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26} = { 1 és 27 közötti páros természetes számok}

B = {3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27} = { 1 és 27 közötti 3-mal osztható természetes számok }

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 13 + 9 - 4 = 18$

H3.6. **2.** Tetszőleges A, B és C véges halmazokra: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

További általánosítás lehetséges (szita formula).

H3.7. **3.** Tetszőleges A és B véges halmazokra: $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

H3.8. 4. Példa - megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok: a természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza; az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza; a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza; ...

H3.9. 5. Példa - kontinuum számosságú halmazok: a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza; az irracionális számok $\mathbb{Q}^*$ halmaza; a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza; a sík pontjainak halmaza; ...

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

4.4. 4.4. Néhány halmazelmélethez kapcsolódó további fogalom és eljárás (H4)

H4.1. **Rendezett elempár, halmazok Descartes-féle szorzata.** Az A és B tetszőleges halmazok A x B Descartes-féle szorzata az (a; b) $(a \in A, b \in B)$ rendezett elempárok halmaza: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \,\&\, b \in B\}$

H4.1. 1.Példa - Rendezett elempár.

D = {1; 2; 3};

E = {4; 5; 6}

D x E = {(1; 4); (1; 5); (1; 6); (2; 4); (2; 5); (2; 6); (3; 4); (3; 5); (3; 6)}

Megjegyzések, tulajdonságok.

H4.2. **1.** A **rendezett elempár** fogalma: legyen a és b két tetszőleges elem (például $(a \in A, b \in B)$). Amennyiben ezek közül az egyiket elsőnek, a másikat pedig másodiknak jelöljük ki, akkor rendezett elempáról beszélhetünk: (a ; b)={{a},{a,b}}.

H4.3. **2.** Rendezett elempárok **egyenlősége**: (a ; b) = (c ; d) akkor és csak akkor, ha a = c és b = d.

H4.4. **3.** Amennyibn A = B, akkor A x B = A x A helyett A^2 is írható (A^2).

H4.5. **4.** A rendezett elempár és a kéttényezős Descartes-szorzat álalánosító.

H4.6. **Binér reláció**. Az A és B halmazok AxB Descartes-féle szorzatának bármely részhalmaza az A és B közötti binér reláció.

Megjegyzések.

H4.7. 1. A rendezett elempár és a binár reláció fogalma fontos szerepet tölt be a **függvények** értlemezése során. Ezenkívül a matematika számos ága alkalmazza azeket a konstrukciókat.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

(Halmazelméleti fejezet - Ellenőrző, számonkérő teszt)

5. 5. Kombinatorika (K)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A kombinatorika a diszkrét matematika egyik ága, véges halmazok numerikus problémáival foglalkozik. Három alapfejezete a permutációk; a kombinációk és a variációk témaköre. Ezek a konstrukciók sok más területen részproblémaként, a megoldás egyik mozzanataként jelentkeznek. Ilyen területek: az algebra, a gráfelmélet, a valószínűségszámítás, stb. Ebben a részmodulban célunk a kombinatorika alapjainak átismétlése és bővítése.A részmodul eredményes elvégzésével a kombinatorika alapfogalmaival kell tisztába kerülnie az olvasónak.

A részmodul feldolgozásának ajánlott lépései:

1. Olvassa el a K1-4. Kombinatorikai összefoglaló részt. Itt az alapvető fogalmak tömör összefoglalását találja. K1. Permutációk. K2. Kombinációk. K3. Variációk. K4. Binomiális együtthatók és összefüggéseik.

2. Tekintse át ezután a K1-4. Gyakorló feladatok megoldással részt. Itt feladatokat talál, amelyek megoldása adott. Hasonló feladatokra számíthat az ellenőrző teszt esetén is.

3. Az alkalmazási példák részbe olyan esettanulmányokat, bemutató anyagokat gyűjtöttünk össze, amely a fejezet fogalmainak, eljárásainak elmélyítését szolgálják. A részmodul feldolgozása nem kerül számonkérésre, de mindezek kitekintést nyújtanak az elsajátított matematikai fogalma gyakorlati alkalmazásába.

4. Ezután kérjen le a rendszerből egy önellenőrző tesztet - K. Önellenőrző teszt (több feladatból válogat a rendszer, a válaszokat cseréli!). Oldja meg a feladatokat. Amennyiben eredményesen válaszolt a tesztkérdésekre (80% felett), akkor lépjen tovább az éles tesztre. Amennyiben nem éri el a megadott százalékos eredményt, úgy térjen vissza a kombinatorikai alapfogalmak ismétléséhez és a gyakorló feladatok átnézéséhez, majd próbálja újra az önellenőrző tesztet. Az önellenőrző tesztek megoldásai nem számítanak bele a végső értékelésbe, azok a felkészülést szolgálják, a tanulmányok eredményességének mérőeszközei.

5. Amikor tehát úgy érzi, hogy megfelelő szinten elsajátította a részmodul ismereteit, úgy lépjen tovább a K - Ellenőrző teszt megoldására. Figyeljen! Az Ellenőrző teszt megoldása már a modul értékelésének része! A modul eredményes elvégzéséhez sikeresen kell teljesítenie a K - Ellenőrző teszt részt!

6. Az Ellenőrző teszt sikeres teljesítése után lépjen a következő részmodulra.Ahogy a modul bevezető ismertetőjében már szerepelt, és többször is ismétlésre kerül ezután is: ha nehézségei támadnak a részmodul egyes elemeivel, akkor használja a Hírfórumot, elektronikus levélben keresse meg a modul oktatóját problémáival!

7. Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

   - Wikipedia: Kombinatorika.
   - Tóth László: Kombinatorika. Jegyzet, PTE, 2008

   Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

5.1. 5.1. Kombinatorikai összefoglaló (K1-4)

K1. Permutációk

K1.1. **Ismétlés nélküli permutáció.**

n egymástól különböző elem egy meghatározott sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes lehetséges permutációinak száma: $P_n = n! = P(n)$

Az n! szimbólum olvasata: „n faktoriális”: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

K1.1. 1.Példa - ismétlés nélküli permutáció.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Papírlapokra írjuk fel 1-től 4-ig a természetes számokat. Rakjuk le ezután sorba a lapokat. Hányféle sorrendben tudjuk ezt megtenni? Írjuk fel a lehetséges számsorokat. Megoldás: Az első lap, amit leteszünk 4 lap közül kerülhet ki. Ezután a második lap 3 lap közül választható, a harmadik lap a 2 maradék lapból kerül ki, végül utóljára a maradék 1 lapot rakhatjuk le.

Ez összeszámolva: 4 * 3 * 2 * 1 = 24 = P(n) = P(4) = n! = 4! eset.

Az esetek: (1; 2; 3; 4); (1; 2; 4; 3); (1; 3; 2; 4); (1; 3; 4; 2); (1; 4; 2; 3); (1; 4; 3; 2) (2; 1; 3; 4); (2; 1; 4; 3); (2; 3; 1; 4); (2; 3; 4; 1); (2; 4; 1; 3); (2; 4; 3; 1) (3; 1; 2; 4); (3; 1; 4; 2); (3; 2; 1; 4); (3; 2; 4; 1); (3; 4; 1; 2); (3; 4; 2; 1) (4; 1; 2; 3); (4; 1; 3; 2); (4; 2; 1; 3); (4; 2; 3; 1); (4; 3; 1; 2); (4; 3; 2; 1)

K1.1. 2.Példa - ismétlés nélküli permutáció.

Egy szabályos dobókockával hatszor dobunk egymás után. Határozzuk meg azoknak a dobássorozatoknak a számát, amelyekben nincs azonos pontszámú dobás.

Megoldás: A feladat megoldása ismétlés nélküli permutációra vezet. A lehetséges 6 pontszámot ismétlés nélkül kell minden lehetséges sorrendben felírnunk. Ezt P(6) = 6! módon tehetjük meg. Úgy is gondolkodhatunk, hogy a lehetséges hatféle pontszámot kell sorbaraknunk. A sorrend kialakításakor az első helyre még hat pontszám közül választhatunk. A második helyre már egyel kevesebb, öt pontszám marad. Továbbgondolva, az utolsó helyre egyetlen pontszám marad. Összesítve: 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 eset lehet. Ez éppen P(6).

K1.2. **Ismétléses permutáció.**

n elem között legyen k1; k2, ..., kl darab megegyező. Ezen elemek egy meghatározott sorrendjét az n elem egy ismétléses permutációjának nevezzük. A megegyező elemek egymás közötti felcserélésével nem kapunk az előzőtől különböző permutációt. Az n elem összes lehetséges ismétléses permutációinak száma: $P^n_{k1,k2,\ldots,kl} = \frac{n!}{k1!k2!\cdots kl!} = Pi(n;\ k1;\ k2;\ \ldots\ ;\ kl)$

K1.2. 1.Példa - ismétléses permutáció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 1, 2, 3 a természetes számokat. Rakjuk le ezután sorba a lapokat. Hányféle sorrendben tudjuk ezt megtenni? Írjuk fel a lehetséges számsorokat.

Megoldás: Az ismétléses permutáció (K1.2.) képletét alkalmazva $P^n_k = \frac{n!}{k!} = Pi(n;\ k) = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = \frac{24}{2} = 12$ eset lehetséges.

Megkülönböztetve a két 1-es értéket (1 és 1′), a következő lehetséges sorrendeket kapjuk: (1; 2; 3; 1′); (1; 2; 1′; 3); (1; 3; 2; 1′); (1; 3; 1′; 2); (1; 1′; 2; 3); (1; 1′; 3; 2) (2; 1; 3; 1′); (2; 1; 1′; 3); (2; 3; 1; 1′); (2; 3; 1′; 1); (2; 1′; 1; 3); (2; 1′; 3; 1) (3; 1; 2; 1′); (3; 1; 1′; 2); (3; 2; 1; 1′); (3; 2; 1′; 1); (3; 1′; 1; 2); (3; 1′; 2; 1) (1′; 1; 2; 3); (1′; 1; 3; 2); (1′; 2; 1; 3); (1′; 2; 3; 1); (1′; 3; 1; 2); (1′; 3; 2; 1)

Áthúzva az azonos eseteket (1 = 1//) 12 eset marad: (1; 2; 3; 1); (1; 2; 1; 3); (1; 3; 2; 1); (1; 3; 1; 2); (1; 1; 2; 3); (1; 1; 3; 2) (2; 1; 3; 1); (2; 1; 1; 3); (2; 3; 1; 1); (2//;/3//;/1/;//1); (2//;/1//;/1/;//3); (2//;/1//;/3/;//1) (3; 1; 2; 1); (3; 1; 1; 2); (3; 2; 1; 1); (3//;/2//;/1/;//1); (3//;/1//;/1/;//2); (3//;/1//;/2/;//1) (1//;/1//;/2/;//3); (1//;/1//;/3/;//2); (1//;/2//;/1/;//3); (1//;/2//;/3/;//1); (1//;/3//;/1/;//2); (1//;/3//;/2/;//1)

K1.2. 2.Példa - ismétléses permutáció.

Egy dobozba 15 golyót teszünk. A golyók között 9 piros, 4 fehér és 2 zöld van. A dobozból sorban (visszatevés nélkül) kivesszük a golyókat. Hányféle sorrend lehetséges, ha az egyszínű golyókat nem különböztetjük meg?

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Megoldás: Ismétléses permutáció 9, 4 és 2 megegyező elemmel. P(15;9;4;2) = 15!/(9!4!2!) = 5 * 13 * 7 * 15 = 6825.

K1.3. **Ciklikus permutáció.** Tekintsük n különböző elem összes ismétlés nélküli permutációt. Ezután ezek közül ne különböztessük meg azokat a permutációkat, amelyek egymásból „eltolással" származtathatók (az eltolás jelentse azt, hogy az első elem a második elem helyére, a második elem a harmadik elem helyére, az utolsó elem pedig az első elem helyére kerül). Ezt a konstrukciót ciklikus permutációnak nevezzük. Ekkor az összes lehetséges sorrendek száma: $P_{n,cikl} = \frac{n!}{n} = (n-1)! = Pc(n)$

K1.3. 1.Példa - ciklikus permutáció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 2, 3, 4 a természetes számokat. Rakjuk le kör alakban a számokat. Hányféle larakás lehetéges, ha a köralakú lerakás körbeforgatásait nem tekintjük különbözőnek?

Megoldás: A ciklikus permutáció (K1:3.) képletét alkalmazva Pc(n) = n! / n = 4! / 4 = (1 *2 * 3 * 4) / 4 = 6 .

Az esetek, felsorolva a körbeforgatásokat is:

1. (1; 2; 3; 4) -> (2; 3; 4; 1) -> (3; 4; 1; 2) -> (4; 1; 2; 3)

2. (1; 2; 4; 3) -> (2; 4; 3; 1) -> (4; 3; 1; 2) -> (3; 1; 2; 4)

3. (1; 3; 2; 4) -> (3; 2; 4; 1) -> (2; 4; 1; 3) -> (4; 1; 3; 2)

4. (1; 3; 4; 2) -> (3; 4; 2; 1) -> (4; 2; 1; 3) -> (2; 1; 3; 4)

5. (1; 4; 2; 3) -> (4; 2; 3; 1) -> (2; 3; 1; 4) -> (3; 1; 4; 2)

6. (1; 4; 3; 2) -> (4; 3; 2; 1) -> (3; 2; 1; 4) -> (2; 1; 4; 3)

K2. Kombinációk

K2.1. **Ismétlés nélküli kombináció.**

Tekintsünk n egymástól különböző elemet. Alkossunk az n elemből választva k ($k \leq n$) elemű csoportokat úgy, hogy a k elem sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy elem nem szerepelhet többször a csoportban. Egy csoportot n elem egy k-adosztályú kombinációjának nevezzük. n elem összes lehetséges k-adosztályú kombinációinak száma: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C(n;k)$

Az $\binom{n}{k}$ szimbólum (binomiális együttható) olvasata: „n alatt a k".

K2.1. 1.Példa - ismétlés nélküli kombináció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 2, 3, 4 a természetes számokat. Válasszunk véletlenül, visszatevés nélkül két lapot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel. Hányféle pár alakítható így ki. Írjuk fel ezeket a párokat.

Megoldás: Az ismétlés nélküli kombináció (K2.1.) képletét alkalmazva C(4;2) = 4! / (2!(4-2)!) = 6

Amennyiben a sorrend is számít, úgy a lehetséges párok a következők:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(1; 2); (1; 3); (1; 4);

(2; 1); (2; 3); (2; 4);

(3; 1); (3; 2); (3; 4);

(4; 1); (4; 2); (4; 3)

Amennyiben a sorrend nem számít, úgy a

(1; 2); (2; 1);

(1; 3); (3; 1);

(1; 4); (4; 1);

(2; 3); (3; 2);

(2; 4); (4; 2);

(3; 4); (4; 3)

párok egyformáknak tekinthetők. A párok száma 6.

K2.1. 2.Példa - ismétlés nélküli kombináció.

A hagyományos ötös lottó sorsolásakor 90 számból választanak 5 számot. Hány szelvényt kellene kitöltenünk, hogy biztosan közöttük legyen a nyertes szelvény?

Megoldás: 90 különböző elemből kell 5 elemű csoportokat képeznünk. Ismétlés nélküli kombináció: C(90; 5) = "90 alatt az 5" = 90! / (5! 85!) = 43 949 268.

K2.2. **Ismétléses kombináció.**

Tekintsünk n egymástól különböző elemet. Alkossunk az n elemből választva k ($k \leq n$) elemű csoportokat úgy, hogy a k elem sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és egy elem többször is szerepelhet a csoportban. Egy csoportot n elem egy k-adosztályú ismétléses kombinációjának nevezzük. n elem összes lehetséges k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma: $C_n^{k;i} = \binom{n+k-1}{k} = Ci(n;\ k)$

K2.2. 1.Példa - ismétléses kombináció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 2, 3, 4 a természetes számokat. Válasszunk véletlenül, visszatevéssel két lapot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel. Hányféle pár alakítható így ki. Írjuk fel ezeket a párokat.

Megoldás: Az ismétléses kombináció (K2.2.) képletét alkalmazva: Ci(4;2) = 5! / (2! 3!) = ... = 10.

A lehetséges párok a következők: (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4); (1; 1;); (2; 2;); (3; 3); (4; 4).

K2.2. 2.Példa - ismétléses kombináció.

Négy szabályos dobókockát dobunk fel. Hányféle dobássorozat alakulhat ki, ha a kockákat nem különböztetjük meg?

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Megoldás: A lehetséges hatféle dobásértékből negyedosztályú ismétléses kombinációkat kell képeznünk. Ci(6;4) = ... = 126.

K3. Variációk

K3.1. **Ismétlés nélküli variáció.**

Tekintsünk n egymástól különböző elemet. Alkossunk az n elemből választva k ($k \leq n$) elemű csoportokat úgy, hogy a k elem sorrendjére tekintettel vagyunk, és egy elem nem szerepelhet többször a csoportban. Egy csoportot n elem egy k-adosztályú variációjának nevezzük. n elem összes lehetséges k-adosztályú variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = V(n;\, k)$

K3.1. 1.Példa - ismétlés nélküli variáció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 2, 3, 4 a természetes számokat. Válasszunk véletlenül, visszatevés nélkül két lapot úgy, hogy a sorrend számít. Hányféle pár alakítható így ki. Írjuk fel ezeket a párokat.

Megoldás: Az ismétlés nélküli variáció (K3.1.) képletét alkalmazva: V(4;2) = ... = 12.

A lehetséges párok a következők: (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3).

K3.1. 2.Példa - ismétlés nélküli variáció.

Egy versenyen 12 fő vesz részt. Körmérkőzésket vívnak úgy, hogy egy versenyző kétszer mérkőzik meg ellenfelével („odavágó” és „visszavágó”), majd következik az újabb ellenfél. Hány mérkőzést játszanak a versenyen?

Megoldás: A feladat 12 elemből párok (2 elem) képzését vizsgálja úgy, hogy a párok sorrnedje számít: V(12;2) = ... = 132.

Tehát 132 mérkőzést játszanak.

K3.2. **Ismétléses variáció.**

Tekintsünk n egymástól különböző elemet. Alkossunk az n elemből választva k ($k \leq n$) elemű csoportokat úgy, hogy a k elem sorrendjére tekintettel vagyunk, és egy elem többször szerepelhet a csoportban. Egy csoportot n elem egy k-adosztályú ismétléses variációjának nevezzük. n elem összes lehetséges k-adosztályú ismétléses variációinak száma: $V_n^{k;i} = n^k = Vi(n;\, k)$

K3.2. 1.Példa - ismétléses variáció.

Papírlapokra írjuk fel 1, 2, 3, 4 a természetes számokat. Válasszunk véletlenül, visszatevéssel két lapot úgy, hogy a sorrend számít. Hányféle pár alakítható így ki. Írjuk fel ezeket a párokat.

Megoldás: Az ismétléses variáció (K3.2.) képletét alkalmazva: Vi(4;2) = 4^2 = 16.

A lehetséges párok a következők: (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3) (1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4).

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

K3.2. 2.Példa - ismétléses variáció.

A totón 13 + 1 mérkőzésre lehet tippelni. 1 a hazai csapat, 2 a vendégcsapat győzelmét jelöli, x a döntetlent. Hány szelvényt kell kitölteni, hogy a kitöltött szelvények között legyen olyan, amelyen az első 13 mérkőzés eredményét eltaláljuk.

Megoldás: A szelvény egyes rubikáiba az 1, 2, x jeleket írjuk, újra felhasználva a jeleket. Az elemek sorrendje számít, így az ismétléses variáció összefüggéseit kell alkalmaznunk. Tehát Vi(13;3) = 3^13 = 1 594 323 totószelvényt kell kitöltenünk a 13 biztos találathoz.

K4. **Binomiális együtthatók és összefüggéseik.**

A binomiális együtthatók **néhány tulajdonsága**:

K4.1. **1.** A binomiális együtthatók érétkei mindig természetes számok.

K4.2. **2.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

K4.3. **3.** $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

K4.4. **4.** $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

K4.5. **5.** Az n-elemű halmaz összes részhalmazainak száma: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

K4.6. **6.** Kéttagú kifejezés első hatványa: $(a+b)^1 = a+b$

Ez felírható binomiális együtthatókkal: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$

K4.8. **7.** Kéttagú kifejezés második hatványa (négyzete): $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ez felírható binomiális együtthatókkal: $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$

K4.12. **8.** A kéttagú kifejezések hatványai tovább sorolhatók, a kapcsolat a binomiális együtthatókkal hasonló alakba írható: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$

Az együtthatók rendezett felírásával az úgynevezett **Pascal háromszög**höz jutunk, amelynek igen sok érdekes tulajdonsága van.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Alkalmazási példa: Jearl Walkler: Íme, a karikavarázs. Tudomány, 1987.12.)

(Önellenőrző teszt)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(Kombinatorika fejezet - Ellenőrző, számonkérő teszt)

6. 6. Eseményalgebra (E)

Az eseményalgebra a valószínűségszámítás megalapozásában alapvető szerepet játszik. A modul egyik fő célja a Biostatisztika modul matematikai megalapozása - a statisztika pedig igen szoros kapcsolatban van a valószínűségszámítással. Ebben a részmodulban célunk az eseményalgebra alapjainak átismétlése és bővítése. A halmazelmélet részmodul ismeretei részben tükröződnek ebben a részben is - ennek oka a közös forrás - mindkét matematikai részterület a Boole-algebrák körébe sorolható. A részmodul eredményes elvégzésével az eseményalgebra alapfogalmaival kell tisztába kerülnie az olvasónak.

A részmodul feldolgozásának ajánlott lépései:

1. Olvassa el a E1. és E2. részeket. Itt az alapvető fogalmak tömör összefoglalását találja. E1. Eseményalgebrai alapfogalmak E2. Műveltek eseményekkel

2. Tekintse át ezután az E1-2. Gyakorló feladatok megoldással részt. Itt feladatokat talál, amelyek megoldása adott. Hasonló feladatokra számíthat az ellenőrző teszt esetén is.

3. Ezután kérjen le a rendszerből egy önellenőrző tesztet - E. Önellenőrző teszt (több feladatból válogat a rendszer, a válaszokat cseréli!). Oldja meg a feladatokat. Amennyiben eredményesen válaszolt a tesztkérdésekre (80% felett), akkor lépjen tovább az éles tesztre. Amennyiben nem éri el a megadott százalékos eredményt, úgy térjen vissza a kombinatorikai alapfogalmak ismétléséhez és a gyakorló feladatok átnézéséhez, majd próbálja újra az önellenőrző tesztet. Az önellenőrző tesztek megoldásai nem számítanak bele a végső értékelésbe, azok a felkészülést szolgálják, a tanulmányok eredményességének mérőeszközei.

4. Amikor úgy érzi, hogy megfelelő szinten elsajátította a részmodul ismereteit, úgy lépjen tovább az E - Ellenőrző teszt megoldására. Figyeljen! Az Ellenőrző teszt megoldása már a modul értékelésének része! A modul eredményes elvégzéséhez sikeresen kell teljesítenie az E - Ellenőrző teszt részt!

5. Az Ellenőrző teszt sikeres teljesítése után lépjen a következő részmodulra. Ahogy a modul bevezető ismertetőjében már szerepelt, és többször is ismétlésre kerül ezután is: ha nehézségei támadnak a részmodul egyes elemeivel, akkor használja a Hírfórumot, elektronikus levélben keresse meg a modul oktatóját problémáival!

6. Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

   - Dinya Elek: Biometria 3. modul. SOTE, 2010

   - Fazekas István: Valószínűségszámítás. - A valószínűségszámítás alapfogalmai. Debreceni Egyetem, 2003

6.1. 6.1. Eseményalgebrai összefoglaló (E1, E2)

E1. Eseményalgebrai alapfogalmak.

E1.1. Az események algebrája a matematikában legszorosabban a valószínűségszámítás köréhez kapcsolódik. Az itt értelmezett fogalmak lehetővé teszik, hogy megragadjuk és leírjuk azt a világot, amelyben meghatározó szerep jut a véletlennek.

E1.2. Akkor, amikor a világban történő dolgokat megfigyeljük, **kísérlet**ek kimeneteleit érzékeljük és mérjük. A kísérlet fogalmát itt széles körűen, általános értelemben használjuk. Kísérletnek tekintjük egy mérőműszerrel történő mérést, de kísérlet egy megfigyelési objektum tulajdonságának megállapítása, megfigyelése is.

Egy másik szempontot figyelembe véve, alapvetően kétféle - élesen igazán nem elkülöníthető - nagy csoportja alakítható ki a kísérleteknek (jelenségeknek):

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

E1.3. Az egyik a **determinisztikus** kísérletek csoportja. Ezek jellemzője az, hogy ha a kísérlet körülményeit ismerjük, akkor ismerjük a kísérlet eredményét is. A természet- és műszaki tudományok sok-sok jelesége és kísérlete ide sorolható.

E1.4. A másik a **sztochasztikus** (véletlentől függő) kísérletek csoportja. Ilyenkor a körülményeket ismerve sem tudjuk megmondani a kísérlet kimenetelét.

E1.5. A determinisztikus és szotchasztikus kísérletek (jelenségek) közötti határvonal nem éles. Sok esetben a tudomány aktuális eredményei (az modellépítő igényei) határozzák meg ezt a vonalat.

E1.6. Egy kísérlet egyes lehetséges kimeneteleit **esemény**eknek nevezzük. Ezekről feltételezzük, hogy a kapcsolódó kísérlet elvégzése után egyértelműen eldönthető, hogy bekövetkezett-e vagy sem az adott esemény.

E1.5. 1.Példa - kísérlet és determinisztikus esemény fogalma.

Leejtünk egy fémgolyót 1 méter magasról. Írjuk le a kísérletet.

Megoldás: A fizika összefüggései alapján: ismerve a test súlyát és az indulás pillanatában a test földtől mért magasságát; meghatározhatjuk a leérkezésig eltelt időt, a test sebességét a leérkzés pillanatában, a test mozgási energiájának változását, stb. Egy részletes képet alkothatunk a test mozgásáról, sok jellemző paramétert kiszámítva.

E1.6. 1.Példa - kísérlet és véletlen esemény fogalma.

Papírlapokra írjuk fel 1-től 4-ig a természetes számokat. Válasszunk tetszőlegesen egy lapot. Így egy véletlentől függő kísérletet végzünk. Néhány esemény: az 1-est, 2-es, 3-ast, 4-est tartalmazó lapot választjuk, páros lapot választunk, páratlan lapot választunk, stb. A kísérlet véletlentől függ, előre nem tudjuk, hogy melyik lapot választjuk.

Megjegyzések.

1. Az, hogy egy kísérlet véletlentől függő, vagy általunk ismert kimenetekkel, eseményekkel rendelkezik, sok esetben a tudományos kutatás és az emberi megismerés aktuális helyzetétől függ. Az újabb kutatási eredmények tisztázhatnak véletlentől függő jelenségeket. Sok olyan kísérlet van, amely esetén reményünk sem lehet determinisztikus kép kialakítsára. Az atomi jelenségek például magukban hordozzák azt a jellegzetességet, hogy egyszerre vagy az egyik, vagy a másik paramétert mérhetjük meg pontosan - a másik megismerendő paraméter értéke tett becsléseink az első paraméter egyre pontosabb mérése esetén egyre bizonytalanabbá válnak.

2. A **valószínűségszámítás** tárgya a véletlen tömegjelenségek tárgyalása, amikor a kísérletek során bekövetkező események egymáshoz viszonyított arányait tárjuk fel. Az egyedi kísérletek során bekövetkező konkrét eseményekre ekkor sem tudunk határozott állításokat alkotni, a sokszor elvégzett (vagy egyszerre tömegesen végrahajtott) kísérletekkel kapcsolatban tudunk állításokat megfogalmazni.

E1.7. Megkülönböztetünk elemi és összetett eseményeket. **Elemi események** azokaz események, amelyeket nem tudunk, vagy nem akarunk további részekre bontani. **Összetett esemény** az, amelyet további eseményekre tudunk bontani.

Az események jelölésére latin nagybetűket (A, B, C, stb.) vagy görög kisbetűket (ω, stb.) használunk.

Amikor meg kell különböztetnünk elemi és összetett eseményeket, akkor latin nagybetűkkel szokás az összetett eseményeket, görög kisbetűkkel az elemi eseményeket jelölni.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

E1.7. 1.Példa - elemi esemény, összetett esemény.

Papírlapokra írjuk fel 1-től 4-ig a természetes számokat. Válasszunk tetszőlegesen egy lapot.

Összetett esemény:

A esemény: páros lapot választunk (vagy a 2-es, vagy a 4-es lap),

B esemény: páratlan lapot választunk (vagy az 1-es, vagy a 3-as lap);

C esemény: 3-nál kisebb lapot választunk,

D esemény: 2-nél nagyobb lapot választunk.

Elemi esemény:

ω_1: az 1-es lapot választjuk,

ω_2: a 2-es lapot választjuk,

ω_3: a 3-as lapot választjuk,

ω_4: a 4-es lapot választunk.

E1.7. 2.Példa - elemi esemény, összetett esemény.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát.

Az elemi eseményeink legyenek a következők:

ω_1: a tábla bal felső negyedét találjuk el,

ω_2: a tábla jobb felső negyedét találjuk el,

ω_3: a tábla bal alsó negyedét találjuk el,

ω_4: a tábla jobb alsó negyedét találjuk el.

Összetett események:

A esemény: a tábla felső felét találjuk el (ω_1 vagy ω_2),

B esemény: a tábla alsó felét találjuk el (ω_3 vagy ω_4),

C esemény: a tábla bal felét találjuk el (ω_1 vagy ω_3),

D esemény: a tábla jobb felét találjuk el (ω_2 vagy ω_4).

E1.8. **Két esemény azonos (egyenlő)**, ha a kapcsolódó kísérlet minden lehetséges kimenetelekor vagy mindkét esemény bekövetkezik, vagy egyik sem. Jelölés: $A = B$.

E1.9. Akkor, ha az A esemény csak azokban az esetekben következhet be, amikor a B esemény is bekövetkezik, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt. Ennek jele: $A \subset B$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

E1.9. 1.Példa - egy esemény maga után von egy másik eseményt.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát. Legyen az ω 1 esemény az, hogy a tábla bal felső negyedét találjuk el. Legyen az A eseményt az, hogy a tábla felső felét találjuk el. ω 1 maga után vonja az A eseményt: ω 1 ⊂ A.

Tulajdonságok (A, B, C tetszőleges események).

E1.10. **1.** Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.

E1.11. **2.** Ha $A \subset B$, $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (tranzitivitás).

E1.12. Egy kísérlettek kapcsolatos összes lehetséges elem események összessége (halmaza) az **eseménytér**. Jelölése: T, vagy Ω.

E1.12. 1.Példa - eseménytér.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát.

Az elemi eseményeink legyenek a következők:

ω_1: a tábla bal felső negyedét találjuk el,

ω_2: a tábla jobb felső negyedét találjuk el,

ω_3: a tábla bal alsó negyedét találjuk el,

ω_4: a tábla jobb alsó negyedét találjuk el.

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4\}$ egy eseményteret alkot

E1.13. **Lehetetlen esemény** , amely sohasem kövtkezik be. Jele: $\varnothing$.

E1.14. **Biztos esemény** , amely a kísérlet végrehastása során mindig bekövetkezik. Jele: I.

E1.15. Egy A eseményhez tartozó **ellentett esemény** az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

E1.15. 1.Példa - ellentett esemény.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát.

Legyen az A esemény az, hogy a tábla felső felét találjuk el.

Legyen a B B esemény az, hogy a tábla alsó felét találjuk el.

Ekkor A esemény ellentett eseménye a B B esemény: $\overline{A} = B$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Tulajdonságok (A tetszőleges esemény).

E1.16. **1.** $\overline{\overline{A}} = A$.

E1.17. **2.** $\overline{\varnothing} = I$. A lehetetlen esemény ellentett eseménye a biztos esemény.

E1.18. **3.** $\overline{I} = \varnothing$. A biztos esemény ellentett eseménye a lehetetlen esemény.

E2. Műveletek eseményekkel.

Kísérletekkel kapcsolatos események között műveleteket értelmez a matematika, így a meglévő események segítségével újabb eseményeket értelmezhetünk.

E2.1. **Események összege.** Az A és B események A + B összegén azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A vagy a B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

E2.1. 1.Példa - események összege.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát.

Az elemi eseményeink legyenek a következők:

ω_1: a tábla bal felső negyedét találjuk el,

ω_2: a tábla jobb felső negyedét találjuk el,

ω_3: a tábla bal alsó negyedét találjuk el,

ω_4: a tábla jobb alsó negyedét találjuk el.

Összetett események:

A esemény: $\omega_1 + \omega_2$ a tábla felső felébe találunk,

B esemény: $\omega_3 + \omega_4$ a tábla alsó felébe találunk,

C esemény: $\omega_1 + \omega_3$ a tábla bal felébe találunk,

D esemény: $\omega_2 + \omega_4$ a tábla jobb felébe találunk.

Tulajdonságok (A, B, C, A_1, ..., A_n tetszőleges események).

E2.2. **1.** A + B = B + A (kommutativitás) .

E2.3. **2.** A + (B + C) = (A + B) + C (asszociativitás) .

E2.4. **3.** Értelmezhető kettőnél több esemény összege: $A_1 + A_2 + ... + A_n$ akkor következik be, ha legalább az egyik összeadandó esemény teljesül.

E2.5. **4.** A + A = A .

E2.6. **5.** A + I = I .

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

E2.7. **6.** $A + \varnothing = A$.

E2.8. **7.** $A + \overline{A} = I$.

E2.9. **Összetett esemény** pontosított fogalma. Egy A összett esemény, ha előállítható legalább két, tőle különböző esemény összegként. Minden összett esemény elemi események összegére történő felbontása egyértelmű (az összeadandók sorrendjétől eltekintve).

E2.10. **Események szorzata.** Az A és B események AB szorzatán azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A és a B események mind bekövetkeznek.

E2.10. 1.Példa - események szorzata.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát. Eseményeink legyenek a következők: A esemény: a tábla felső felébe találunk, B esemény: a tábla alsó felébe találunk, C esemény: a tábla bal felébe találunk, D esemény: a tábla jobb felébe találunk.

Az AC esemény azt jelenti, a tábla felső felébe és ugyanakkor a tábla bal felébe találunk, vagyis a tábla bal felső negyedét talájuk el, ami éppen (az előző jelölések alapján) ω_1 tehát AC = ω_1.

A BD esemény azt jelenti, a tábla alsó felébe és ugyanakkor a tábla jobb felébe találunk, vagyis a tábla jobb alsó negyedét talájuk el, ami éppen (az előző jelölések alapján) ω_4 tehát BD = ω_4.

Tulajdonságok (A, B, C, A1, : : : An tetszőleges események).

E2.11. **1.** AB = BA (kommutativitás) .

E2.12. **2.** A(BC) = (AB)C (asszociativitás) .

E2.13. **3.** Értelmezhető kettőnél több esemény szorzata: $A_1 \; A_2 \; \dots \; A_n$ akkor következik be, ha az összes esemény mindegyike bekövetkezik.

E2.14. **4.** AA = A .

E2.15. **5.** AI = A .

E2.16. **6.** $A\varnothing = \varnothing$.

E2.17. **7.** $A\overline{A} = \varnothing$.

E2.18. **8.** A(B + C) = AB + AC (disztributivitás I.).

E2.19. **9.** A + BC = (A + B)(A + C) (disztributivitás II.).

E2.20. **10.** $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (de Morgan I.).

E2.21. **11.** $\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$ (de Morgan I. általánosítása).

E2.22. **12.** $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (de Morgan II.).

E2.23. **13.** $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}$ (de Morgan II. általánosítása).

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

E2.24. **Egymást kizáró események**. Az A és B események egymást kizáró események, ha szorzatuk a $\varnothing$ lehetetlen esemény: $AB = \varnothing$.

E2.24. 1.Példa - egymást kizáró események.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát. Legyen az A esemény az, hogy a tábla felső felét találjuk el. Legyen a B esemény az, hogy a tábla alsó felét találjuk el. Ekkor az A és B események egymást kizárók, hiszen egyszerre nem találhatjuk el a tábla felső és alsó felét: $AB = \varnothing$.

E2.25. **Események különbsége.** Az A és B események A − B különbsége az az esemény, amely akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem: $A - B = A\overline{B}$

Tulajdonságok.

E2.26. **1.** Események közötti különbségképzés nem kommutatív, nem asszociatív művelet.

E2.27. **Teljes eseményrendszer.**

Az A_1, A_2, ⋯, A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, ha:

E2.26. **1.** $A_i \neq \varnothing \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, vagyis egyikük sem lehetetlen esemény,

E2.27. **2.** $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = I$, vagyis összegük a biztos esemény,

E2.28. **3.** $A_i A_j = \varnothing$, ha $i \neq j \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ vagyis egymást páronként kizáró események.

E2.27. 1.Példa - teljes eseményrendszer.

Lőjünk nyíllal egy köralalkú céltáblára. Tegyük fel, hogy biztosan eltaláljuk a táblát.

Az elemi eseményeink legyenek a következők:

ω_1: a tábla bal felső negyedét találjuk el,

ω_2: a tábla jobb felső negyedét találjuk el,

ω_3: a tábla bal alsó negyedét találjuk el,

ω_4: a tábla jobb alsó negyedét találjuk el.

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4\}$ egy teljes eseményrendszert alkot.

1. $\omega_i \neq \varnothing \ (i = 1, 2, \ldots, 4)$; egyikük sem egyenlő a lehetetlen eseménnyel,

2. $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = I$,

3. $\omega_i \omega_j = \varnothing$, ha $i \neq j \ (i = 1, 2, \ldots, 4)$, $(j = 1, 2, \ldots, 4)$ vagyis egymást páronként kizáró események.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(Gyakorló feladatokmegoldással)

(Önellenörző teszt)

(Ellenörző teszt)

7. 7. Mátrixok és determinánsok (M)

A mátrixszámítás és a determinánsok elmélete a matematika egyik olyan ága, amely igen sok gyakorlati területen nyer alkalmazást. Ebben a részmodulban célunk az alapok átismétlése és bővítése.A részmodul eredményes elvégzésével a mátrix- és determináns-számítás alapfogalmaival és alapszámításaival kell tisztába kerülnie az olvasónak.

A részmodul feldolgozásának ajánlott lépései:

1. Olvassa el az M1. alapfogalmakat összefoglaló részt.Itt az alapvető fogalmak tömör összefoglalását találja.

2. Tekintse át ezután a Gyakorló feladatok megoldással részt. Itt feladatokat talál, amelyek megoldása adott. Hasonló feladatokra számíthat az ellenőrző teszt esetén is.

3. Ezután kérjen le a rendszerből egy önellenőrző tesztet. Oldja meg a feladatokat. Amennyiben eredményesen válaszolt a tesztkérdésekre (80% felett), akkor lépjen tovább. Amennyiben nem éri el a megadott százalékos eredményt, úgy térjen vissza az alapfogalmak ismétléséhez és a gyakorló feladatok átnézéséhez, majd próbálja újra az önellenőrző tesztet. Az önellenőrző tesztek megoldásai nem számítanak bele a végső értékelésbe, azok a felkészülést szolgálják, a tanulmányok eredményességének mérőeszközei. Hasonló módon haladjon tovább a többi anyagrésszel is.

4. Az M2. fejezetrész speciális mátrixokkal foglalkozik. Itt nem kell tesztet kitöltenie.

5. Az M3 és M4. a mátrixműveletek fejezetei. Itt kell tesztet kitöltenie.

6. Amikor úgy érzi, hogy megfelelő szinten elsajátította a részmodul ismereteit, úgy lépjen tovább az M - Ellenőrző teszt megoldására. Figyeljen! Az Ellenőrző teszt megoldása már a modul értékelésének része! A modul eredményes elvégzéséhez sikeresen kell teljesítenie az M - Ellenőrző teszt részt!

7. Az Ellenőrző teszt sikeres teljesítése után lépjen a következő részmodulra.

8. Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

   - Wikipedia: Mátrix (matematika).

   - Wikipedia: Determináns.

   Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

7.1. 7.1. Mátrix alapfogalmak (M1)

M1. Mátrix fogalma.

A mindennapokban sok számadattal találkozunk. Az áttiekinthetőség érdekében sok esetben táblázatokba foglaljuk össze ezeket az adatokat.

M1.1. **Mátrix**nak nevezünk adatok olyan öszességét, amelyek téglalap alakú táblázatba írhatók. Egy általános mátrixot általában a következő alakban szokás felírni:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & a_{ik} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

M1.2. A felírásban az a_{11}; a_{21}; ... ; a_{1m}; a_{21}; ... ; a_{2m} ; ... ; a_{ik} ; ... ; a_{n1}; ... ; a_{nm} **adatelemek** n darab **sor**ban és m darab **oszlop**ban helyezkednek el (n x m). Lényeges az elem helye a téglalapban. A jelölésben a_{ik} azt az elemet jelöli, amely az i. sorban és k. oszlopban van (i = 1; ... ; n, k = 1; ... ; m). Egy mátrixban n sorban és m oszlopban összesen $n \cdot m$ elem írható fel. Ezek az elemek lehetnek egész-, valós-, komplex számok, függvények, vagy akár mátrixok is. A fenti mátrixot $n \cdot m$ típusú mátrixnak (nxm típusú mátrix) nevezzük.

M1.3. Egy mátrixot célszerű egyetlen matematikai objektumnak tekintenünk, és egyetlen jellel jelölnünk. A **jelölés** többféle lehet, sok leírásban eltérő rendszert alkalmaznak a szerzők. *Félkövér latin nagybetűk*et (ebben a leírásban ezt, vagy latin nagybatűs jelölést használunk); egyszer vagy kétszer alá- vagy fölé- húzott nagybetűket szokás alkalmazni (itt a többféle jelölést együtt mutatjuk be):

$$A = \overline{A} = \overline{\overline{A}} = \underline{A} = \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & a_{ik} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

M1.4. További jelölések: $A = [a_{ik}] = A_{(n,m)} = [a_{ik}]_{n,m}$

M1.3. 1.Példa - mátrixjelölés.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 3$; ...; $a_{24} = 8$; ...; $a_{34} = 12$

A márixok-objektumokkal műveleteket tudunk végezni. Az egyes műveleteknek meghatározott tulajdonságai vannak, amelyeket a számítások és alkalmazások során figyelmbe kell vennünk.

M1.5. **Négyzetes mátrix, kvadratikus mátrix.** Egy olyan mátrixot, amelynek sorainak és oszlopainak száma egyenlő (n = m), négyzetes vagy kvadratikus mátrixnak nevezünk.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ik} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

M1.5. 1.Példa - négyzetes mátrix.

A mátrix $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ egy 3 x 3-as négyzetes mátrix.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M1.6. **Négyzetes mátrix rendje**. Egy négyzetes mátrix sorainak (és oszlopainak) száma a mátrix rendje. Egy elsőrendű mátrixnak egy eleme, egy n-edrendű mátrixnak pedig n^2 eleme van.

M1.6. 1.Példa - négyzetes mátrix rendje.

Az M1.5. 1. Példában szereplő négyzetes mátrix rendje 3.

M1.7. **Mátrix transzponáltja**. Egy A mátrix sorait és oszlopait felcserélve az A mátrix A $*$ transzponáltját (transzponált mátrixát) kapjuk.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & a_{ki} & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ik}]^* = [a_{ki}]$$

M1.7. 1.Példa - mátrix transzponáltja.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}; \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Megjegyzések.

M1.8. **1.** Egy nxm típusú mátrix transzponáltja mxn típusú mátrix.

M1.9. **2.** Négyzetes mátrix rendszáma transzponálás során nem változik.

M1.10. **3.** Egy transzponált mátrix transzponáltja az eredeti mátrix: $(A^*)^* = A$

M1.11. **Oszlopmátrix, oszlopvektor.** Egyetlen oszlopból álló mátrixot oszlopmátrixnak (vektoros felfogásban: oszlopvektornak) nevezzük.

Jelölése félkövér latin kisbetukkel:

$$\mathbf{a} = [a_{ik}]_{n,1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M1.11. 1.Példa - oszlopmátrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \text{ oszlopmátrixai:}$$

$$[a_{i1}]_{3,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}; [a_{i1}]_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}; [a_{i1}]_{3,1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}; [a_{i1}]_{3,1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

M1.12. **Sormátrix, sorvektor.** Egyetlen sorból álló mátrixot sormátrixnak (vektoros felfogásban: sorvektornak) nevezzük. Jelölése félkövér latin kisbetukkel:

$$\mathbf{a} = [a_{ik}]_{1,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

M1.12. 1.Példa - sormátrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \text{ sormátrixai:}$$

$$[a_{1i}]_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; [a_{1i}]_{1,4} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; [a_{1i}]_{1,4} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

M1.13. **Minormátrix**. Amennyiben egy A mátrixból tetszés szerinti sort és/vagy oszlopot elhagyunk, akkor az A mátrix egy minormátrixához jutunk. Jelölés: $A^{l,m,\dots,n}_{i,j,\dots,k}$, ahol A az eredeti mátrix; i, j, ..., k az eredeti mátrixból megmaradó oszlopok; l, m, ..., n az eredeti mátrixból megmaradó sorok jelölése.

M1.14. Egy A mátrix speciális minormátrixai a mátrix oszlopmátrixai és sormátrixai. Ezekkel az eredeti mátrix felírása a következő:

$$\mathbf{A}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \dots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$$

Itt $\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ a k. oszlopmátrixot;

$\mathbf{a}^k = \begin{bmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{bmatrix}$ a k. sormátrixot jelöli.

M1.14. 1.Példa - minormátrixok.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^3 \end{bmatrix}, \text{ ahol}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}; \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}; \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}; \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; \mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

M1.15. **Mátrixok particionálása, mátrix blokk.** Amennyiben egy A mátrixot felbontunk sorai, illetve oszlopai mentén, úgy a mátrix egy paricionálását végezzük el. A kapott minormátrixok az eredeti mátrix blokkjai.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \hline \dots & \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{23} & \dots & a_{2m} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{21} = \dots; \mathbf{A}_{22} = \dots$$

M1.15. 1.Példa - mátrix blokkok.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Itt a részmátrixok értelemszerűen a következők:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}$$

M1.16. **Hipermátrix.** Olyan mátrix, amelynek elemei mátrixok. Egy mátrix particionálása lényegében hipermátrix kialakítását jelenti.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

7.2. 7.2. Speciális mátrixok (M2)

M2. Speciális mátrixok.

M2.1. **Zérusmátrix, nullmátrix.** Zérusmátrix (nullmátrix) olyan mátrix, amelynek minden eleme zérus.

M2.1. 1.Példa - zérusmátrix.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M2.2. **Diagonálmátrix.** Diagonálmátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek csak a főátlóban (bal felső saroktól a jobb alsó sarokig) van zérustól különböző eleme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & a_{ik} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \langle a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \rangle$$

M2.2. 1.Példa - diagonálmátrix.

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

M2.3. **Egységmátrix.** Egységmátrix olyan diagonálmátrix, amelynek főátlójában minden elem 1.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle = \left[\delta_{ij} \right]$$

M2.4. Itt δ_{ij} a **Kronecker-féle „delta”** szimbólum. $\delta_{ij} = 1$, ha i = j; $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$. Az egységmátrix négyzetes mátrix, rangját az E indexe jelöli.

M2.3. 1.Példa - egységmátrix.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

M2.5. **Egységvektor.** Az olyan oszlop- és sormátrixot, amelynek egyik eleme 1, a többi 0, egységvektornak nevezzük.

M2.5. 1.Példa - egységvektorok.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Három elemű egység-oszlopvektorok:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Három elemű egység-sorvektorok:

$$\mathbf{e}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés.

M2.6. **1.** Minden n-edrendű egységmátrix n olyan oszlop-, sor-vektorra bontható, amelyek egységvektorok.

M2.7. **Összegző vektor.** Összegző vektor olyan oszlop-, vagy sor-mátrix, amelynek minden eleme 1. Jelölés: 1.

M2.8. **Permutáló mátrix.** Permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, amely az egységmátrixból az oszlopok és/vagy sorok permutálásával (más sorrendű leírás, sor- és/vagy oszlop-csere) adódik. Egy ilyen mátrixban egy sor/oszlop csak egy 1-est tartalmaz, a többi elem 0.

M2.9. **Szimmetrikus mátrix.** Egy négyzetes mátrix szimmetrikus, ha elemei a főátlóra szimmetrikusak. Egy szimmerikus A mátrix azonos transzponáltjával.

M2.11. **Antiszimmetrikus (ferdén szimmetikus) mátrix.** Egy négyzetes mátrix antiszimmetrikus, vagy ferdén szimmetrikus, ha a főátlóra szimmetrikus elemek egymás ellentettjei. Egy antiszimmetrikus mátrix főátlójában csak 0 áll.

M2.13. **Háromszögmátrix.** Háromszögmátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek főátlója alatt, vagy felett csupa 0 elem áll. Megkülönböztetünk felső- (alul csupa 0) és alsó- (felül csupa 0) háromszögmátrixot. A diagonális mátrixok speciális háromszögmátrixok; egyszerre alsó, illetve felső háromszögmátrixok.

M2.15. **Ciklikus mátrix.** Egy C ciklikus mátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek elemei soronként (és oszloponként) ciklikusan ismétlődnek. Egy sor a közvetlenül felette álló sorból egy elemmel jobbra történő eltolással adódik. A sor végi elem a sor elején jelenik meg.

7.3. 7.3. Műveletek mátrixokkal (M3)

M3.1. **Két mátrix egyenlősége.** Két mátrix egyenlő (A = B), ha soraik és oszlopaik száma megegyezik, valamint az azonos pozícióban álló elemeik megegyeznek.

M3.2. Értelmezhetők az azonos sor- és oszlop-számmal rendelkező mátrixok között a nagyobb (A > B), kisebb (A < B), nem kisebb (A $\leq$ B), nem nagyobb (A $\geq$ B) **relációk**. Egy-egy reláció akkor teljesül, ha a reláció minden megfelelő mátrix-elempárra teljesül.

M3.3. Amennyiben a „nagyobb”, „kisebb”, „egyenlo” relációk egyike sem teljesül, akkor a két mátrixról annyi mondható, hogy **nem egyenlő**k (A $\neq$ B).

M3.4. **Két mátrix összeadása és kivonása.** Ugyanolyan típusú mátrixok körében értelmezhetjük az összeadás és a kivonás műveletét. Az összeg- és különbségmátrix ugyanolyan típusú, minden eleme a két mátrix megfelelő elemeinek összege, különbsége.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & b_{ik} & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} + b_{ik} & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2m} - b_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} - b_{ik} & \dots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nm} - b_{nm} \end{bmatrix}$$

M3.4. 1.Példa - két mátrix összege és különbsége.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+10 & 2+11 & 3+12 \\ 4+13 & 5+14 & 6+15 \\ 7+16 & 8+17 & 9+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 \\ 23 & 25 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-10 & 2-11 & 3-12 \\ 4-13 & 5-14 & 6-15 \\ 7-16 & 8-17 & 9-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok.

M3.5. **1.** A mátrix-összeadás kommutatív: A + B = B + A

M3.6. **2.** A mátrix-összeadás asszociatív: (A + B) + C = A + (B + C)

M3.7. **3.** Két mátrix összegének transzponáltja felbontható a mátrixok transzponáltjainak összegére.

M3.8. **4.** Szimmetrikus mátrixok összege szimmetrikus.

M3.9. **5.** Háromszögmátrixok összege háromszögmátrix.

M3.10. **6.** Igazak a követlező azonosságok: (A, B, 0 mátrixok)

0 + A = A

(A - B) + B = A.

M3.11. **7.** Az összegzés és a különségképzés értelmezhető akárhány azonos típusú mátrixra.

M3.12. **Mátrix szorzása számmal.** Értelmezhetjük egy A mátrix szorzatát k skalár (k valós szám; $k \in \mathbb{R}$) számmal, ez a mátrix minden elemének az adott skalárral történő szorzását jelenti.

$$k \cdot \mathbf{A} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1m} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2m} \\ \dots & \dots & \lambda \cdot a_{ik} & \dots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \lambda \cdot a_{n2} & \dots & \lambda \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M3.12. 1.Példa - mátrix szorzása számmal.

$$3 \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 & 3 \cdot 10 & 3 \cdot 11 & 3 \cdot 12 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 27 & 30 & 33 & 36 \end{bmatrix}$$

Igazak a következo **azonosságok**.

$$(k_1, k_2, k \in \mathbb{R}):$$
$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$$
$$(k_1 k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A})$$
$$(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$
$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$
$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

M3.13. **Négyzetes mátrix felbontása.** Minden valós számokból álló A négyzetes mátrix felbontható egy S szimmetrikus és egy T antiszimmetrikus mátrix összegére:

A = S + T.

A felbontás többféle típusú mátrix (pld. transzponált mátrix) felhasználásával történik.

M3.13. 1.Példa - négyzetes mátrix felbontása.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{S} + \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -4 & 1,5 & 5,5 \\ 1,5 & -1 & -2 \\ 5,5 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & -2,5 \\ -0,5 & 0 & 4 \\ 2,5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

M3.15. **Mátrixok lineáris kombinációja.** Adott A_1, A_2, ..., A_n azonos típusú mátrixok a k_1, k_2, ..., k_n valós számokkal rendre megszorozva lineáris kombinációt alkotnak: $k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_nA_n = L$.

M3.18. **Mátrixok szorzása.** Két mátrix AB szorzata akkor értelmezett, ha az A mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a B mátrixnak. Lényeges tehát a mátrixok sorrendje a szorzás esetén (az A mátrix a szorzat bal oldali tényezője, a B mátrix a szorzat jobb oldali tényezője).

M3.19. Azokat a mátrixokat, amelyekre teljesül az oszlop-sor egyenlőség (A(n;m)B(m;p)) **konformábilis** mátrixoknak nevezzük az adott sorrendben. Felcserélve a mátrixokat, a B(m;p) A(n;m) mátrixok akkor konformábilisak ebben a sorrendben, ha teljesül a p = n egyenlőség.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M3.2($C_{(n,p)} = [c_{ik}]$ z $A_{(n,m)} = [a_{ik}]$ mátrix nxm tí c_{ik} ú, a $B_{(m,p)} = [b_{ik}]$ mátrix mxp típusú. A szorzás eredménye olyan nxp típusú mátrix, amelynek elemei a következő összefüggés alapján számíthatók.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{mk}$$

Tehát a C szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elemét az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix k-adik oszlopának kompozícióját képezzük.

M3.20. 1.Példa - mátrixok szorzása.

M3.xx. 1.Példa - Mátrixok szorzása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tulajdonságok, megjegyzések.

M3.21. **1.** A mátrixszorzás nem kommutatív $AB \neq BA$

M3.22. **2.** Értelmezhető a bal oldali és jobb oldali szorzás.

M3.23. **3.** A mátrixszorzás nem asszociatív $A(BC) \neq (AB)C$...

M3.24. **4.** ... de teljsülnek a disztributivitás törvényei A(B + C) = AB + AC; (B + C)A = BA + CA.

M3.25. **5.** Két mátrix szorzatának kiszámítását áttekinthetőbbé teszi a Falk-módszer, az eredmények ellenőrzését pedig az oszlopösszeg-, vagy sorösszeg-próba segíti.

M3.26. **6.** Az A és B mátrixok akkor szorozhatók össze mindkét sorrendben, ha az A mátrix sorainak száma megegyezik a B mátrix oszlopainak számával, valamint az A oszlopainak száma megegyezik B sorainak számával.

M3.27. **7.** A diagonálmátrixok szorzása kommutatív.

M3.28. **8.** Az egységmátrixszal végzett szorzás (akár balról, akár jobbról) a másik mátrixot változatlanul hagyja. EA = AE = A.

M3.28. Példa - szorzás egységmátrixal.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot2+0\cdot3&1\cdot2+0\cdot5+0\cdot8&1\cdot3+0\cdot6+0\cdot9\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot2+0\cdot3&1\cdot2+0\cdot5+0\cdot8&1\cdot3+0\cdot6+0\cdot9\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

M3.29. **9.** A zérusmátrixszal való szorzás (akár balról, akár jobbról) zárusmátrixot eredményez 0A = A0 = 0.

M3.29. Példa - szorzás zérusmátrixal.

$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\\0&2\end{bmatrix}$$

M3.29. **Zérusosztó.** A „hagyományos” számításoktól eltérő módon, zérusmátrixot kaphatunk egy szorzás eredményeként akkor is, ha a két mátrix egyike sem zérusmátrix. Amennyiben egy A ≠ 0 mátrixhoz található olyan B ≠ 0 mátrix, hogy AB = 0, úgy A-t **bal oldali zérusosztó**nak nevezzük. Amennyiben egy B ≠ 0 mátrixhoz található olyan A ≠ 0 mátrix, hogy AB = 0, úgy B-t **jobb oldali zérusosztó**nak nevezzük. Amennyiben A bal oldali-, B jobb oldali zérusosztó az AB szorzatban, akkor A-t és B-t **zérusosztópár**nak nevezzük.

M3.29. Példa - zérusosztó.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix};\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M3.30. **Skaláris szorzat, diadikus szorzat.** Konformábilis oszlop-, vagy sor-mátrixokat összeszorozva eredményül egyetlen számot, vagy egy négyzetes mátrixot kapunk. Legyenek az a és b mátrixok a következők.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ekkor az $a^*b = b^*a$ szorzat.

$$\mathbf{a}^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i =$$

$$\mathbf{b}^*\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & \dots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} b_ka_k$$

M3.31.

Ezt a szorzatot **skalár szorzat**nak nevezzük.

Az $ab^*; ba^*$ szorzatok.

$$\mathbf{ab}^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & \dots & b_n & = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_2 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & a_ib_k & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ba}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \dots & a_n & = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & b_1a_n \\ b_2a_2 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n \\ \dots & \dots & b_ia_k & \dots \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n \end{bmatrix}$$

M3.32.

Ezt a szorzatot **diadikus szorzat**nak (diád) nevezzük.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenőrző teszt)

7.4. 7.4. További speciális mátrix-fogalmak és -tulajdonságok (M4)

A mátrixok elmélethez szorosan kapcsolódik a determináns fogalma. Az itt felsorolt összefüggések csak egy kis darabot mutatnak be ezekből az ismeretekből.

M4.1. **Négyzetes mátrix determinánsa.** Egy A négyzetes mátrix determinánsán az elemeiből képzett determinánst értjük. A determináns a négyzetes mátrix elemeiből, rögzített szabályok alapján képzett számértéket jelöl. Jelölés: |A|, vagy detA.

M4.2. **Másodrendű determináns** esetén:

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

M4.3. **Harmadrendű determináns** esetén (A i j aldeterminánsokat jelöl):

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{13}$$

M4.4. **n-edrendű determináns** esetén (A_{ij} aldeterminánsokat jelöl):

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{23} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}$$

M4.4. Példa - négyzetes mátrix determinánsa.

$$det\mathbf{A} = det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$det\mathbf{B} = det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot () - 2 \cdot () + 3 \cdot () =$$

M4.5. **Reguláris, szinguláris mátrixok.** Amennyiben egy A mátrixhoz tartozó determináns értékére: detA $\neq$ 0, akkor a mátrix **reguláris** (nem szinguláris). Amennyiben detA = 0, úgy a mátrix **szinguláris.**

M4.6. **Mátrix rangja.** Minden nem zérus mátrix esetén értelmezhető a rang fogalma: az A mátrix rangja $\rho(A)$ = r, ha r-edrendű kvadratikus minormátrixai között van legalább egy reguláris (det A $\neq$ 0), és minden r + 1-edrendű (és ennél magasabb rendu) minormátrixa szinguláris (det A = 0).

M4.7. **Négyzetes mátrix adjungáltja.** Egy négyzetes A mátrix adjungált mátrixa (adjungáltja) a következő mátrix:

$$adj\mathbf{A} = adj\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Itt A_{ij} az A mátrix determinánsának a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa.

M4.8. **Négyzetes mátrix inverz mátrixa.** Egy A négyzetes mátrix inverz (reciprok) mátrixa az A^{-1} mátrix, amelyre $AA^{-1} = E$ és $A^{-1}A = E$.

Feltétel: $|A| \neq 0$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

M4.9. **Mátrix nyoma, Spur.** Egy A mátrix nyoma a főátlóban álló elemek összege. $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Önellenörző teszt)

Néhány forrás mátrixok gyakorlati alkalmazására:

1. Tukora Balázs: Robotok irányítása. PTE, Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Kar.

2. Eric Hiob: Robotics: Using Transformation matrixes to change from one coordinate system to another in robotics. - Robotok irányítása témakör.

(Ellenőrző teszt)

8. 8. Számsorozatok és számsorok (S)

Ebben a modulban a számsorozatok és számsorok kerülnek előtérbe. A modul inkább ismertető jellegű. Gyakorlati ismereteket talál a kamatszámítással foglalkozó részben, ahol a banki számítások alapjaiba tekinthet bele.A modulrészek tanulmányozása és megértése után léphet a következő fejezetre.

Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban: I.

- Lajkó Károly: Analízis I. Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, 2002

Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

8.1. 8.1. Számsorozatok fogalma (S1)

S1.1. **Számsorozat**ot úgy konstruálhatunk, hogy hogy minden természetes számhoz egy-egy számot rendelünk. A hozzárendelés a természetes számokat követve növekvő sorrendben történik. A hozzárendelt számokat a sorozat tagjainak nevezzük, és az a_1; a_2; ... ; a_n; ... jelekkel jelöljük. A jelölésben az index mutatja meg, hogy a sorozat sorrendben melyik eleméről van szó: a_i a sorozat i. elemét jelöli.

Megjegyzések.

S1.2. **1.** A számsorozat lényegében a természetes számok halmazán értelmezett függvényként is felfogható.

S1.3. **2.** A számsorozatok jelölésére használni fogjuk az a(1); a(2); ... ; a(n) jelölést is.

Sorozat megadása történhet:

S1.4. **1. Általános tag** megadásával. Ez egy olyan formula negadását jelenti, amelyből az n szám megadása esetén a sorozat n-edik an tagja meghatározható.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S1.4. Példa - általános taggal adott sorozat.

a(n) = 2n - 1

n = 3 esetén a(3) = 2 * 3 - 1 = 5, tehát a sorozat 3. tagja 5.

n = 9 esetén a(9) = 2 * 9 - 1 = 17, tehát a sorozat 9. tagja 17.

S1.5. **2. Rekurziós összefüggés** leírásával. A rekurziós összefüggés előírja, hogy a sorozat bármely tagja az előző tagok ismeretében hogyan határozható meg.

S1.5. Példa - rekurziós összefüggéssel adott sorozat.

$a_1 = 8$, $a_2 = 12$, $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.
A sorozat 3. tagja: $a_3 = a_{2+1} = \frac{a_2 + a_{2-1}}{2} = \frac{a_2 + a_1}{2} = \frac{12+8}{2} = 10$.
A sorozat 4. tagja: $a_4 = a_{3+1} = \frac{a_3 + a_{3-1}}{2} = \frac{a_3 + a_2}{2} = \frac{10+12}{2} = 11$.

S1.6. **3. Utasítás**sal. Ekkor szavakkal írjuk le, hogy a sorozat n-edik tagja hogyan határozható meg.

S1.6. Példa - utasítással adott sorozat.

a(n) legyen az n. páratlan szám. Így a(1) = 1; a(2) = 3; a(3) = 5; a(4) = 7; ... (vagy általános taggal megadva: a(n) = 2 * n - 1).

S1.7. A sorozatok témaköre a középiskolás matematika-oktatás része. Ismétlésképpen néhány fogalom és érdekes feladat szerepel a következő bekezdésekben.

S1.8. **1.** Nevezetes sorozatként kell említenünk a **számtani sorozat**okat. Egy számsorozatot akkor nevezünk számtani sorozatnak, amennyiben van olyan *a* és *d* szám, melyre igaz, hogy a sorozat első eleme az a szám ($a_1 = a$), és a sorozat n + 1. eleme felírható az n. elem és a d szám (d neve differencia, különbség) segítségével a következő módon: $a_{n+1} = a_n + d$.

S1.9. A fenti összefüggés könnyen átalakítható az $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ alakba.

S1.10. Szintén nem nehéz belátni, hogy egy számtani sorozat első n tagjának s n összege: $s_n = s(n) = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$ zárt formában írható fel. Mindezen öszefüggésekre számos feladat épül. Ezek közül kettő az ismeretek felidézésére.

S1.10. 1.Példa - az első n pozitív páratlan szám összege.

Számítsuk ki az első n pozitív páratlan szám összegét.

Megoldás: $a_1 = a$, $d = 2$, így az s_n összegképletbe (S1.10.) helyettesítve:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$s_n = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = \ldots = n^2$$

S1.10. 2.Példa - kétjegyű, háromal osztható számok.

Számítsuk ki a kétjegyű, hárommal osztható pozitív számok összegét.

Megoldás: $a_1 = a$, $d = 3$. Nem ismerjük az S1.9. második összefüggésében n értékét. Viszont azt tudjuk, hogy az utolsó kétjegyű, hárommal osztható szám a 99, így 99 = 12 + (n - 1) 3 összefüggésből: n = 30. Behelyettesítve $s_n = \frac{2 \cdot 12 + (30-1) \cdot 3}{2} \cdot 30 = \ldots = 1665$.

S1.11. **2.** Egy másik nevezetes sorozat a **mértani sorozat**. Egy (a_n) számsorozatot akkor nevezünk mértani sorozatnak, ha van olyan *a* (a sorozat első eleme) és *q* (a sorozat kvóciense, hányadosa) szám, amelyre: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

S1.12. A fenti összefüggés könnyen átalakítható az $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 q^n$. Vagy más alakban: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

S1.13. A mértani sorzat első n tagjának összege szintén megadható zárt formában. $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; (q \neq 1)$

S1.12. Példa - mértani sorozat.

Egy mértani sorozatban $a_5 = 96$, $a_6 = 192$. $a_1 = ?$, $q = ?$, $s_6 = ?$
Megoldás: S1.11. és S1.12. alapján

$$q = \frac{a_6}{a_5} = \frac{192}{96} = 2. \quad a_6 = a_1 q^5 = 192 = a_1 \cdot 2^5 = a_1 \cdot 32 \rightarrow a_1 = \frac{192}{32} = 6.$$

A sorozat tagjai:

$$a_1 = 6; \quad a_2 = 6 \cdot 2^1 = 12; \quad a_3 = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24; \quad a_4 = 6 \cdot 2^3 = 6 \cdot 8 = 48;$$
$$a_5 = 6 \cdot 2^4 = 6 \cdot 16 = 96; \quad a_6 = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192; \quad \ldots$$

Az első hat tag összege (S1.12.):

$$s_6 = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 6 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 6 \cdot \frac{64 - 1}{1} = 6 \cdot 63 = 378.$$

S1.14. 3. Nagyon fontos alkalmazási területe a sorozatoknak a **kamatszámítás**, banki törlesztőrészletek meghatározása. Ennek bővebb kifejtése az alklamazási példák között szerepel.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

8.2. 8.2. Számsorozatok tulajdonságai (S2)

S2.1. **Monotonitás.** Egy sorozat szigorúan monoton növekedő, ha bármely tagja az előzőnél nagyobb. Jelölés: $a_{n+1} > a_n, (\forall n \in \mathbb{N}$ esetén$)$. Egy sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha bármely tagja az előzőnél kisebb. Jelölés: $a_{n+1} < a_n, (\forall n \in \mathbb{N}$ esetén$)$.

S2.2. Amennyiben az egyenlőséget is megengedjük, úgy a sorozat monton növekvő: $a_{n+1} \geq a_n, (\forall n \in \mathbb{N}$ esetén$)$, illetve monoton csökkenő: $a_{n+1} \leq a_n, (\forall n \in \mathbb{N}$ esetén$)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S2.1. Példa - monoton sorozatok.

Tekintsük az $a_n = 1+n$ sorozatot. Ennek tagjai rendre: $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; ... . Ez a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Legyen a $b_n = 1+\frac{1}{n}$ sorozat tagjai rendre: $b_1 = 2$; $b_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$; $b_3 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$; ... . Ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

S2.3. **Korlátosság.** Egy sorozat felülről korlátos, amennyiben $\exists M > 0$ szám (felső korlát), hogy a sorozat bármely tagja kisebb, mint az M szám.

S2.4. Egy sorozat alulról korlátos, amennyiben $\exists M > 0$ szám (alsó korlát), hogy a sorozat bármely tagja nagyobb, mint az M szám.

S2.5. Egy sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

S2.5. Példa - korlátos sorozatok.

Tekintsük azt a sorozatot, amelynek elmeit az $a_n = 1+(-1)^n$ összefüggés határozza meg.

$a_1 = 1+(-1)^1 = 0$; $a_2 = 1+(-1)^2 = 2$; $a_3 = 1+(-1)^3 = 0$; ... . Ez a sorozat alulról és felülről is korlátos.

S2.6. Megjegyzések.

S2.6. 1. A **korlátosság** értelmezhető úgy is, hogy azt kötjük ki, hogy $\exists M > 0$ szám, amelyre igaz, hogy a sorozat bármely tagjának abszolút értéke kiesebb, mint az M szám. Jelölés: $\forall n; |a_n| < M$. Megkülönböztetésül, ezt a korlátosságot abszolút korlátosságnak is szokás nevezni.

S2.7. **Torlódási pont.** Egy sorozat torlódási pontjának nevezzük azt a számot, amelyre igaz, hogy tetszőleges kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van.

S2.8. **Megjegyzések.**

S2.8. **1.** Egy sorozatnak lehet egy, vagy több torládási pontja is. Olyan sorozatok is vannak, amelyeknek nincs torlódási pontjuk.

S2.7. 1.Példa - torlódási pont.

A $\sqrt{2}$ irracionális szám tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos. Képezzük olyan módon sorozatot, hogy a sorozat minden következő tagja egyel több jegyet tartalmaz a végtelen nem szakaszos tizedes törtből: a_1 = 1,4; a_2 = 1, 41; ... A sorozat egyetlen torlódási pontja éppen $\sqrt{2}$.

S2.7. 2.Példa - torlódási pont.

Az $a_n = n^2$ sorozatnak nincs torlódási pontja a végesnek értékelhető tartományban.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S2.9. **Konvergencia és határérték.** Egy sorozat konvergens, ha korlátos és csak egyetlen torlódási pontja van. Ebben az esetben a sorozat torlódási pontját a sorozat határértékének nevezzük.

Megjegyzések.

S2.10. A konvergencia egyik pontosabb definíciója: egy sorozat konvergens, és az A véges határértékhez konvergál, ha $\forall \varepsilon > 0$ tetszőleges kicsi pozitv számhoz $\exists N$ szám (N ε"-tól függ: $N(\varepsilon)$), hogy n > N esetén $|A - a_n| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

S2.11. Amennyiben $n \to \infty$ esetén $a_n \to \infty$, akkor a sorozat határértéke $+\infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

S2.12. Amennyiben $n \to \infty$ esetén $a_n \to -\infty$, akkor a sorozat határértéke $-\infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

S2.13. **Divergencia.** Egy sorozat divergens, ha vem konvergens, vagy pontosabban:

(a) ha több torlódási pontja is van,

(b) nincs torlódási pontja,

(c) egy torlódási pontja van, de nem korlátos.

ÖSSZEFÜGGÉSEK HATÁRÉRTÉK KISZÁMÍTÁSÁRA.

S2.14. **1.** Racionális törtkifejezés alakú sorozat határértéke:

(a) a számláló és a nevező fokszámának meghatározása,

(b) osztjuk a számlálót és a nevezőt a kisebb fokszámú taggal, ezáltal határozzuk meg, hogy mely tagok hanyagolahtók el,

(c) ha a számláló magasabb fokú, mint a nevező, akkor a sorozat divergens,

(d) ha a két fokszám megegyezik, akkor a sorozat konvergens és a határértéke a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosa,

(e) ha a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, akkor a sorozat konvergens, és határértéke nulla.

S2.15. **2.** ha A konstans, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$.

S2.16. **3.** ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;

$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

ha $B \neq 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k = \left(\frac{A}{B}\right)^k;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt[k]{\frac{A}{B}}.$$

S2.9. 1-3. Példa - sorozatok konvergenciája.

S2.9. 1.Példa - Sorozatok konvergenciája:

$$a_n = \frac{3n-2}{n}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

A számláló elsőfokú, a nevező szintén elsőokú. Így $S2.14.$ alapján a sorozat konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) = .[S2.16.; S2.15.]. = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 3 - 0 = 3.$$

S2.9. 2.Példa - Sorozatok konvergenciája:

$$a_n = \frac{3n^5 + 2n^3 - 1}{-2n^6 - 4n^2 + 5n}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(\frac{3}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^6}\right)}{n^6\left(-2 - \frac{4}{n^4} + \frac{5}{n^5}\right)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

S2.9. 3.Példa - Sorozatok konvergenciája:

$$a_n = \frac{-2n^4 + 3n^3 + 4}{5n^3 + 2}; \quad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(-2n + 3 + \frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(5 + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{-\infty}{5} = -\infty.$$

Vagyis az a_n sorozat divergens.

Megjegyzés: = · […] · = a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

8.3. 8.3, Számsorok fogalma és tulajdonságai (S3)

S3.1. **Számsor definíciója.** Adjuk össze egy (a_n) sorozat tagjait. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ egy **végtelen sor**t alkot.

Az $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ összefüggéssel megadott sorozatot a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor részletösszeg-sorozatának nevezzük.

S3.2. **Sor konvergenciája.** Egy végtelen sor konvergens, ha a részeltösszeg-sorozata konvergens.

Jelölés: $\lim_{x\to\infty} s_n = s$

s a végtelen sor összege: $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S3.3. Sor divergenciája. Egy végtelen sor divergens, ha a részeltösszeg-sorozata divergens.

8.4. 8.4. Alkalmazás - Kamatszámítás (SK)

Alapfogalmak, feltételek:

S1-K.1. **1.** Tőke: olyan pénzmennyiség (betét, jele legyen: K), amelyet a tőkével rendelkező (betétes, a tőke tulakdonosa) egy pénzintézetre (bank) bíz azzal a céllal, hogy az hasznot érjen el (kamatoztassa, „forgassa", befektesse különböző vállalkozásokba) egy meghatározott időtartam alatt.

S1-K.2. **2.** A kiinduló időpontban (t_0, t = 0) a tőke nagysága: $K(t_0) = K(0) = K_0$.

S1-K.3. **3**. Kiinduló feltétel: Egy adott időpontban a tőkével rendelkező betétben lévő pénzmennyiség a kezdeti időponttól (t_0) számított időnek (betétben eltelt idő, t) szigorúan monoton növekvő függvénye. Jelölve: $t_0 < t_1$; $K(t_0) < K(t_1)$.

S1-K.4. **4.** A $k = K(t_1) - K(t_0)$ mennyiséget ($t_0 < t_1$) a (t_0, t_1) intervallumra eső **kamat**nak nevezzük. A pénzintézet a k kamatot fizeti a tőke használatáért (a meghatározott időszakra vonatkoztatva) a tőketulajdonosnak.

S1-K.5. **5. Kamatláb**: a tőkének a tőkéhez viszonyított aránya (az adott idoszakra vonatkoztatva):

$$i = \frac{k}{K_0} = \frac{K(t_1) - K(t_0)}{K(t_0)}$$

$$i\% = \frac{k}{K_0} \cdot 100\%$$

S1-K.6. **6. Kamattényező**: r = 1 + i

S1-K.7. **7.** A gyakorlatban teljes évek vonatkozásában az úgynevezett kamatos kamat összefüggését szokás számítani; egy éven belül pedig egyszerű kamatszámítást alkalmazhatunk.

S1-K.8. **8. Egyszerű kamatszámítás** esete: Feltesszük, hogy minden időszakban (év, hónap, stb.) ugyanaz a K_0 tőke kamatozik.

t_0-ban $K(t_0)$,

t_1-ben (egy időszak eltelte) $K(t_1) = K(t_0) + K(t_0) \cdot i$,

t_2-ben (két időszak eltelte) $K(t_2) = K(t_0) + K(t_0) \cdot i + K(t_0) \cdot i$,

...

t_n-ben (n=t időszak eltelte) $K(t_n) = K(t_0) + K(t_0) \cdot i + \ldots + K(t_0) \cdot i = K(t_0) + K(t_0) \cdot i \cdot n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n$.

S1-K.9. A fenti meghatározásokban négy adat szerepel: $K(t_0) = K(0) = K_0$ tőke; t a vizsgált időszak nagysága (évek, hónapok, stb. száma; t_0 a kezdeti idopont, t a záró időpont); i kamatláb; K_t a tőke kamattal felnövelt értéke. A négy mennyiség közül három ismeretében a negyedik mennyiség meghatározható:

S1-K.10. $K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t$,

S1-K.11. $K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}$,

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S1-K.12. $i = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t}$,

S1-K.13. $t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i}$.

S1-K.14. **9. Kamatos kamat**számítás esete: A kamatozási időszakok végén a kamatot hozzászámítják a tőkéhez („tőkésítés”); a következő számítás kiindulópontja a kamattal megnövelt tőke.

t_0 -ban $K(t_0)$,

t_1 -ben (egy időszak eltelte) $K(t_1) = K(t_0) + K(t_0) \cdot i$,

t_2 -ben (két időszak eltelte) ,

$$K(t_2) = [K(t_0) + K(t_0) \cdot i] + [K(t_0) + K(t_0) \cdot i] \cdot i = \ldots =$$
$$K(t_0) \cdot [1 + 2 \cdot i + i^2] = K(t_0) \cdot (1+i)^2$$

...

t_n -ben (n=t időszak eltelte) $K(t_n) = K(t_0) \cdot (1+i)^t$.

S1-K.15. $K_t = K_0 \cdot (1+i)^2$,

S1-K.16. $K_0 = \frac{K_t}{(1+t)^t}$,

S1-K.17. $i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$,

S1-K.18. $t = \frac{\lg \frac{K_t}{K_0}}{\lg(1+i)}$.

S1-K.8. Példa - egyszerű kamatozás.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S1-K.8. 1.Példa - Egyszerű kamatozás; K_t:
150 000 Ft tőke, havi 4% kamatozás mellett mennyit kamatozik $4,5$ hónap alatt?
Megoldás:
$K_0 = 150\,000$; $i = 4\% = 0,04$; $t = 4,5$;
$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = 150000 + 150000 \cdot 0,04 \cdot 4,5 = 177\,000$
A hozam: $177\,000 - 150\,000 = 27\,000$ Ft.

S1-K.8. 2.Példa - Egyszerű kamatozás; K_0:
Egy $4,5$ hónap múlva lejáró betét 177 000 Ft-ot fog érni. A havi kamatozás 4%.
Mekkora az alaptőke havi kamatozás esetén?
Megoldás:
$K_t = 177\,000$; $i = 4\% = 0,04$; $t = 4,5$;
$K_0 = \frac{K_t}{1+i\cdot t} = \frac{177000}{1+0,04\cdot 4,5} = \frac{177000}{1,18} = 150000$ Ft.

S1-K.8. 3.Példa - Egyszerű kamatozás; i:
Egy $4,5$ hónap múlva lejáró betét 177 000 Ft-ot fog érni. Az alaptőke 177 000 Ft.
Mekkora a havi kamatláb egyszerű kamatozás esetén?
Megoldás:
$K_0 = 150\,000$; $K_t = 177\,000$; $t = 4,5$;
$i = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t} = \frac{177000-150000}{150000\cdot 4,5} = \frac{27000}{675000} = 0,04 = 4\%$.

S1-K.8. 4.Példa - Egyszerű kamatozás; t:
Egy 4%-ot kamatozó betét 177 000 Ft-ot fog érni t hónap elteltével,
az alaptőke 177 000 Ft.
Mennyi idő múlva teljesülnek a leírt feltételek?
Megoldás:
$K_0 = 150\,000$; $K_t = 177\,000$; $i = 4\% = 0,04$;
$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{177000-150000}{15000\cdot 0,04} = \frac{27000}{6000} = 4,5$ hó.

S1-K14.Példa - kamatos kamat.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

S1-K.14. 1.Példa - Kamatos kamat; K_t:
Az alaptőke 800 000 Ft. Mennyi kamatot hoz az alaptőke évi 20%-os kamatláb mellett (kamatos kamat esetén), $t = 5$ év alatt?
Megoldás:
$K_0 = 800\,000$; $t = 5$ év ; $i = 20\% = 0,2$;
$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t = 800000(1+0,2)^5 = 800000 \cdot 2,48832 = 1990656$ Ft.
A kamathozam: $1\,990\,656 - 800\,000 = 1\,190\,656$ Ft.

S1-K.14. 2.Példa - Kamatos kamat; K_0:
Mennyi tőkét kell befektetnünk, hogy 5 év múlva, 20%-os kamatozással, 1 990 656 Ft-ot vehessünk fel?
Megoldás:
$K_t = 1\,990\,656$; $t = 5$ év ; $i = 20\% = 0,2$;
$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t} = \frac{1990656}{(1+0,2)^5} = \frac{1990656}{2,48832} = 800\,000$ Ft.

S1-K.14. 3.Példa - Kamatos kamat; i:
Mekkora évi kamatláb esetén lesz 5 év múlva a 800 000 alaptőke 1 990 656 Ft?
Megoldás:
$K_t = 1\,990\,656$; $K_0 = 800\,000$; $t = 5$ év
$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{1990656}{800000}} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2 = 20\%$.

S1-K.14. 4.Példa - Kamatos kamat; t:
Hány év múlva lesz a 800 000 alaptőke 1 990 656 Ft? A kamatláb 20%.
Megoldás:
$K_t = 1\,990\,656$; $K_0 = 800\,000$; $i = 0,2 = 20\%$.
$t = \frac{lg\frac{K_t}{K_0}}{lg(1+i)} = \frac{0,3959}{0,0792} = 5$ év.

---

9. 9. Függvények (F)

A fejezet célja a függvénytani (kalkulus) alapismeretek ismétlése és bővítése. Az F1-4. fejezetek a megszokott sorban tárgyalja ezeket a témaköröket. A gyakorlati munka a winplot programcsomag segítségével kerül megvalósításra. Ehhez segítséget nyújtanak az Interneten (YouTube: Winplot) elérhető bemutató filmek és a csatolt anyagok. Magyarul is elérhető például Kiss Márta három bemutatója, amelyek kiváló bevezetőként szolgálhatnak a program használatába. A fejezet ismereteinek elsajátítását ellenőrző feladat a következő fejezet része.

Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

- I. Dancs István, Magyarkúti Gyula, Medvegyev Péter, Puskás Csaba, Tallos Péter: Bevezetés a matematikai analízisbe. MEK

  II. Lajkó Károly: Analízis I. Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, 2002.

  III. Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára. Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem, Orvosi Informatikai Intézet, Szeged, 1996.

  Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

9.1. 9.1. A függvény fogalma (F1)

A matematika gyakorlati alkalmazásának egyik legszélesebb köre a függvényekhez kapcsolódik. A függvény fogalma két (vagy több) mennyiség kapcsolatát ragadja meg. A következőkben néhány alapvető fogalmat és módszert foglalunk össze.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F1.1. **Függvény fogalma** Legyen adottak a D és R nemüres halmazok. Készítsünk egy olyan hozzárendelést (leképezést), amely az $x \in D$ elemhez (független változó) egy $y \in R$ elemet (függő változó) rendel. A leképezés értelmezése során megengedett, hogy a különböző x elemekhez esetleg ugyanaz az y elem rendelődjön, de nem engedjük meg azt, hogy egy x-hez két (vagy több) y elemet rendeljünk.

A konstrukció **jelölés**ei (f magát a leképezést, a függvényt jelöli - sok jelölési mód használatos, ezek közül néhány van itt felsorolva):

$f: D \to R$

$y = f(x)$

$x \in D \mapsto y \in R$

$f: x \mapsto y$

$x \mapsto f(x)$

F1.1. 1.Példa - függvény fogalma.

Akkor, amikor sorozatokat értelmeztünk (S fejezet), már lényegében függvényekkel dolgoztunk.

A függvény D halmaza a természetes számok halmaza (sorozatban az elem sorszáma), az R halmaz pedig valamely más halmazzal egyezett.

$x \in \mathbb{N} = D \mapsto y \in \mathbb{N} = R; y = 2 \cdot x - 1$.

Sorozatoknál: $n \to a_n = 2n - 1$.

F1.1. 2.Példa - függvény fogalma.

Akkor, amikor egy mennyiség időbeli lefolyását vizsgáljuk, szintén függvényt értelmezünk (T az időpontok halmaza): $t \in T \mapsto y \in R; y = y(t)$.

Példa lehet a hőmérséklet napi változása, tőzsdei árfolyamok változása egy nap/hét/hónap, stb. során. Ebből a rövid felsorolásból is látszik, hogy a függvények alkalmazási köre igen tág.

F1.1. 3.Példa - függvény fogalma.

Matematikában sok esetben képlettel adunk meg függvényeket: $f: x \mapsto y(x) = x^2 + 2$.

(Lásd később - F1.5-7. pontok.)

F1.2. **További megjegyzések.**

1. A függvények **jelölés**ére latin kisbetűket alkalmazunk. Az f mellett leggyakrabban a g, h, stb. betűket használjuk.

2. A szakirodalomben sokféle jelölési rendszer találunk. Ezek hasonlók, kis eltérések mutatkoznak közöttük, ahogy a fentiekből is látható.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

3. A fenti definció az egyváltozós függvény fogalmát rögzíti. Ez egy egyértékű (egyértelmű) leképezést jelent. Ennek a fogalomalkotásnak a fejlesztésével, bővítésével juthatunk el más, általánosabb függvényfogalomig.

4. A függvényfogalom egy másik megközelítése az, amikor a (fenti értelemben használatos) D és R halmazok Descartes-féle $D \times R$ halmazát képezzük, és függvényként ennek az elempárhalmaznak egy részhalmazát vizsgáljuk.

F1.3. **Értelmezési tartomány, értékkészelet.** A függvények megadásánál szereplő D halmazt értelmezési tartománynak, az R halmazt pedig értékkészletnek nevezik. Szokás néha megadni a jelölésben azt a függvény, amellyel kapcsolatos az értelmezési tartomány és az értékkészlet: D_f ; R_f .

F1.4. **További megjegyzések.**

1. A matematikai vizsgálatok során az értelmezési tartományt és az értékkészletet általában a különböző számkörök ($\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$;...; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$), vagy azok részhalmazai alkotják. Ezeken kívül természetesen más halmazokon is értelmezhetők függvények. Első példáink a számhalmazok körében értelmezett függvényekkel foglalkoznak.

2. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet pontos megadása sokszor egyes elemek egy bővebb halmazból való kizárását jelenti. Ennek ismerete akkor válik fontossá, amikor bizonyos elemek, tartományok elvi (például nullával való osztás eshetősége), vagy gyakorlati okok (például a vizsgált esemény egy adott hőmérséklet felett már nem következik be, így nincs értelme a vizsgálatnak abban a hőmérsékleti tartományban) miatt nem szerepelhetnek a kérdéses halmazokban.

Függvények megadása.

F1.5. **1. Képlet, utasítás.**

F1.5. 1.Példa - függvény megadása képlettel, utasítással.

Rendeljük az x független változó értékeihez „x négyzete meg kettő” értéket. $y(x) = x^2 + 2$.

F1.6. 2. **Táblázat.**

F1.6. 1.Példa - függvény megadása táblázattal.

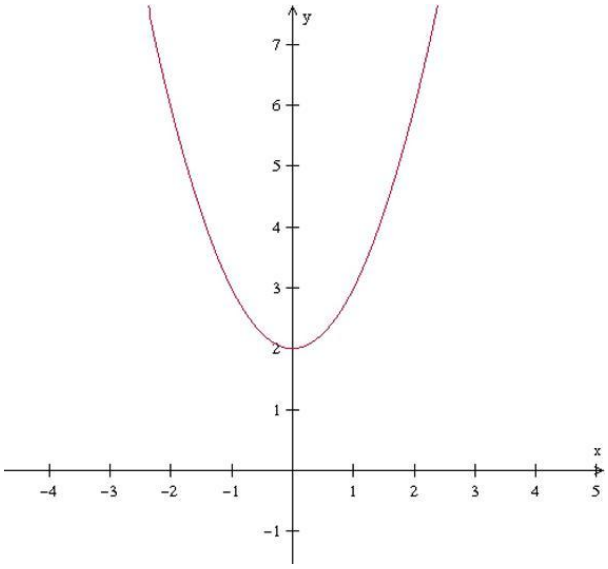
x	-1	0	1	2	3	4	5	...
y(x)	3	2	3	6	11	18	27	...

F1.7. 3. **Grafikon.**

F1.7. 1.Példa - függvény megadása grafikonnal.

Az 1. ábrán (F1.7.1.) az $y(x) = x^2 + 2$ függvény grafikonja látható.

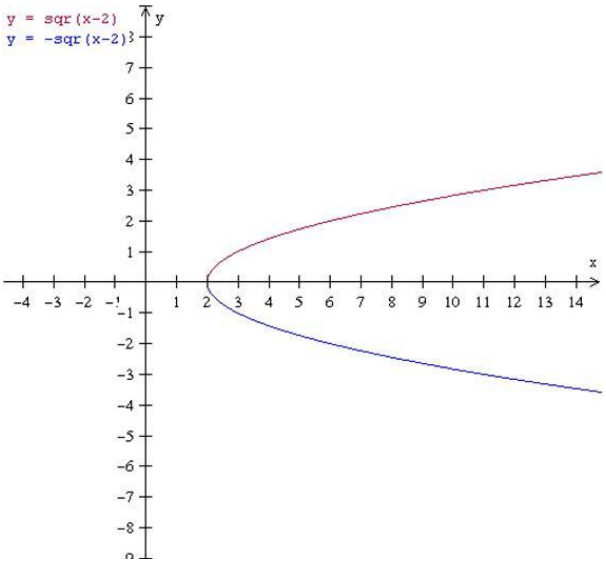
Created by XMLmind XSL-FO Converter.



1. ábra (F1.7.1.) - Függvény megadása grafikonnal - $y(x) = x^2 + 2$.

F1.7. 2.Példa - függvény megadása grafikonnal.

A 2. ábrán (F1.7.2.) az $y(x) = \pm\sqrt{x-2}$ függvény grafikonja látható (2 függvény!).



2. ábra (F1.7.2.) - Függvény és inverze - $y(x) = \pm\sqrt{x-2}$.

F1.8. **További megjegyzések.**

1. A grafikus ábrázolás legtöbbször derékszögű koordináta-rendszerben történik. A függvény összetartozó x és y(x) értékpárjait egy-egy pontként ábárzoljuk a következő módon. A vízszintes tengelyen (x tengely) a független változó x értékét; a függőleges tengelyen (y tengely) y(x) értékét keressük meg. Párhuzamosokat rajzolunk az y és x tengelyekkel a megkeresett pontokon keresztül. Ahol metszik egymást a tengelyekkel párhuzamos egyenesek, ott lesz az adott pontpár grafikonbeli képe. Ezt a többi értékpár esetén többször ismételve alakul ki a függvény grafikonja. Soszor elegendő néhány pont felrajzolása a függvény görbéjének viszonylag pontos ábrázolsához. Gyors és pontos függvényábrázolást számítógépes programokkal végezhetünk könnyen.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F1.9. **Függvények egynelősége.**

Az f és g függvényeket egyenlőnek tekintjük, ha értelmezési tartományuk ugyanaz a halmaz, és minden $x \in D_f = D_g$ elemhez két függvény ugyanazt az értéket rendeli: f(x) = g(x).

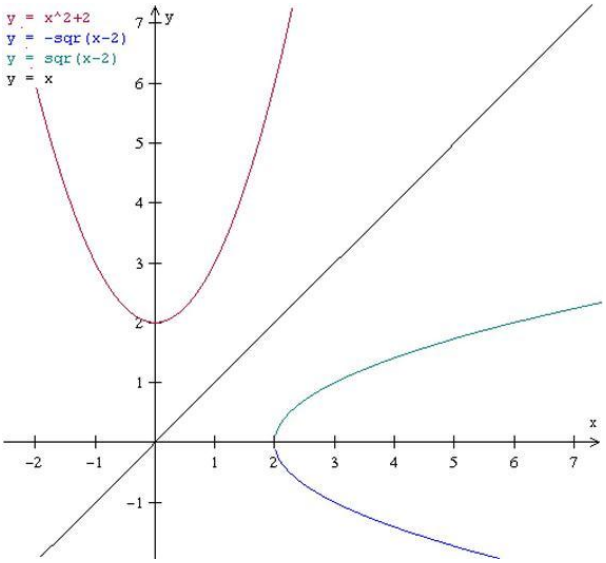
F1.10. **Inverz függvény.**

Egy $f: D \to R$ függvény invertálható, ha értelmezhető az $f^{-1}: R \to D$ leképezés, amely szintén függvény. Az invertálható függvényeket szokás kölcsönösen egyértelmű függvényeknek is nevezni.

F1.10. 1.Példa - inverz függvény.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvény inverze a következő függvény.

A lépések: x és y cseréje, majd y kifejezése (3. ábra - F1.10.1.): $y(x) = x^2 + 2 \to x = y^2 + 2 \to x - 2 = y^2 \to y(x) = \pm\sqrt{x-2}$.



3. ábra (F1.10.1.) - Függvény és inverze - y(x) = ± x − 2 .

9.2. 9.2. Függvények jellemző talajdonságai (F2)

F2.1. A függvény-tulajdonságokat két nagy csoportba oszthatjuk. Az első csoport olyan tulajdonságokat jelöl, amelyek a vizsgált függvények **pontbeli** viselkedését ragadják meg. A második csoport egy **intervallumon** mutatott jellemzőket írja le. Ezen belül az intervallum-tulajdonság egy speciális fajtája az, amely a teljes értelmezési tartományon érvényes jellemzőt definiál.

F2.2. **Helyettesítési érték.** Legyen adott az $f: x \mapsto y(x)$ függvény. Itt x jelöli a független változó érétkeit, y(x) pedig a független változóhoz rendelt függvényértékeket. Ezt úgy is szokás mondani, hogy y(x) az f függvény x helyen felvett értéke, helyettesítési értéke. A helyettesítési érték meghatározása az y(x) érték meghatározását jelenti a konkrét x érték esetében.

F2.2. Példa - függvény helyettesítési értéke.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvény x = 1 helyen felvett értéke $y(1) = 1^2 + 2 = 3$.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvény x = 2 helyen felvett értéke $y(2) = 2^2 + 2 = 6$.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvény x = 0 helyen felvett értéke $y(0) = 0^2 + 2 = 2$.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvény x = -1 helyen felvett értéke $y(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$.

F2.3. **Nullpont, zérushely.** Egy $f : x \mapsto y(x)$ függvény zérushelyei, nullhelyei az érelmezési tartomány mindazon x értékei, amelyre y(x) = 0.

F2.3. 1. Példa - függvény zérushelye.

Az $y(x) = x^2 - 2$ függvény zérushelye $x = \sqrt{2}$ és $x = -\sqrt{2}$.

Behelyettesítve: $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$ és $y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 2 = 0$.

F2.3. 2. Példa - függvény zérushelye.

Az $y(x) = x^2 + 2$ függvénynek nincs zérushelye, hiszen x^2 éréke mindig poztív.

Más okoskodás a definíció alapján: $x^2 + 2 = 0$ vizsgálandó, de átrendezéssel $x^2 = -2$, ami nem teljesülhet a valós számok körében.

F2.4. **Korlátosság.** Legyen $f : D \to R$. Az f függvény korlátos függvény, ha R korlátos halmaz, vagyis $\exists k_1, k_2$, hogy $\forall y \in R$ esetén $k_1 \leq y$ és $y \leq k_2$. Amennyiben csak k_1 létezik, úgy f alulról korlátos, ha csak k_2 létezik, úgy f felülről korlátos. Amennyiben egy függvény alulról és felülről is korlátos, akkor korlátos.

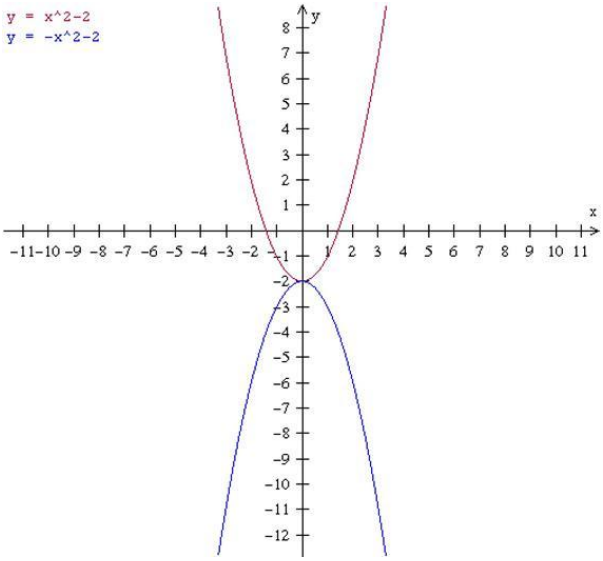
F1.1. 1. Példa - függvény korlátossága (F1.1.1. ábra).

Az $y(x) = x^2 - 2$ függvény alulról korlátos, az x = 0 helyen felvett $y(0) = 0^2 - 2 = -2$ érétknél nem vesz fel kisebb értéket. A definíció szerint $\exists k_1 = -2$, hogy $\forall y(x) \geq -2$.

F1.1. 2. Példa - függvény korlátossága (F1.1.1. ábra).

Az $y(x) = -x^2 - 2$ függvény felülről korlátos, az x = 0 helyen felvett $y(0) = 0^2 - 2 = -2$ érétknél nem vesz fel nagyobb értéket. A definíció szerint A definíció szerint $\exists k_2 = -2$, hogy $\forall y(x) \leq -2$.

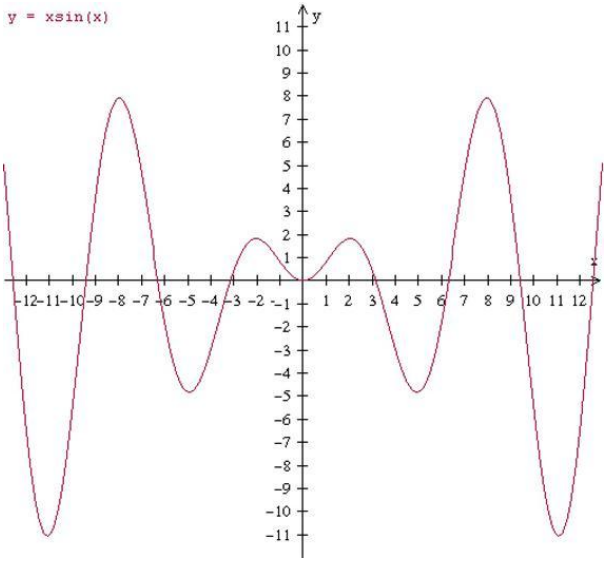
Created by XMLmind XSL-FO Converter.



F1.1.1. ábra - Korlátos függvények - $y(x) = x^2 - 2$ és $y(x) = -x^2 - 2$.

F1.1. 3.Példa - függvény korlátossága (F1.1.3. ábra).

Az y(x) = x sin(x) függvény nem korlátos.



F1.1.3. ábra - Nem korlátos függvény: y(x) = x sin(x).

F2.5. **Monotonitás.** Legyen $f: D \to R$. Az f függvény monoton növekvő az $[a;b] \subseteq D$ intervellum felett, ha $\forall x_1; x_2 \in [a; b]$ és $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. Amennyiben $f(x_1) < f(x_2)$, úgy f szigorúan monoton növekvő függvény.

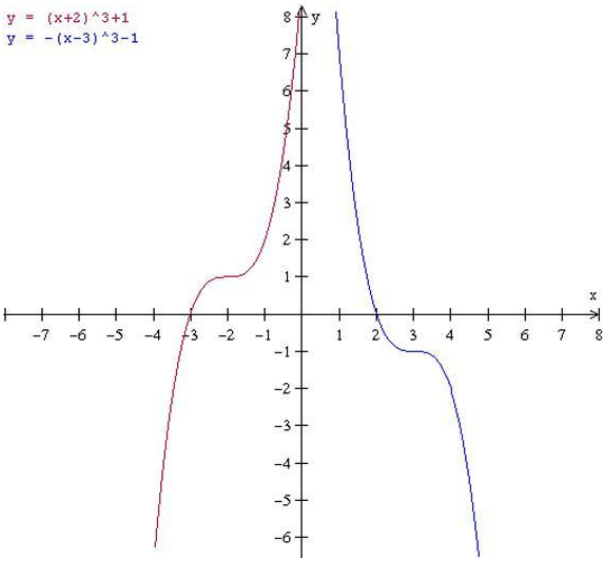
Amennyiben $\forall x_1; x_2 \in [a; b]$ és $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$, akkor f monoton csökkenő. Amennyiben $f(x_1) > f(x_2)$, úgy f szigorúan monoton csökkenő függvény.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F2.5. 1.Példa - függvény monotonítása. (F2.5.ábra).

Az $y(x) = (x + 2)^3 + 1$ szigorúan monoton növekvő függvény.

Az $y(x) = -(x - 2)^3 - 1$ szigorúan monoton csökkenő függvény.



F2.5.ábra - Monoton függvények: $y(x) = (x + 2)^3 + 1$ és $y(x) = -(x - 2)^3 - 1$.

F2.6. **Párosság.** Az $f: D \to R$ függvény páros, ha $\forall x \in D$ esetén f(x) = f(−x). Ez a tulajdonság a függvény görbéjének az y tengelyre való szimmetriáját jelenti. Az $f: D \to R$ függvény páratlan, ha $\forall x \in D$ esetén f(x) = −f(−x). Ez a tulajdonság a függvény görbéjének az origóra való középpontos szimmetriáját jelenti.

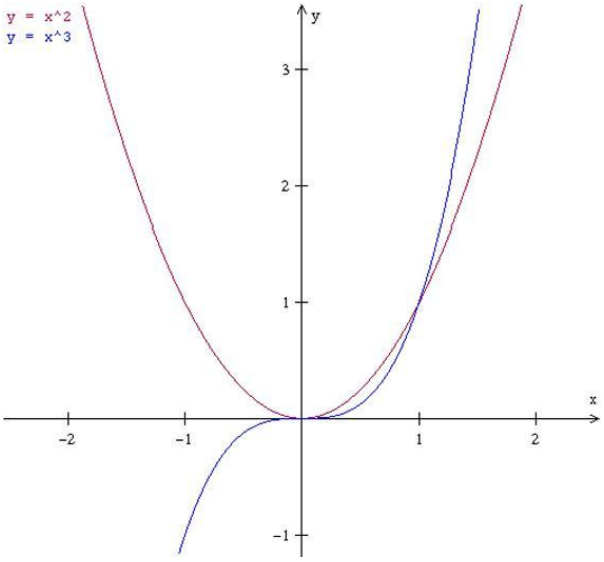
F2.6. 1. Példa - függvény párossága (F2.6. ábra).

Az $y(x) = x^2$ páros függvény: $x^2 = (-x)^2$; valamint a függvény görbéje szimmetrikus az y tengelyre.

F2.6. 2. Példa - függvény párossága (F2.6. ábra).

Az $y(x) = x^3$ páratlan függvény: $x^3 = -(-x)^3$; valamint a függvény görbéje szimmetrikus az origóra.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

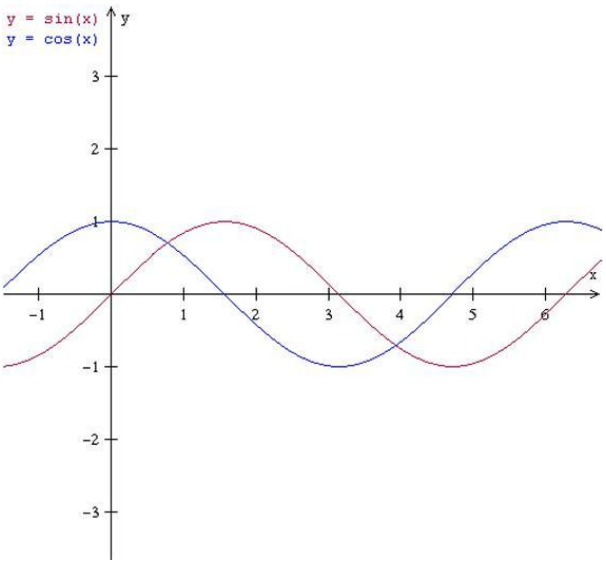


F2.6. ábra - Páros ($y(x) = x^2$) és páratlan ($y(x) = x^3$) függvények.

F2.7. **Periodikusság.** Az $f: D \rightarrow R$ függvény periodikus, ha $\exists p$ szám ($p \neq 0$), amelyre $\forall x \in D$ esetén f(x) = f(x + p). A legkesebb ilyen p szám a függvény periodusa.

F2.7. 1.Példa - függvény periodikussága (F2.7. ábra).

A y(x) = sin(x); y(x) = cos(x) függvények periodikusak. A periódus hossza $p = 2\pi$.



F2.7. ábra - Periodikus függvények: y(x) = sin(x) és y(x) = cos(x).

F2.8. **Konvexitás.** Az $f: D \rightarrow R$ függvény az [a; b] intervallum felett konvex (domború), ha $\forall x_1; x_2 \in [a; b]$ esetén $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az $f: D \to R$ függvény konkáv (homorú), ha $\forall x_1; x_2 \in [a; b]$ esetén $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Megjegyzések.

F2.9. **1.** Egy konvex függvény grafikonja az (a; f(a)) és (b; f(b)) pontokhoz tartozó húr alatt helyezkedik el.

F2.10. **2.** Egy konkáv függvény grafikonja az (a; f(a)) és (b; f(b)) pontokhoz tartozó húr felett helyezkedik el.

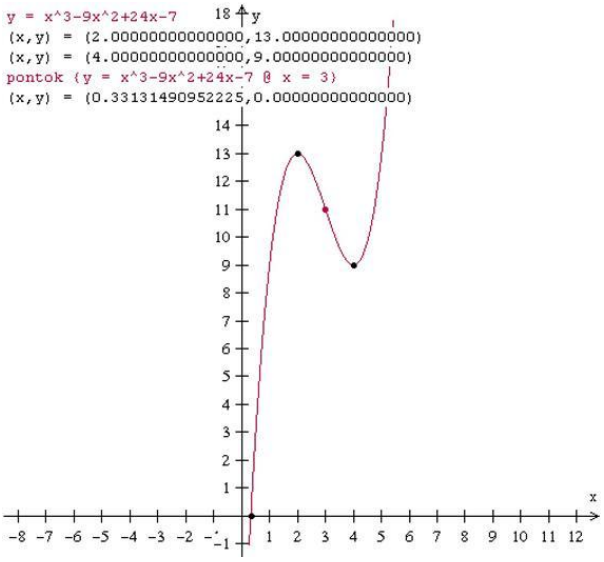
F2.11. **Inflexiós pont.** Az $f: D \to R$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen inflexiós pontja van, ha $\exists \varepsilon > 0$ szám, hogy az $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ intervallum felett f konvex, az $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ intervallum felett f konkáv; vagy az $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ intervallum felett f konkáv, az $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ intervallum felett f konvex.

F2.12. **Szélsőérték, minimum és maximum.** Az $f: D \to R$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen lokális maximuma van, ha $\exists \varepsilon > 0$ szám, hogy $\forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$. Amennyiben a maximum tulajdonság kiterjeszthető, vagyis $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$, úgy az x_0 helyen **globális** (abszolút) maximumról beszélünk.

F2.13. Az $f: D \to R$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen **lokális** minimuma van, ha $\exists \varepsilon > 0$ szám, hogy $\forall x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$. Amennyiben a maximum tulajdonság kiterjeszthető, vagyis $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$, úgy az x_0 helyen globális (abszolút) minimumról beszélünk.

F2.8-13. 1.Példa - függvény nevezetes pontjai (F2.8. ábra).

Az $y(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$ függvény inflexiós pontja a P(3; 11) pont. $(-\infty; 3)$ konkáv tartomány; $(3; +\infty)$ konvex tartomány. y(x) szélsőértékei - lokális maximum: R(2; 13) és lokális minimum: S(4; 9) y(x) zérushelye x = 0; 33 helyen.



F2.8. ábra. $y(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

F2.14. A gyakorlatban alapvető, hogy a kísérletek, megfigyelések során adódó függvénykapcsolatokat megvizsgáhassuk, elemezni tudjuk. Ezek során első lépésben kísérleti eredményeket ábrázoljuk (pontdiagram), majd egy közeltő (becslő) függvényt határozunk meg, amelyet tovább elemzünk, majd egy modell kialakításával értelmezünk.

1. A függvény **értelmezési tartomány**ának meghatározása. Vizsgáljuk meg, hogy hol értelemezett a függvény; mely x értékek esetén nincs értelmezve $f(x)$. F2.15.

2. Tengelymetszetek meghatározása - hol metszi a görbe az X (**zérushely**) és Y tengelyt: $f(x) = 0 \quad x = ?$; $f(0) = y \quad y = ?$. F2.16.

3. Folytonosság, korlátosság, szakadási hely (pólus) meghatározása. A függvény viselkedése ezen helyek környezetében. Viselkedés az értelmezési tartomány szélein; ez jelentheti az $x = +\infty$ és $y = -\infty$ helyeket. F2.17.

4. Lokális szélsőértékek (maximumok és minimumok) keresése. F2.18.

5. Inflexiós pontok (konvex és konkáv szakaszok határpontjai) meghatározása. F2.19.

6. Függvénygörbe vázlatos ábrázolása. F2.20.

7. Értékkészlet meghatározása. F2.21.

8. További pontok kiszámítása szükség szerint. F2.22.

9. Alkalmazás: helyettesítési érték, meredekség, görbe alatti terület, stb. számítása. F2.23.

A függvényvizsgálat egyes lépéseit a differenciál- és integrálszámítás alkalmazásával könnyebb elvégezni. Ezek a módszerek a következő fejezetekben szerepelnek.

(Winplot program letöltése)

(Winplot alapok: Függvények ábrázolása - Kiss Márta: Winplot alapok - YouTube.)

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

9.3. 9.3. Elemi függvények (F3)

Ebben a fejezetben olyan függvények tulajdonságait foglaljuk össze, amelyek a valós számok halmazát a valós számok halmazába képezik.

I. ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK.

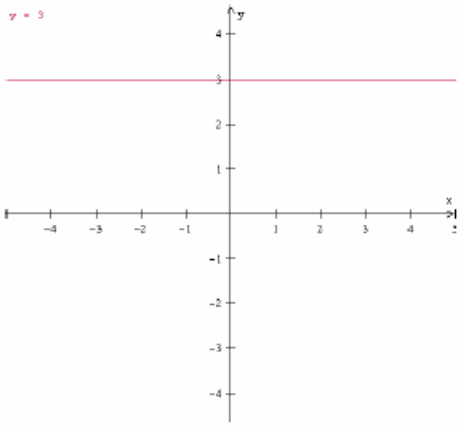
I.A. RACIONÁLIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.1. Konstans függvény. (1. ábra)

$$y(x) = a$$

Ez a függvény a független x változó nulladfokú függvénye ($y(x) = ax^0$). Görbéje az y tengelyt a $(0; a)$ pontban metszi, az x tengellyel párhuzamos egyenes.

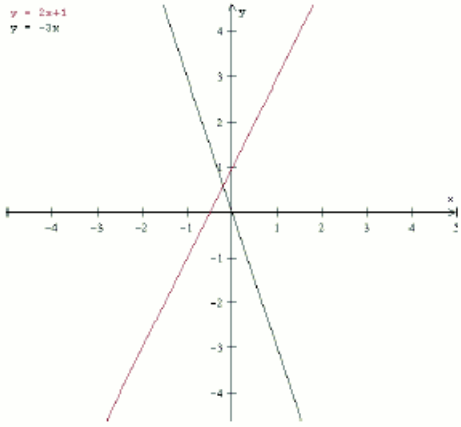


1. ábra. $y(x) = 3$.

F3.2. Elsőfokú függvény - Lineáris függvény. (2. ábra)

$$y(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

A függvény görbéje az $A(-b/a; 0)$ és $B(0; b)$ pontokon átmenő egyenes. $b = 0$ esetén az A és B pontok egybeesnek és az egyenes áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján.
A függvény egyetlen zérushelye az $x = -b/a$ pontban van.
$a > 0$ esetén a függvény monoton növekvő,
$a < 0$ esetén a függvény monotn csökkenő.
$b = 0$ és $a > 0$ esetén az egyenes arányosság összefüggéseit fejezi ki a függvény (a arányossági tényező).



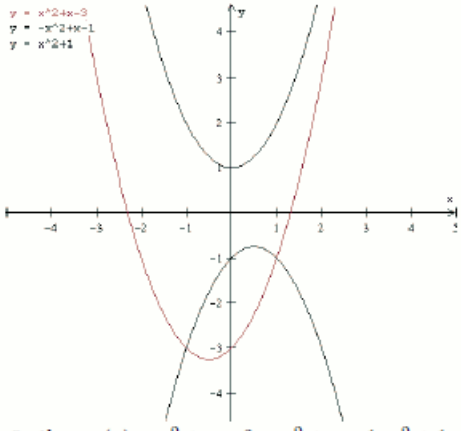
2. ábra. $y(x) = 2x + 1$; $y(x) = -3x$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.3. Másodfokú függvény. (3. ábra)

$$y(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

A függvény grafikonja parabola, amelynek szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel.
A parabola csúcsa a $C(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a})$ pontban van. A függvénynek legfeljebb két zérushelye van. Ezek sorban: $A_1(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; 0)$ és $A_2(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; 0)$ A függvény görbéje a $B(0; c)$ pontban metszi az y tengelyt.
$4ac - b^2 = 0$ esetén a parabola a $(\frac{-b}{2a}; 0)$ pontban érinti az x-tengelyt.
$4ac - b^2 > 0$ esetén a görbének nincs közös pontja az x-tengellyel.
$a > 0$ esetén a függvény minimumhelye; $a < 0$ esetén a függvény maximumhelye az $x_C = \frac{-b}{2a}$ pont.

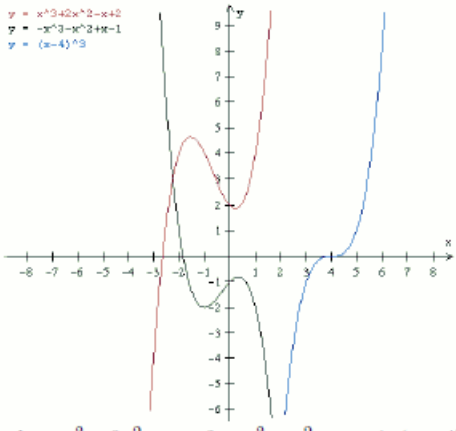


3. ábra. $y(x) = x^2 + x - 3$; $-x^2 + x - 1$; $x^2 + 1$.

F3.4. Harmadfokú függvény. (4. ábra)

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

A függvény görbéje többféle alakú lehet. Zérushelye 1, 2 vagy 3. Vagy nincs szélsőértékhelye, vagy kettő van (lokális minimum- és maximumhely). Egy inflexiós pontja van.
A görbe pontosabb vizsgálata a konkrét paraméterek segítségével végzhető el könnyebben.



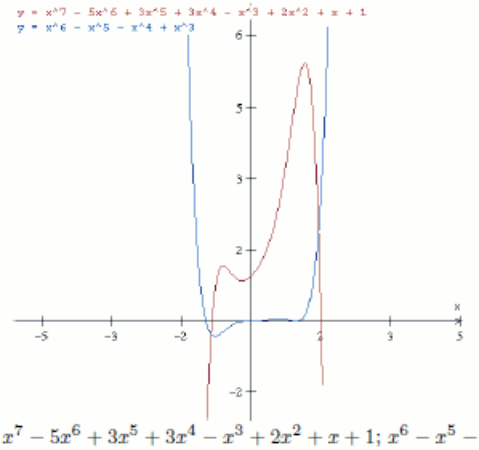
4. ábra. $x^3 + 2x^2 - x + 2$; $-x^3 - x^2 + x - 1$; $(x - 4)^3$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.5. n-edfokú racionális egészfüggvény. (5. ábra)

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$
$$a_n \neq 0;\ n \geq 0; n \in \mathbb{Z}$$

A függvény legfeljebb n számú pontban metszi az x-tengelyt, legfeljebb $n-2$ inflexiós pontja van. A függvénynek legfeljebb $n-1$ szélsőértékhelye van és amennyiben a szélsőrétékhelyek száma kettőnél több, akkor a maximum- és minimum-helyek váltakozva követik egymást.
Amennyiben n páratlan, akkor a görbe legalább egy pontban metszi az x-tengelyt. Ha $n \geq 3$, akkor a görbének legalább egy inflexiós pontja van. Ekkor a szélsőérétkhelyek száma mindig páros, az inflexiós pontok száma páratlan.
Amennyiben n páros és $n \geq 2$, akkor a függvénynek legalább egy szélsőértékhelye van. Ekkor a szélsőérétkhelyek száma mindig páratlan, az inflexiós pontok száma mindig páros.



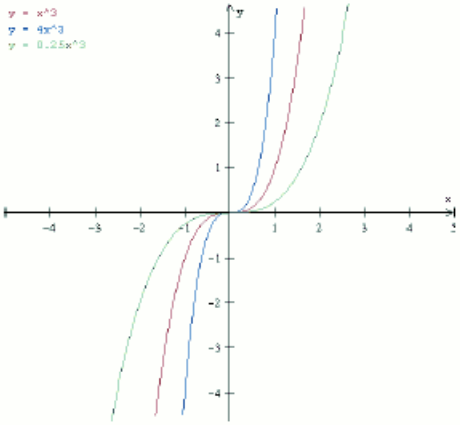
5. ábra. $x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$; $x^6 - x^5 - x^4 + x^3$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.6. Hatványfüggvények. (6. ábra)

$$y(x) = x^n \quad (n \geq 2;\ n \in \mathbb{Z})$$
$$y(x) = ax^n \quad (a \in \mathbb{R}; n \geq 2;\ n \in \mathbb{Z})$$

A függvény görbéje $(0;0)$ pontban érinti, vagy metszi az x-tengelyt. A görbe áthalad az $(1;1)$ ponton.
Ha n páros, akkor a függvénynek az $x = 0$ helyen minimuma van, a függvénygörbe szimmetrikus az y-tengelyre.
Ha n páratlan, akkor a $(0;0)$ pont inflexiós pont. Az $y(x) = ax^n$ függvény görbéje $a > 0$ esetén a-szoros nagyítással; $a < 0$ esetén $|a|$-szoros nagyítással és az x-tengelyre való tükrözéssel adódik.



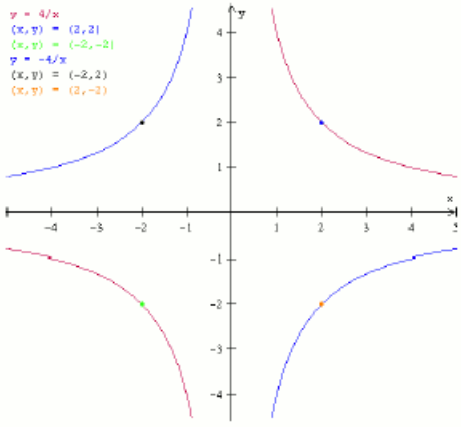
6. ábra. $y(x) = x^3$; $y(x) = 4x^3$; $y(x) = 0.25x^3$.

I.B. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK.

F3.7. Az $\frac{a}{x}$ törtfüggvény. (7. ábra)

$$y(x) = \frac{a}{x} \quad (a \neq 0)$$

A függvény görbéje egyenlőszárú hiperbola.
A görbe $a > 0$ esetén az első és harmadik síknegyedbe esik. A hiperbola csúcspontjai $A(\sqrt{a}; \sqrt{a})$ és $B(-\sqrt{a}; -\sqrt{a})$ pontok. Az összefüggés fordított arányosságot fejez ki.
$a < 0$ esetén a görbe a második és a negyedik negyedbe esik. A hiperbola csúcsai ekkor $A'(-\sqrt{|a|}; \sqrt{|a|})$ és $B'(\sqrt{|a|}; -\sqrt{|a|})$.



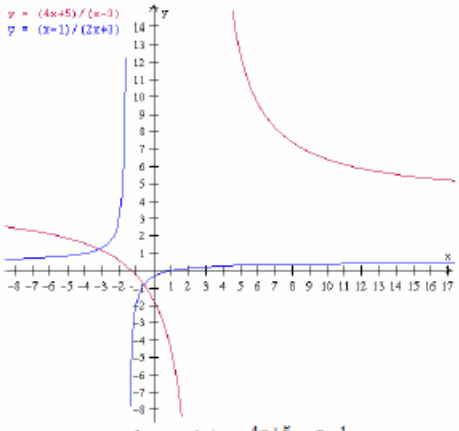
7. ábra. $y(x) = 4/x$; $y(x) = -4/x$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.8. Lineáris törtfüggvény. (8. ábra)

$$y(x) = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}; \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0; \; a_2 \neq 0$$

A függvény görbéje egyenlőszárú hiperbola.



8. ábra. $y(x) = \frac{4x+5}{x-3}$; $\frac{x-1}{2x+3}$.

F3.9. Nemlineáris racionális törtfüggvények. (9-13. ábra)

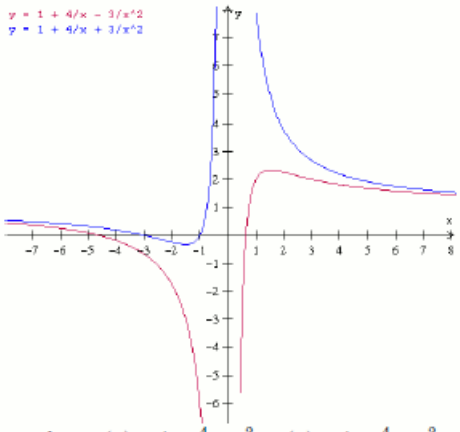
Néhány példa.

$$y(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \quad (b \neq 0, \; c \neq 0) \quad (9.abra)$$

$$y(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \; (a \neq 0) \quad (10.abra)$$

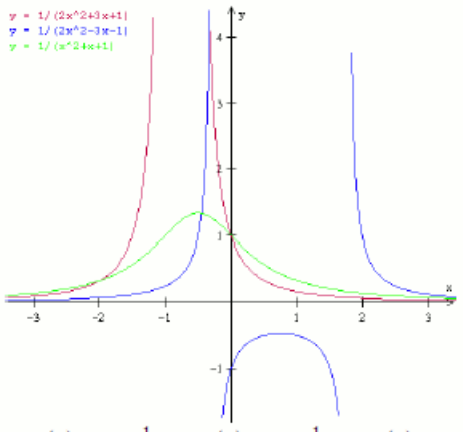
$$y(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + c} \; (ac \neq 0) \quad (11 - 12.abra)$$

$$y(x) = ax^{-n} \; (a \neq 0) \quad (13.abra)$$

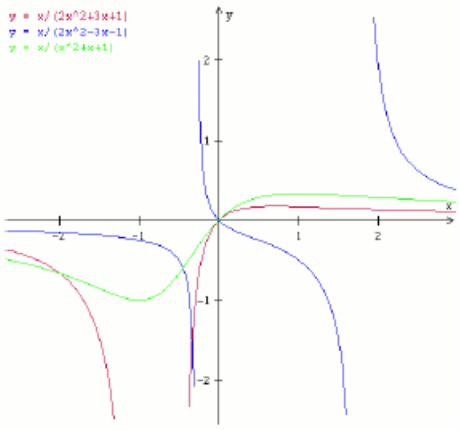


9. ábra. $y(x) = 1 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}$; $y(x) = 1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$.

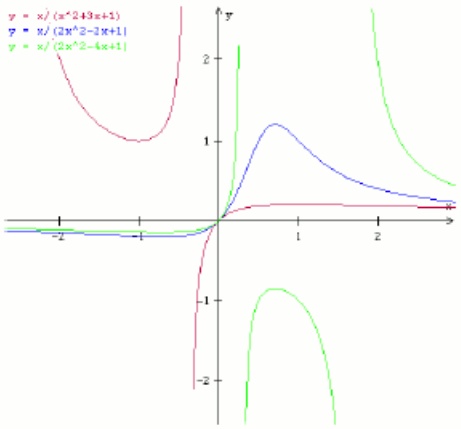
Created by XMLmind XSL-FO Converter.



10. ábra. $y(x) = \frac{1}{2x^2+3x+1}$; $y(x) = \frac{1}{2x^2-3x-1}$; $y(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

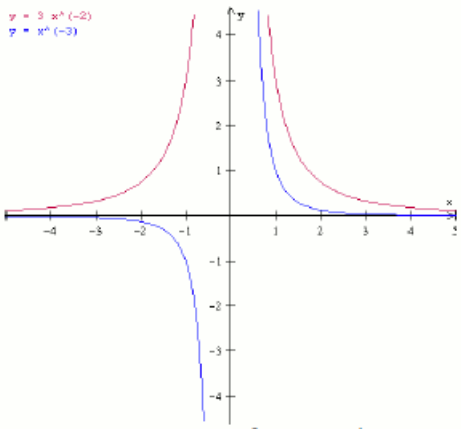


11. ábra. $y(x) = \frac{x}{2x^2+3x+1}$; $y(x) = \frac{x}{2x^2-3x-1}$; $y(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$.



12. ábra. $y(x) = \frac{x}{x^2+3x+1}$; $y(x) = \frac{x}{2x^2-2x+1}$; $y(x) = \frac{x}{2x^2-4x+1}$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

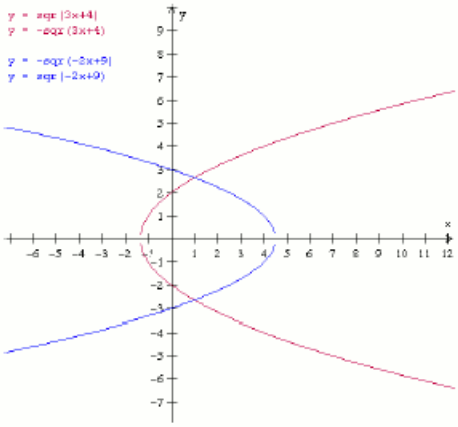


13. ábra. $y(x) = \frac{3}{x^2}$; $y(x) = \frac{1}{x^3}$.

I.C. ALGEBRAI IRRACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK.

F3.10. Lineáris függvény négyzetgyöke. (14. ábra)

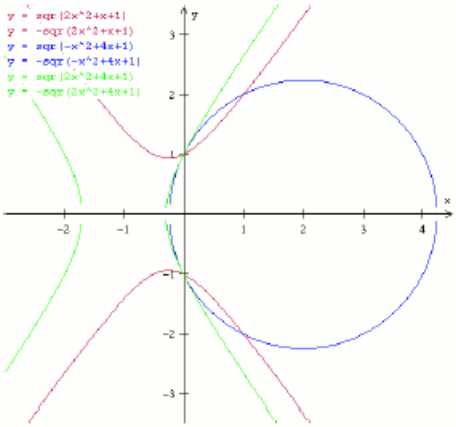
$$y(x) = \pm\sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$$



14. ábra. $y(x) = \sqrt{3x+4}$; $y(x) = -\sqrt{3x+4}$; $y(x) = -\sqrt{-2x+9}$; $y(x) = \sqrt{-2x+9}$.

F3.11. Másodfokú függvény négyzetgyöke. (15. ábra)

$$y(x) = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}\ (a \neq 0)$$



15. ábra. $y(x) = \pm\sqrt{2x^2+x+1}$; $y(x) = \pm\sqrt{-x^2+4x+1}$; $y(x) = \pm\sqrt{2x^2+4x+1}$.

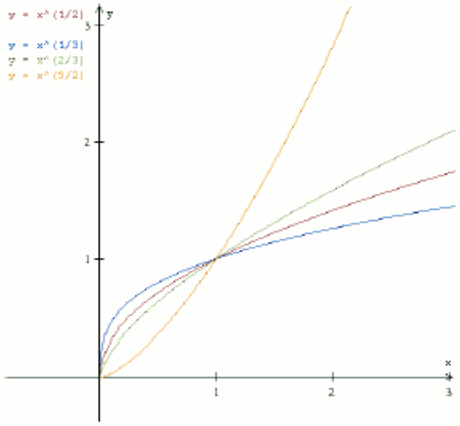
Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.12. Hatványfüggvény. (16. ábra)

$$y(x) = x^k \ (k = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N})$$

m és n relatív prímek; $n \neq \pm 1$.
$k > 0$ esetén.

Ha n páros, akkor az értelmezési tartomány: $[0; \infty)$; a görbe szimmetrikus az x-tengelyre.
Ha n páratlan akkor a függvény minden valós számra értelmezett.
$k < 0$ esetén.
Ha n páros, akkor az értelmezési tartomány: $(0; \infty)$.
Ha n páratlan akkor a függvény a 0 kivételével minden valós számra értelmezett.



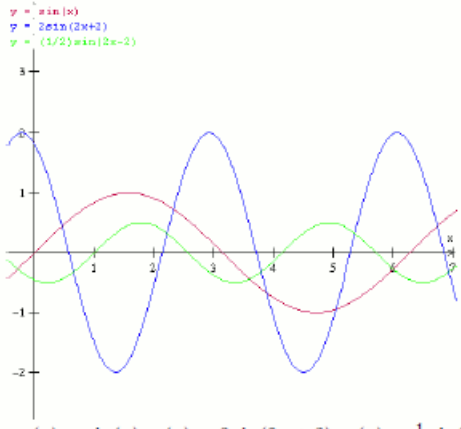
16. ábra. $y(x) = x^{1/2}$; $y(x) = x^{1/3}$; $y(x) = x^{2/3}$; $y(x) = x^{3/2}$.

II. TRANSZCENDENS FÜGGVÉNYEK.

F3.13. Trigonometrikus függvények.

Sinus (17. ábra): $A = \omega = 1$ és φ_0 esetén az alapfüggvényt kapjuk: $y(x) = \sin(x)$. Az alapfüggvény periodikus, periodusa: 2π.

$$y(x) = A\sin(\omega x + \varphi_0) \quad (A > 0; \omega > 0)$$

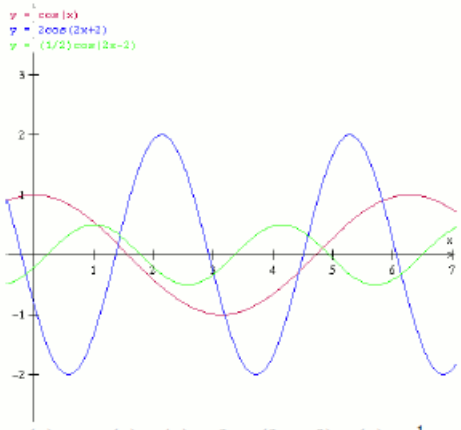


17. ábra. $y(x) = \sin(x)$; $y(x) = 2\sin(2x + 2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - 2)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Cosinus (18. ábra): $A = \omega = 1$ és φ_0 esetén az alapfüggvényt kapjuk: $y(x) = \cos(x)$. Az alapfüggvény periodikus, periodusa: 2π.

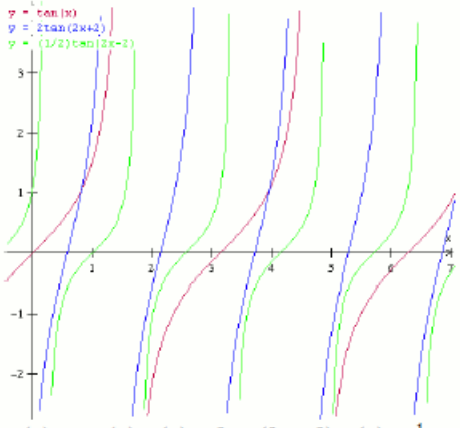
$$y(x) = A\cos(\omega x + \varphi_0) \quad (A > 0; \omega > 0)$$



18. ábra. $y(x) = \cos(x)$; $y(x) = 2\cos(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\cos(2x-2)$.

Tangens (19. ábra).

$$y(x) = A\tan(\omega x + \varphi_0) \quad (A > 0; \omega > 0)$$

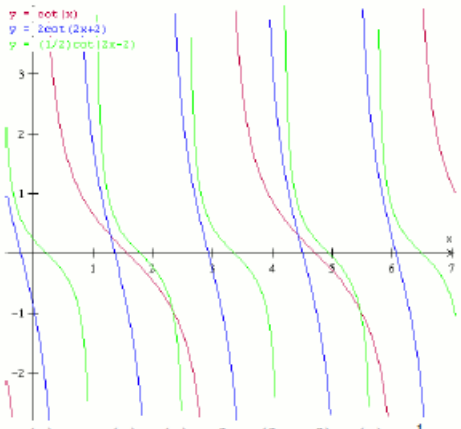


19. ábra. $y(x) = \tan(x)$; $y(x) = 2\tan(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\tan(2x-2)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Cotangens (20. ábra).

$$y(x) = A\cot(\omega x + \varphi_0) \quad (A > 0; \omega > 0)$$



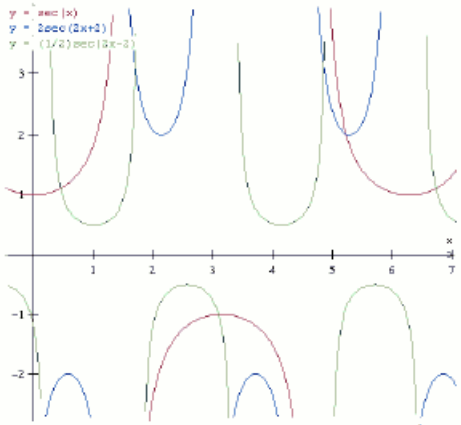
20. ábra. $y(x) = \cot(x)$; $y(x) = 2\cot(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\cot(2x-2)$.

Secans (21. ábra).

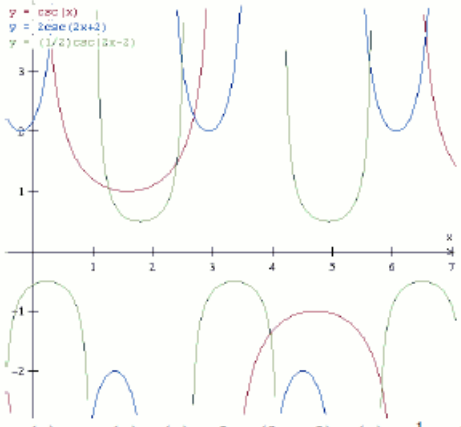
$$y(x) = A\sec(\omega x + \varphi_0) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (A > 0; \omega > 0)$$

Cosecans (22. ábra).

$$y(x) = A\csc(\omega x + \varphi_0) = \frac{1}{\sin(x)} \quad (A > 0; \omega > 0)$$



21. ábra. $y(x) = \sec(x)$; $y(x) = 2\sec(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\sec(2x-2)$.



22. ábra. $y(x) = \csc(x)$; $y(x) = 2\csc(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\csc(2x-2)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Arcus sinus (23. ábra). A sinus függvény inverz függvénye.

$$y(x) = A\arcsin(x)$$

Arcus cosinus (24. ábra). A cosinus függvény inverz függvénye.

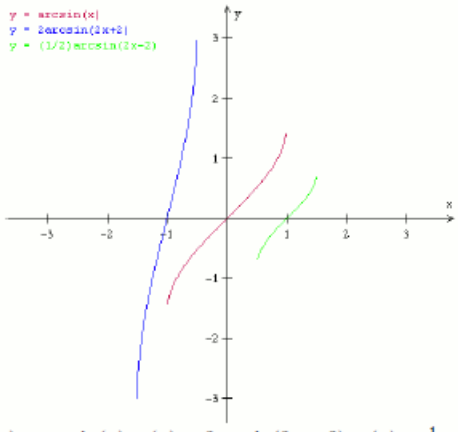
$$y(x) = A\arccos(x)$$

Arcus tangens (25. ábra). A tangens függvény inverz függvénye.

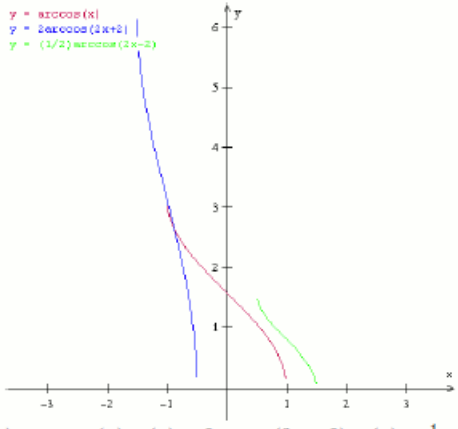
$$y(x) = A\arctan(x)$$

Arcus cotangens (26. ábra). A cotangens függvény inverz függvénye.

$$y(x) = Aarccot(x)$$

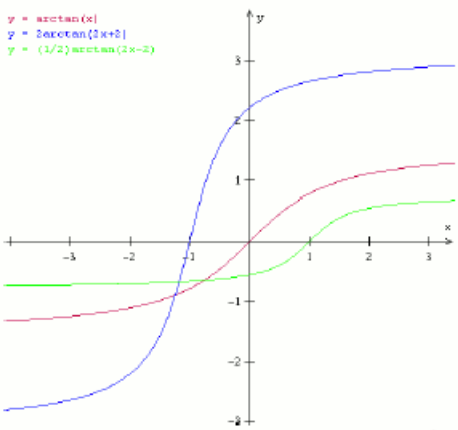


23. ábra. $y(x) = \arcsin(x)$; $y(x) = 2\arcsin(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x-2)$.

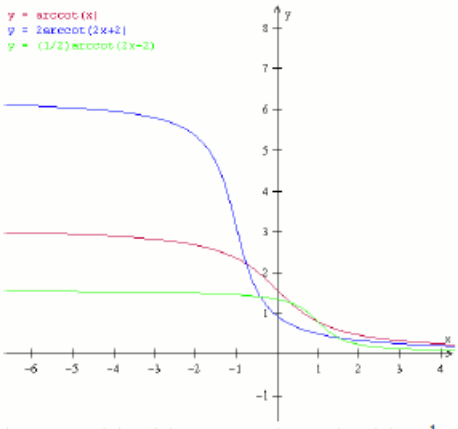


24. ábra. $y(x) = \arccos(x)$; $y(x) = 2\arccos(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\arccos(2x-2)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.



25. ábra. $y(x) = \arctan(x)$; $y(x) = 2\arctan(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x-2)$.

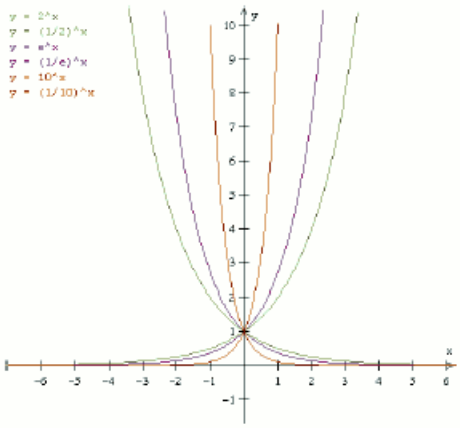


26. ábra. $y(x) = arccot(x)$; $y(x) = 2arccot(2x+2)$; $y(x) = \frac{1}{2}arccot(2x-2)$.

F3.14. Exponenciális függvények. (27. ábra)

$$y(x) = a^x = (e^b)^x = e^{bx} = \exp(bx) \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

$b > 0$ $(a > 1)$ esetén a függvény monoton növekvő; $b < 0$ $(0 < a < 1)$ esetén monoton csökkenő. A függvényörbe átmegy a $(0; 1)$ ponton.



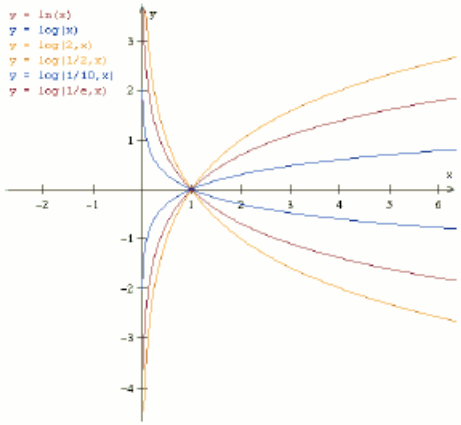
27. ábra. $y(x) = 2^x$; $y(x) = e^x$; $y(x) = 10^x$; $y(x) = (1/2)^x$; $y(x) = (1/e)^x$; $y(x) = (1/10)^x$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.15. Logaritmus-függvények. (28. ábra)

$$y(x) = \log_a x \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

A függvény az exponenciális függvény inverz függvénye.

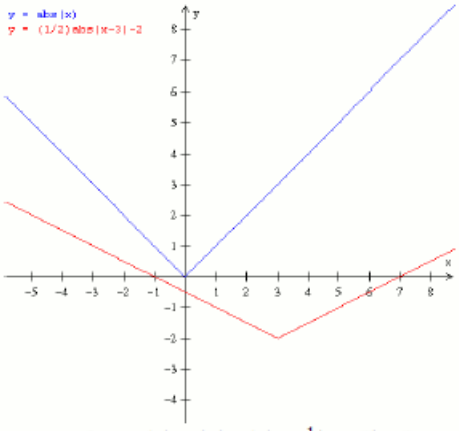


28. ábra. $y(x) = \ln(x)$; $y(x) = \log(x)$; $y(x) = \log_2(x)$; $y(x) = \log_{1/2}(x)$; $y(x) = \log_{1/10}(x)$; $y(x) = \log_{1/e}(x)$.

III. EGYÉB FÜGGVÉNYEK.

F3.16. Abszolút-érték függvény. (29. ábra)

$$y(x) = |x|$$

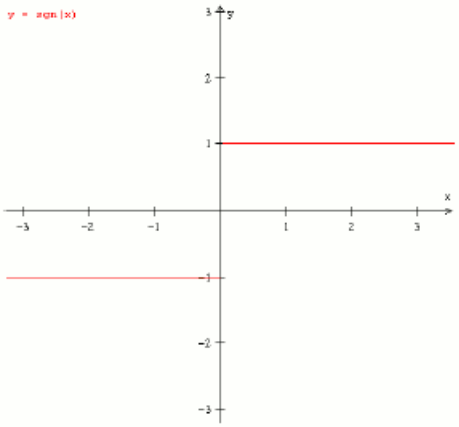


29. ábra. $y(x) = |x|$; $y(x) = \frac{1}{2}|x-3| - 2$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.17. Előjelfüggvény (signum). (30. ábra)

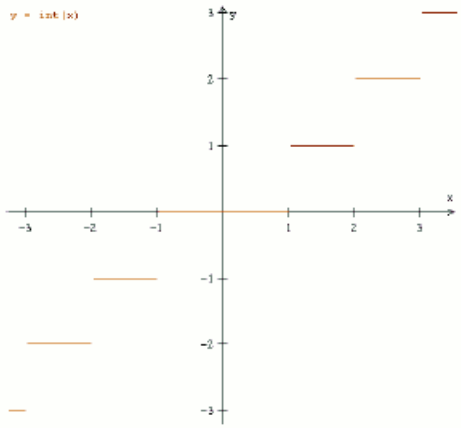
$$f(x) = sgn(x)$$



30. ábra. $y(x) = sgn(x)$.

F3.18. Egészrész függvény. (31. ábra)

$$y(x) = [x] = sig(x)$$

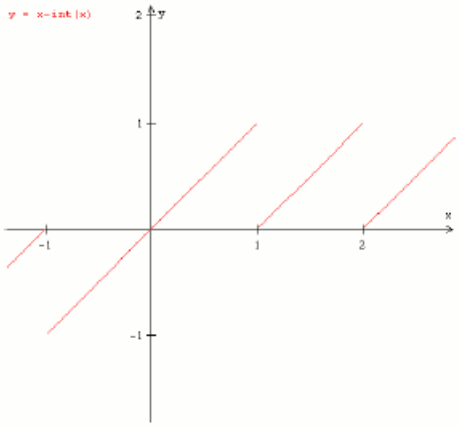


31. ábra. $y(x) = [x]$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F3.19. Törtrész függvény. (32. ábra)

$$f(x) = \{x\}$$



32. ábra. $y(x) = \{x\}$.

9.4. 9.4. Függvények határértéke és folytonossága (F4)

A függvények további vizsgálatára a határérték és a folytonosság fogalmát definiálhatjuk. Ezek a fogalmak a differenciálszámítás és az integrálszámítás alapjait jelentik.

F4.1. **Függvény határértéke egy pontban.** Az $f: D \to R$ függvénynek az x = a helyen létezik határértéke és ez a határérék a A szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$ szám, hogy $0 < |x - a| < \delta; (x \in D)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim_{x \to a} f(x) = A$

F4.2. **Végtelen, mint határérték.** Az $f: D \to R$ függvénynek az x = a helyen létezik határértéke és ez a határérék ∞, ha $\forall k$ számhoz $\exists \delta > 0$ szám, hogy $0 < |x - a| < \delta; (x \in D)$ esetén $f(x) > k$. Jelölés: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

F4.3. Az f : D → R függvénynek az x = a helyen létezik határértéke és ez a határérék $-\infty$, ha $\forall k$ számhoz $\exists \delta > 0$ szám, hogy $0 < |x - a| < \delta; (x \in D)$ esetén $f(x) < k$. Jelölés: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

F4.4. **Függvény határértéke a végtelenben.** Az $f: D \to R$ függvénynek az $x = \infty$ helyen létezik határértéke és ez a határérék A szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists x_0$ küszöbszám, hogy $x > x_0$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$.

F4.5. Az $f: D \to R$ függvénynek az $x = -\infty$ helyen létezik határértéke és ez a határérék A szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists x_0$ küszöbszám, hogy $x < x_0$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$.

F4.6. **Függvény folytonossága.** Az $f: D \to R$ függvény az x = a pontban folytonos, ha a függvény az a pontban értelmezve van ($a \in D; \exists f(a)$) és $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

F4.7. **Függvény szakadása.** Az f : D → R függvénynek az x = a pontban szakadása van, ha

(a) ebben a pontban a függvény nincs értelmezve, vagy

(b) $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, vagy

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(c) ebben a pontban $\lim_{x \to a} f(x)$ nem létezik.

Határérték és műveletek.

1. Konstans $f(x) = C$ függvény határértéke megegyezik a konstans értékével: F4.8.

$$\lim_{x \to a} C = C.$$

2. Amennyiben az $f : D \to R$ függvény az $x = a$ helyen folytonos, akkor a F4.9. függvény határértéke megegyezik a a helyen vett helyettesítési értékkel:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

3. Összeg, küülönbség határértéke. Legyenek értelmezettek az f és g függvények F4.10. határértékei az a pontban. Ekkor

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

4. Szorzat határértéke. Legyenek értelmezettek az f és g függvények határértékei F4.11. az a pontban. Ekkor

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

5. Hányados határértéke. Legyenek értelmezettek az f és g függvények határ- F4.12. értékei az a pontban. Ekkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad (\lim_{x \to a} g(x) \neq 0).$$

F4.1. 1. Példa - függvény határértéke.

F4.1. 1.Példa - Függvény határértéke.
Határozzuk meg a

$$\lim_{x \to 0} [(x - 4)\sin(x) + \cos(2x)]$$

határértéket!
Megoldás:
Mivel értelmezetttek az $x - 4$; $\sin(x)$ és $\cos(2x)$ határértékek a 0 pontban $(-4; 0; 1)$, a kérdéses függvények folytonosak, ezért a keresett határérték számítható:

$$\lim_{x \to 0} [(x - 4)\sin(x) + \cos(2x)] = \lim_{x \to 0} (x - 4) \lim_{x \to 0} \sin(x) + \lim_{x \to 0} \cos(2x) = -4 \cdot 0 + 1 = 1.$$

A függvények határértékének kiszámítása során olyan feladatokkal találkozhatunk, amelyek esetén a helyettesítési érték határozatlan értéket ad. Ilyenkor az eredeti függvényt alakítjuk át olyan függvénnyé, amely az adott hely kivételével mindenütt megegyezik az eredetivel, de a kérdéses helyen számított helyettesítési érték létezik, és ez egyenlő az eredeti függvény határértékével.

F4.1. 2. Példa - függvény határértéke.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

F4.1. 2.Példa - Függvény határértéke.
Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$$

határértéket!
Megoldás:
Az $x=2$ helyettesítéssel $\frac{0}{0}$ határozatlan kifejezéshez jutunk.
Az egyik lehetőség a kifejezés átalakítása:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+5)}=-\frac{1}{7}.$$

F4.2. 1.Példa - végtelen, mint határérték.

F4.2. 1.Példa - Végtelen, mint határérték.
Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2}$$

határértéket!
Megoldás:
Az $x=0$ helyen a helyettesítési érték: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(6x^3+3x+5)}{x(4x^2+7x)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^3+3x+5}{4x^2+7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{0}=\infty$$

F4.4. 1. Példa - függvény határértéke a végtelenben.

F4.4. 1.Példa - Függvény határértéke a végtelenben.
Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{2x^2+3x+5}$$

határértéket!
Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{2x^2+3x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Megjgyzések.

F4.13. **1.** A határérték-probléma egyik megoldása a A **L'Hospital-szabály** alkalmazása: Amennyiben egy kiszámítandó $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, akkor a határérék kiszámítására (a deriválssal kapott határérték létezése esetén) alkalmazható a következő össefüggés:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

F4.14. **2.** A L'Hosptal-szabály többször is alkalmazható, amennyiben a határérték a fenti problémás alakra vezet újra.

10. 10. Differenciálszámítás (D)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A fejezet célja a differenciálszámítási ismeretek elsajátíttatása.Az D1-7. fejezetek az alapfogalmak bevezetésétől kezdve egészen a magasabb fokú deriválásokig vezet el. A gyakorlati munka szintén a winplot programcsomag segítségével történik. A fejezet (és az előző fejezet) ismereteinek elsajátítását egy függvénytani elemzés önálló elvégzésével ellenőrizzük. A megvalósításban segítséget nyújtanak a csatolt oktatófilmek. Határidőre töltse fel a függvénytani elemzést a Moodle rendszerbe.

Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

- Dancs István, Magyarkúti Gyula, Medvegyev Péter, Puskás Csaba, Tallos Péter: Bevezetés a matematikai analízisbe. MEK.
- Lajkó Károly: Analízis II. Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, 2002
- Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára. Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem, Orvosi Informatikai Intézet, Szeged, 1996

  Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

10.1. 10.1. A differenciálszámítás alapfogalmai (D1 - D5)

D1.1. **A differenciahányados.** Vizsgáljunk egy $f: D \to R$ függvényt. Amennyiben az $x \in D$ független változót $(x + \Delta x)$ -re növeljük, akkor a függő változó $f(x) = y \in \mathbb{R}$ értéke $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ -ra változik. A változások elemzésére a differenciahányados szolgál:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

D2.1. 1. Példa - differenciahányados.

D2.1. 1.Példa - Differenciahányados:

Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény differenciahányadosát az $x = 3$ helyen, ha

(a) $\Delta x_1 = 1$.

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x+\Delta x_1)-f(x)}{\Delta x_1} = \frac{(x+\Delta x_1)^2-x^2}{\Delta x_1} = \frac{(3+1)^2-3^2}{1} = \frac{16-9}{1} = 7.$$

(b) $\Delta x_2 = 0,1$.

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{f(x+\Delta x_2)-f(x)}{\Delta x_2} = \frac{(x+\Delta x_2)^2-x^2}{\Delta x_2} = \frac{(3+0,1)^2-3^2}{0,1} = \frac{9,61-9}{0,1} = 6,1.$$

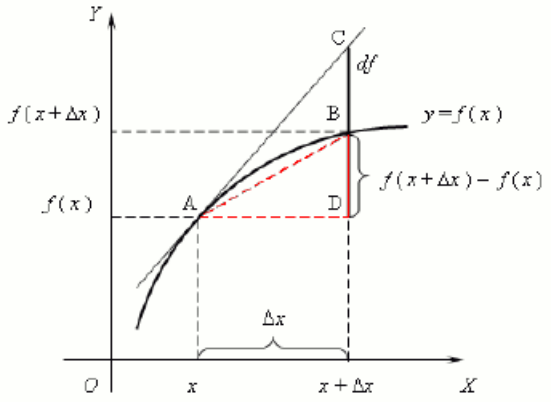
(c) általános Δx esete.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

D1.2. **További megjegyzések.**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

1. A differenciahányados szemléletes jelentése (1. ábra).



1. ábra. A differenciahányados szemléletes jelentése.

2. A $\triangle x$ olvasata: „delta x". A feladatok szöveges leírásban: „delta x".
A $\triangle x1$ olvasata: „delta x 1". A feladatok szöveges leírásban: „delta x1".

D2. **A differenciálhányados.** Amennyiben az y = f(x) függvény differenciahányadosának az x = a helyen $\Delta x \to 0$ esetén létezik határértéke, akkor ezt a határértéket az f(x) függvény a helyen értelmezett differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzül:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = y'(a)$$

Amennyiben az x = a helyen a határérték lézetik, úgy az mondjuk, hogy az f(x) függvény az x = a **pontban differenciálható**.

A pontbeli tulajdonság értelmezhető egy intervallum minden pontján, vagy az értelmezési tartomány egészén.

Ekkor az adott **intervallumban**, vagy az értelmezési tartományon differenciálható függvényről beszélhetünk.

D2.1. 1. Példa - differenciahányados.

D2.1. 1.Példa - Differenciahányados:
Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény differenciálhányadosát az $x = 3$ helyen.
$y'(x) = .[$ D2.1. 1.Példa (c) rész alapján $]. = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0}(2x + \triangle x) = 2x$
$y'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$

Megjegyzés: = · […] · = a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

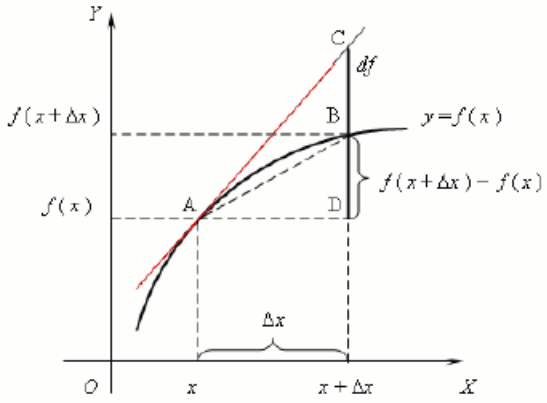
D2.2. **További megjegyzések.**

1. A differenciálhányados értéke csak x-től függ, így egy f(x) függvény f'(x) differenciálhányadosa szintén egy fügvény (derivált-függvény). Ennek az f'(x) függvénynek egy adott x helyen a helyettesítési értéke az eredeti f(x) függvény x helyen vett differenciahányadosának határétékével egyenlő.

2. Szemléletes jelentés.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

2. A differenciálhányados szemléletes jelentése (1. ábra).



1. ábra. A differenciálhányados szemléletes jelentése.

D3. **Alapvető differenciálási szabályok**

1. Konstans differenciálhányadosa. D3.1.

$$y' = 0.$$

2. Állandóval szorzott függvény differenciálhányadosa. D3.2.

$$y = cf(x), \quad y' = cf'(x).$$

3. Összegfüggvény differenciálhányadosa. D3.3.

$$y = u(x) + v(x), \quad y' = u'(x) + v'(x).$$

4. Két függvény különbségének differenciálhányadosa. D3.4.

$$y = u(x) - v(x), \quad y' = u'(x) - v'(x).$$

5. Két függvény szorzatának differenciálhányadosa. D3.5.

$$y = u(x)v(x), \quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v(x).$$

6. Két függvény hányadosának differenciálhányadosa. D3.6.

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

7. Összetett függvény differenciálhányadosa. D3.7.

$$y = f[\varphi(x)], \quad y = f(u),\ u = \varphi(x); \quad y' = f'(u)\varphi'(x).$$

D4. **Elemi függvények differenciálhányadosai**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

1. Hatványfüggvények deriváltja. D5.1.

$y(x) = x^n, \quad y'(x) = nx^{n-1}$, n racionális szám ($n \in \mathbb{Q}$)

2. Trigonometrikus függvények deriváltja.

$y(x) = \sin x, \quad y'(x) = \cos x$ D5.2.

$y(x) = \cos x, \quad y'(x) = -\sin x$ D5.3.

$y(x) = tgx, \quad y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ D5.4.

$y(x) = ctgx, \quad y'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ D5.5.

3. Exponenciális függvények deriváltja.

$y(x) = a^x, \quad y'(x) = a^x \, ln \, a$ D5.6.

$y(x) = e^x, \quad y'(x) = e^x \, ln \, e = .[\, ln \, e = 1]. = e^x$ D5.7.

$y(x) = a^{u(x)}, \quad y'(x) = a^{u(x)} u'(x) \, ln \, a$ D5.8.

$y(x) = e^{u(x)}, \quad y'(x) = e^{u(x)} u'(x)$ D5.9.

4. Hiperbolikus függvények deriváltja.

$y(x) = \; sh \; x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad y'(x) = \; ch \; x$ D5.10.

$y(x) = \; ch \; x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y'(x) = \; sh \; x$ D5.10.

$y(x) = \; th \; x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad y'(x) = \frac{1}{ch^2 \, x}$ D5.12.

$y(x) = \; cth \; x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad y'(x) = -\frac{1}{sh^2 \, x}$ D5.13.

5. Logaritmusfüggvények deriváltja.

$y(x) = \; log_a \, x, \quad y'(x) = \frac{1}{x \, ln \, a}$ D5.14.

$y(x) = \; log_e \, x = ln \, x, \quad y'(x) = \frac{1}{x \, ln \, e} = \frac{1}{x}$ D5.15.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

D5. **Magasabbrendű deriváltak**

Amennyiben egy függvény deriváltját ismét deriváljuk, akkor az eredeti függvény második, harmadik, ..., n-edik deriváltját kapjuk meg. Ennek jelölése:

$$y'' = y''(x) = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$y''' = y'''(x) = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

$$y^{IV} = y^{IV}(x) = f^4(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

$$y^{(n)} = y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

D5.1. 1. Példa - magasabb rendű derivált.

D5.1. 1.Példa - Magasabbrendű derivált.
Határozzuk meg az $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 14$ függvény harmadik deriváltjának helyettesítési értékét az $x = 1$ helyen.
Megoldás:
$y' = 12x^3 + 15x^2 - 4x$,
$y'' = 36x^2 + 30x - 4$,
$y''' = 72x + 30$,
$y'''(1) = 72 + 30 = 102$.

10.2. 10.2. Függvényvizsgálat (D6)

D6.1. A differenciálszámítás egyik jelentős feladatköre a függvénykapcsolattal adott összefüggések vizsgálata. Ez többek között jelenti a függvénygörbe alakjának és elhelyezkedésének feltárását. Kereshetjük a lokális szélsőértékeket, a zérushelyeket, az értelmezési tartomány esetleges hiányzó szakaszait, stb. A koordinátarendszerben történő ábrazolás mellett érdemes a határérték- és a differenciál-számítás eszközeit is bevetni.

D6.2. **Függvényvizsgálat menete.**

A függvények vizsgálatát általában a következő sorrend alapján érdemes elvégezni:
1. A függvény értelmezési tartományának meghatározása. Vizsgáljuk meg, hogy hol értelemezett a függvény; mely x értékek esetén nincs értelmezve $f(x)$.
2. Tengelymetszetek meghatározása - hol metszi a görbe az X és Y tengelyt: $f(x) = 0 \quad x = ?$; $f(0) = y \quad y = ?$.
3. Folytonosság, korlátosság, szakadási hely (pólus) meghatározása. A függvény viselkedése ezen helyek környezetében. Viselkedés az értelmezési tartomány szélein; ez jelentheti az $x = +\infty$ és $y = -\infty$ helyeket.
4. Lokális szélsőértékek (maximumok és minimumok) keresése. Egy $f(x)$ függvénynek olyan $x = a$ helyen lehet lokális szélsőértéke, ahol $f'(a) = 0$. Amennyiben $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$, akkor $f(x)$-nek az adott $x = a$ pontban lokális minimuma van. Amennyiben $f'(a) = 0$ és $f''(a) < 0$, úgy $f(x)$-nek az adott $x = a$ pontban lokális maximuma van.
5. Inflexiós pontok (konvex és konkáv szakaszok határpontjai). Egy $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen inflexiós pontja lehet, ha $f''(x) = 0$ - szükséges feltétel. Akkor, ha $x = a$-ban $f'''(x) \neq 0$ (vagyis $f''(x)$ előjelet vált), akkor $f(x)$-nek inflexiós pontja van - elégséges feltétel. Általánosítva: ha az $x = a$ helyen $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0$, de $f^{(n+1)} \neq 0$, akkor páros n esetén inflexiós pontja, páratlan n esetén lokális szélsőértéke van $f(x)$-nek.
6. Függvénygörbe vázlatos ábrázolása.
7. Értékkészlet meghatározása.
8. További pontok kiszámítása szükség szerint.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

(Kiss Márta: Függvényvizsgálat 1. - YouTube.)

(Kiss Márta: Házi dolgozat - Winplot - YouTube.)

(Gyakorló feladatok megoldásssal - függvényvizsgálat)

10.3. 10.3. Kiegészítő fejezetek (D7)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

D7A. **Szélsőérték feladatok.**

D7A.1. A differenciálszámítás egy másik jelentős feladatköre a szélsőértékfeladatok megoldása. Ez a feladatkör kapcsolódik a függvényvizsgálathoz, így részben ismétlése az előző (D6.) fejezetnek.

D7A.2. Tekintsünk egy f(x) fügvényt, amely legalább kétszer differenciálható. Keressük ennek a függvénynek a szélsőírtékeit - minimum és maximum helyeit.

f(x)-nek csak olyan x = a helyen lehet lokális szélsőértéke, ahol f′(a) = 0. Amennyiben f′(a) = 0 és f″(a) > 0 teljesül, akkor f(x)-nek az adott x = a pontban lokális minimuma van. Akkor, ha f′(a) = 0 és f″(a) < 0 teljesül, akkor f(x)-nek az adott x = a pontban lokális maximuma van.

További megjegyzések.

D7A.3. 1. Abban az esetben, ha f′(a) = 0 és f″(a) = 0 is teljesül, további vizsgálatokravan szükség. $f'(a) = f''(a) = \ldots = f(a)^{(n-1)} = 0$, de $f(a)^{(n)} \neq 0$ esetén (az első el nem tűdő derivált az x = a helyen az $f(a)^{(n)}$), vizsgálni kell n paritását. Páros n és $f(a)^{(n)} > 0$ esetében f(x)-nek minimuma van az x = a pontban. Páros n és $f(a)^{(n)} < 0$ esetében f(x)-nek maximuma van az x = a pontban. Páratlan n esetén f(x)-nek nincs szélsőértéke az x = a helyen.

D7A.4. 2. Abban az esetben, ha f′(a) = 0 és f′(x) az x = a helyen előjelet vált, akkor az f(x) függvénynek szélsőértéke van az x = a pontban.

Legyen c az a-nál kisebb (megfelelően kiválasztott) pont; d az a-nál nagyobb (megfelelően kiválasztott) pont - c és d választásánál arra kell figyelni, hogy a [c; a] és [a; d] intervallumokon ne váltson előjelet az f′(x) függvény. Amennyiben y′(c) > 0 és y′(d) < 0, akkor f(x)-nek az x = a pontban lokális maximuma van. Amennyiben y′(c) < 0 és y′(d) > 0, akkor f(x)-nek az x = a pontban lokális minimuma van.

D7B. **L'Hospital-szabály.**

D7B.1. A szabály lehetővé teszi, hogy egyes esetekben meghatározzuk olyan törtfüggvények határértékét (adott x = a véges helyen, vagy végtelenben), melyek helyettesítési értéke az adott helyen $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú.

D7B.2. Pontosabban: Legyen

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0; \lim_{x \to a} g(x) = 0; g'(a) \neq 0$$

valamint az f(x) és g(x) függvények az x = a hely környezetében legyenek differenciálhatók, ekkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

További megjegyzések.

D7B.3. **1.** Amennyiben mindkét függvény deriváltja (f′(x), g′(x)) nulla, továbbá a második deriváltak az x = a hely környezetében léteznek, akkor a szabály ismét alkalmazható.

D7B.4. **2.** Hasonlók fogalmazhatók meg akkor is, ha a vizsgált függvények x = a helyen végtelen értéket vesznek fel határértékül.

D7B.5. **3.** Ugyanilyen elven oldhatók meg azon határértékproblémák egy részek, ahol a határérték: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

D7C. Taylor-, Maclaurin- sorok.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Amennyiben az [a; x] zárt intervallumban az f(x) függvény (n − 1)-szer deriválható, és az az ii $R_n(a, x)$ m belsejében az n-edik derivált is létezik, akkor f(x) felírható az úgynevezett **Taylor-formulá**val (a maradéktag):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(a,x)$$

D7C.3. A **maradéktag Lagrange-féle alakja** $(0 \le \Theta \le 1)$:

$$R_n(a,x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[a + \Theta(x-a)\right]$$

Amennyiben az f(x) függvény az [a; x] intervallumban akárhányszor deriválható, akkor a Taylor-formulát végtelen sok tagra felírva az f(x) függvény **Taylor-sor**át kapjuk:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Abban az esetben, amikor a fenti sor a-ban konvergens, vagyis az R_n maradéktag zérushoz tart, mikor $n \to \infty$:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

akkor azt mondjuk, hogy az f(x) függvényt az x = a pontban a Taylor-sora előállítja.

Azoknak a pontoknak halmazát, ahol az f(x) függvény Taylor-sora a fenti értelemben konvergens, f(x) **konvergenciatartomány**ának nevezzük.

a = 0 esete a **Maclaurin-formulát**:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x)$$

és **Maclaurin-sort** adja:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

További megjegyzések.

D7C.8. **1.** Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ n-edfokú polinomot Taylor-sora minden a-ra előállítja.

D7C.9. **2.** Alkalmazási lehetőség: bonyolultabb hatványfüggvények adott x = a helyen vett helyettesítési értékének maghatározása.

D7C.10. **3.** Alkalmazási lehetőség: trigonometrikus függvények adott x = a helyen vett helyettesítési értékének meghatározása.

(Ellenőrző feladat - függvényvizsgálat)

(Függvényvizsgálati feladat feltöltése)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

11. 11. Integrálszámítás (I)

Az integrálszámítás részmodul a függvényekre és azok differenciálszámítási lehetőségeire alapozva vezeti be az integrálás műveletét. Az integrálás a felsőbb matematika gyakran használt része, igazi elsajátítása nagyobb gyakorlati időt követel meg, mint amennyi a fejezetre rendelkezésre áll. Itt a winplot programcsomag segítségével gyakoroljuk az integrálás műveletét. Az ellenőrző feladat is a winplot használatához kapcsolódik.

Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

- Dancs István, Magyarkúti Gyula, Medvegyev Péter, Puskás Csaba, Tallos Péter: Bevezetés a matematikai analízisbe.
- Lajkó Károly: Analízis II. Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, 2002
- Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára. Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem, Orvosi Informatikai Intézet, Szeged, 1996

  Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

11.1. 11.1. A határozatlan integrál (I1 - I2)

Határozatlan integrál.

I1.1. Valamely $f: D \to R$ függvény **határozatlan integrál**ja minden olyan függvény, amelynek deriváltja maga az f(x) függvény.

I1.2. Pontosabban: Az F(x) függvényt az f(x) függvény primitív függvényének (határozatlan integráljának) nevezzük az (a; b) véges, vagy végtelen intervallumban, ha F(x) differenciálhányadosa (deriváltja) (a; b) minden pontjában f(x):

ha $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, akkor $\int f(x)dx = F(x)$.

Megjegyzések.

I1.3. **1.** Amennyiben az f(x) függvény primitív függvénye F(x), akkor az F(x) + C is primitív függvénye f(x)-nek:

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C = F'(x)$$

vagyis

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ennek jelentése, ábrázolása: egy f(x) függvény primitív függvényei koordináta-rendszerben ábrázolva egy görbesereget határoznak meg.

I1.4. **2.** Amennyiben a primitív függvények közül egy konkrétat akarunk vizsgálni, akkor meg kell adnunk annak egy $P_0(x_0; y_0)$ pontját. Ekkor a konkrét függvény származtatható.

I1.5. **3.** Amennyiben egy f(x) függvény valamely [a; b] intervallumban folytonos, akkor ott létezik primitív függvénye.

I1.6. **4.** Az eddigiek alapján a primitív függvény meghatározása bizonyos értelemben a differenciálás megfordítását jelenti. Erre azonban nincs általános módszer. Viszonylag egyszerű függvények esetében is gondot okoz a primitív függvény meghatározása.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Tulajdonságok.

Legyen rögzített egy (a; b) intervallum, amelyben

$\int f(x)dx = F(x) + C_1$; $\int g(x)dx = G(x) + C_2$

ekkor

I1.7. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = F(x) \pm G(x) + C$.

I1.8. legyen ezenkívül c egy tetszőleges állandó, ekkor

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

I2. **Elemi függvények integráljai - Alapintegrálok**

I2.1. (a) $\int x^0 dx = \int 1dx = x + C$

$\int c dx = \int c \cdot 1dx = c\int 1dx = x + C$; (c konstans)

I2.2. (b) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $(n \in \mathbb{Q}; n \neq -1)$

I2.3. (c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

I2.4. (d) $\int e^x dx = e^x + C$

I2.5. (e) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $(a > 0; a \neq 1)$

I2.6. (f) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

I2.7. (g) $\int \cos x dx = \sin x + C$

I2.8. (h) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C$

I2.9. (i) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}x + C$

Példák - Határozatlan integrál kiszámítása.

1. mintafeladat.

$$\int x^5 dx = \left[\text{I2.2.}; \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right] = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{6}x^6 + C$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

Ellenőrzés:

$$\left(\frac{x^6}{6}+C\right)'=\cdot[D3.3.;(u+v)'=u'+v']\cdot=\left(\frac{x^6}{6}\right)'+(C)'=\cdot[D3.1]\cdot=\frac{1}{6}(x^6)'+0=\cdot[D5.1.]\cdot=\frac{1}{6}6x^{6-1}=x^5$$

2. mintafeladat.

$$\int x^{-3}dx=\cdot[I2.2.]\cdot=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$$

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

3. mintafeladat.

$$\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\cdot[I2.2.]\cdot=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

4. mintafeladat.

$$\int\sqrt[3]{x^2}dx=\cdot[I2.2.]\cdot=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$$

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

5. mintafeladat.

$$\int 5^x\,dx=\cdot[I2.5.]\cdot=\frac{5^x}{\ln 5}+C$$

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

6. mintafeladat.

$$\int(6\sin x+5\cos x)dx=\cdot[I1.7.]\cdot=\int 6\sin x dx+\int 5\cos x dx=$$
$$\cdot[I1.8.]\cdot=6\int\sin x dx+5\int\cos x dx=$$
$$\cdot[I2.6.]\cdot=6(-\cos x)+5\sin x+C=-6\cos x+5\sin x+C$$

Megjegyzés: $=\cdot[\ldots]\cdot=$ a felhasznált összefüggés megadása a ponttal jelölt zárójelek között ('vtp' jelölés).

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

11.2. 11.2. A határozott integrál (I3)

Határozott integrál.

I3.1. Legyen értelemzett az f(x) függvény egy [a; b] zárt intervallum minden pontjában. f(x) a-tól b-ig értelmezett **határozott integrál**ján a következő kifejezést értjük:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$$

itt Δx_i az [a; b] zárt intervallum részekre osztása (n rész) során az i-edik részintervallum hossza, $f(\eta_i)$ az i-edik részintervallum tetszőleges i pontjához tartozó függvényérték. $\Delta x_i \to 0$ szerint az összegzést úgy végezzük, hogy a részintervallumok hosszával 0-hoz tartunk, ami másként az osztópontok számánk minden határon túli növelését is jelenti: $n \to \infty$.

I3.2. **Newton-Leibniz formula.** A határozott integrál kiszámítása visszavezethető határozatlan integrál meghatározására. Ezt a Newton-Leibniz formula írja le:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

itt F(x) az f(x) függvény bármely primitív függvénye.

Tulajdonságok.

I3.3. (a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

I3.4. (b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; ([a,b] = [a,c] \cup [c,b])$

I3.5. (c) Amennyiben f(x) az [a; b] intervallumban nemnegatív, úgy $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

I3.6. (d) $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

I3.7. (e) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

(Gyakorló feladatok megoldásssal)

11.3. 11.3. Az impropius integrál (I4)

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

I4.1. Legyen az f(x) függv[a;∞]z [a;B] intervallumban (B > a) integrálató. Amennyiben a $\lim_{B\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ határték létezik és véges, akkor az intervallumon értelmezett **impropius integrál** a határétékkel egyenlő:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx$$

.

I4.2. Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$$

I4.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty;B\to\infty}\int_A^B f(x)dx$$

.

11.4. 11.4. A határozott integrál alkalmazása (I5)

I5.1. **Területszámítás.** Egy f(x) fügvény által meghatározott görbe [a; b] intervallum által kijelölt területe:

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

I5.2. **Ívhossz-számítás.** Legyen az f(x) függvény az [a; b] intervallumon folytonos és differenciálható (a differenciálhánydos korlátos). Ekkor az a és b abcisszák által meghatározott vonaldarab s ívhossza:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

I5.3. **Forgástestek felszíne.** Egy f(x) függvény görbéjének ([a; b] alapán a és b határok között) X-tengely körüli forgatásával értelmezett forgástest palástjának felszíne:

$$F_x(a,b) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

I5.4. **Térfogatszámítás.** Egy f(x) függvény görbéjének a és b abszcisszák által határolt ívének X-tengely körüli forgatásával értelmezett forgástest térfogata:

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

I5.4. 1.Példa - forgástest térfogata:

Határozzuk meg az f(x) = ax egyenes X-tengely körüli forgatásával kapott m magasságú kúp térfogatát. A kúp alapkörének sugara r.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^m a^2x^2dx = \pi a^2\int_0^m x^2dx = \pi a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m =$$

$$\pi a^2\left[\frac{m^3}{3} - 0\right] = \pi a^2\frac{m^3}{3} = \cdot\left[r = am, a = \frac{r}{m}\right]\cdot = \pi\left(\frac{r}{m}\right)^2\frac{m^3}{3} =$$

$$\pi\frac{r^2}{m^2}\frac{m^3}{3} = \frac{r^2\pi m}{3}$$

Így a kúp ismert térfogatképletét kapjuk.

(Gyakorló feladatok megoldásssal.)

(Winplot demonstráció - numerikus integrálás.)

12. 12. Valószínűségszámítás (V)

A valószínűségszámítás fejezet a matematika egy speciális ágának tekinthető. Kialakulása későbbre tehető, mint a hagyományosnak nevezett matematikai ágak. Témája a véletlen események, kísérletek vizsgálata.Alapvető szerepet játszik a matematikai statisztika megalapozásába, hiszen az alkalmazott fogalmak mind megjelennek a későbbiekben.A modul célja bevezetést nyújtani ezen alapfogalmakba.Két szöveges állomány foglalja össze az alapokat, majd egy feladatgyűjtemény feladatain keresztül ismerkedhet meg az elmélet számítási alkalmazásaival. Az ellenőrző feladat eltér az eddigiektől. Első lépésben egy feladatsort kell összeállítania a valószínűségszámítás, a valószínűségi változók témakörben. Minden feladathoz csatolnia kell a megoldás lépéseit is. A kész feladatsort (3-4 feladat) fel kell töltenie a rendszerbe. Ezután (név nélkül) megkapja egy társa által elkészített feladatsort, amit javítania és értékelnie kell. Mindkét munkára pontokat kap, amelyek beszámítanak a modul végső értékelésébe.

Bővebb, a modulban szereplő tömör összefoglalónál lényegesen hosszabb leírást talál a következő forrásokban:

- Dinya Elek: Biometria 3. modul.
- Szatmáry Zoltán: Mérések kiértékelése, 3. fejezet.
- Fazekas István: Valószínűségszámítás. - A valószínűségszámítás alapfogalmai. Debreceni Egyetem, 2003
- Szirmai Katalin, Sztrik János, Kis Béla: Valószínűségszámítás. - Feladatok és megoldások. Debreceni Egyetem, Természettudományi Kar, Matematikai és Informatikai Intézet, 2000

  Ezek a források kisegíthetik a részmodul ismereteinek feldolgozásában és elsajátításában, valamint sok esetben bővebb ismeretalapot is szolgáltatnak.

12.1. 12.1. A valószínűség fogalma (V1)

V1.1. **Gyakoriság.** Ha egy kísérletet n-szer ismétlünk, és a megfigyelt A esemény k-szor következik be, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény gyakorisága k. Ezt k_A-val jelöljük.

V1.2. **Relatív gyakoriság.** A $\frac{k_A}{n}$ hányadost relatív gyakoriságnak nevezzük.

V1.3. **Valószínűség fogalma (tapasztalati).** A tapasztalatok szerint kísérletekben a relatív gyakoriság egy konkrét érték körül ingadozik, ezt a konkrét értéket az A esemény valószínűségének nevezzük, és P(A)-val jelöljük.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

V1.4. **A valószínűség Ωxiómái.** Legyen adott egy kísérlethez tartozó Ω eseménytér, legyen A és B két tetszőleges esemény a -n . A-hoz hozzárendelünk egy P(A) pozitív számot (ezt tekintjük a valószínűség axiomatikus fogalmának), amelyre teljesülnek az alábbi axiómák:

I. Minden A esemény valószínűségére teljesül: $0 \le P(A)$.

II. A biztos esemény valószínűsége: $P(\Omega) = 1$.

III. Ha A és B egymást kizáró események ($A \cdot B = \varnothing$), akkor $P(A+B)=P(A)+P(B)$. A III. axiómát additív tulajdonságnak nevezzük.

Az additív tulajdonság igaz több (végtelen sok) eseményre is.

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)$$

más formában: $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; $A_iA_j = \varnothing, (i \ne j; i, j = 1,2,3,\ldots,n)$.

Megszámlálhatóan végtelen sok esemény esetén a III. axióma:

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)+\ldots.$$

Más formában: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$; $A_iA_j = \varnothing, (i \ne j; i, j = 1,2,3,\ldots)$.

A valószínűség-számítási tételek.

V1.5. **1.** Tétel. Legyen P(A) az A esemény valószínűsége, az $\overline{A}$ ellentett esemény valószínűsége $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

V1.6. **2.** Tétel. Legyen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ egy teljes eseményrendszer, akkor, $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n) = 1$.

V1.7. **3.** Tétel Legyen A és B két tetszőleges esemény a Ω –n. Annak valószínűsége, hogy közülük legalább az egyik bekövetkezik: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

V1.8. **4.** Tétel Ha az A esemény maga után vonja a B eseményt ($A \subset B$), akkor $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

V1.9. Megjegyzés: A tételből következik: $P(A) \le P(B)$, ha $A \subset B$.

Klasszikus valószínűség.

V1.10. **5.** Tétel. Legyen $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ az Ω eseménytér egy olyan elemi események teljes eseményrendszere, ahol minden E_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ elemi esemény valószínűsége egyenlő (minden E_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ elemi esemény egyenlően valószínű): $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\ldots=P(E_n)$. Legyen A olyan esemény Ω-n, hogy A akkor következik be, ha az E_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ elemi események közül valamely meghatározott k számú elemi esemény valamelyike bekövetkezik. Ekkor $P(A) = \frac{k}{n}$ (az A esemény szempontjából kedvező elemi események száma (kedvező esetek száma) osztva az összes elemi esemény számával (összes esetek száma).).

Ekkor Ω és az értelmezett P valószínűségi struktúra együttes neve: klasszikus valószínűségi mező.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

V1.11. **A valószínűség meghatározása kombinatorikus módszerekkel - Mintavétel.**

Legyen N darab termékünk, és abban M darab ($0 \le M \le N$) selejtes. Kiveszünk n ($0 \le n \le \min[M,N-M]$) darab mintát.

Kérdés: mennyi annak a valószínűsége, hogy a minta k darab ($0 \le k \le n$) selejtes terméket tartalmaz?

Jelölés: Legyen az A_k esemény értelmezése: n elemű minta k selejtet tartalmaz. A keresett valószínűség $p_k = P(A_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

A kísérletet két módon végezhetjük:

Kiveszünk egy terméket, lejegyezzük, hogy selejt, nem selejt, majd visszatesszük az alapsokasságba (az alapsokasság így nem változik). Az elemeket ezután újra összekeverjük, a kísérletet megismételjük (n-szer). Ez a **visszatevéses mintavétel**.

A másik mód az, hogy a kivett terméket nem tesszük vissza az alapsokasságba. Az alapsokasság változik. Ez a **visszatevés nélküli mintavétel**.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Megnevezés	Visszatevéses	Visszatevés nélkül
Alapsokasság	N	N
Megkülönböztetett egyedek (selejt)	M	M
Megkülönböztetett egyedek (selejt) aránya	$p=\frac{M}{N}$	$p=\frac{M}{N}$
Megkülönböztetés nélküli egyedek (nem selejt)	N-M	N-M
Megkülönböztetés nélküli egyedek (nem selejt) aránya	$q=\frac{N-M}{N}=1-\frac{M}{N}=1-p$	$q=\frac{N-M}{N}=1-\frac{M}{N}=1-p$
Minta	n	n
Megkülönböztetett egyedek a mintában (selejt)	k	k
Megkülönböztetés nélküli egyedek a mintában (nem selejt)	n-k	n-k
Kedvező esetek száma egy kísérlet esetén	$M^k(N-M)^{n-k}$ (Ismétléses permutációk)	$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ Ismétlés nélküli kombinációk)
Kedvező esetek száma a k kísérlet során	$\binom{n}{k}$ $M^k(N-M)^{n-k}$ [$\binom{n}{k}$ féleképpen történhet meg az, hogy az n elemű minta k selejtet tartalmaz]	$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ (Csak egyszer végezzük el a kísérletet, egyszerre vesszük ki a k selejtet tartalmazó n elemű mintát)
Az összes esetek száma	N^n (Ismétléses permutáció)	$\binom{N}{n}$ Ismétlés nélküli kombináció
A keresett valószínűség	$P_k=P(A_k)=$ $=\binom{n}{k}\frac{M^k(N-M)^{n-k}}{N^n}=$ $=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}=$ $=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$ $=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, k=0,1,2,...,n	$P_k=P(A_k)=$ $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,1,2,...n
Ha M és N értéke megfelelően nagy n-hez képest a két módszerrel számított valószínűség közel egyenlő, vagyis mindegy, hogy melyik módszert választjuk!		

V1.11. 1. Példa.

N=100 termékben M=5 a selejtes, n=4 elemű mintát veszünk. Számoljuk ki a $p_k=P(A_k)$, $k=1,2,3,\ldots,5$ valószínűségeket, mindkét módszerrel; ami azt jelenti, hogy 0,1,2,3,4 selejtet tartalmaz a minta. A selejt arány: p=0,05, a nem selejt arány: q=0,95.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A valószínűségek:

Visszatevéssel

$$p_k = \binom{4}{k} 0{,}05^k 0{,}95^{4-k},$$

k=0,1,2,3,4

Visszatevés nélkül

$$p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{95}{4-k}}{\binom{100}{4}}$$

k=0,1,2,3,4

Konkrétan a valószínűségek.

Selejt [db]	Visszatevéssel	Visszatevés nélkül
0	$p_0 = \binom{4}{0} 0{,}95^4 = 0{,}81450625 \approx 81\%$	$p_0 = \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{4}}{\binom{100}{4}} = 0{,}81186890 \approx 81\%$
1	$p_1 = \binom{4}{1} 0{,}05.0{,}95^3 = 0{,}171475$ $\approx 17\%$	$p_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{95}{3}}{\binom{100}{4}} = 0{,}176493 \approx 18\%$
2	$p_2 = \binom{4}{2} 0{,}05^2 0{,}95^2 = 0{,}0135375 \approx 0{,}1$ %	$p_2 = \frac{\binom{5}{2}\binom{95}{2}}{\binom{100}{4}} = 0{,}0011386 \approx 0{,}1\%$
3	$p_3 = \binom{4}{3} 0{,}05^3 0{,}95 = 0{,}000475$ $\approx 0{,}05\%$	$p_3 = \frac{\binom{5}{3}\binom{95}{1}}{\binom{100}{4}} = 0{,}0000242269 \approx 0{,}00$ 2%
4	$p_4 = \binom{4}{4} 0{,}05^4 = 0{,}00000625$ $\approx 0{,}0006\%$	$p_3 = \frac{\binom{5}{4}\binom{95}{0}}{\binom{100}{4}} = 0{,}0000007525 \approx 0{,}00$ 008%
Figyeljük meg a két módszer eltérése 1% alatt marad!		

V1.12. **Geometriai valószínűség.**

Geometriai modell: P(A) = kedvező mérték / összes mérték.

A mérték: geometriai alakzatok hossza, területe, térfogata, szöge, ív hossza.

V1.12. 1. Példa - céltáblára történő lövést. Biztos esemény: a kísérlet (lövés) során a versenyző egy R sugarú körön belül találja el a táblát. Mennyi annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy a találat egy r≤R sugarú körön belül marad?

Válasz: $P(A) = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$.

V1.13. **Feltételes valószínűség fogalma.**

Feltételes valószínűség: az A esemény valószínűsége a B feltétel mellett: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$; $0<P(B)$.

Ez annak valószínűsége, hogy az A bekövetkezik, ha a B bekövetkezik.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

V1.14. **A valószínűségek szorzási szabálya.**

Ha ismerjük a feltételes valószínűségeket, és a feltétel események valószínűségét, akkor meghatározhatjuk az együttes bekövetkezések valószínűségét.

V1.15. **6.** Tétel. Legyen A és B az Ω két tetszőleges eseménye. Az együttes bekövetkezésük valószínűsége: $P(AB)=P(A|B)P(B)$; $0<P(B)$.

V1.16. **7.** Tétel. Ha a 6. tételben az A és B szerepet cserél, és 0<P(A), valamint 0<P(B) akkor: $P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$.

A teljes valószínűség tétele.

V1.17. **8.** Tétel. Legyen $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, teljes eseményrendszer a Ω -n, és $0 < P(B_k)$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, akkor tetszőleges Ω-beli A eseményre igaz az következő összefüggés: $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k)$.

V1.18. **Bayes tétel.**

9. Tétel (Bayes-tétel). Legyen $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, teljes eseményrendszer a Ω -n, és $0 < P(B_k)$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, akkor tetszőleges Ω-beli A eseményre: $P(B_k|A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)} = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{P(A)}$; $k = 1,2,3,\ldots,n$.

V1.18. 1.Példa. Egy összeszerelő üzemben, négy műszakban állítanak elő bizonyos készülékeket (hűtőgép, mosógép, televízió, rádió). Az egyes műszakokban az összes mennyiség 40%, 30%, 20%, és 10% készül. Az egyes műszakokban 2%, 3%, 4% és 5% annak a valószínűsége, hogy a készülék a garanciális időn belül meghibásodik. Kérdés mennyi annak a valószínűsége, hogy egy általunk vásárolt készülék (az üzletben nem tudjuk megállapítani, hogy a készüléket melyik műszakban állították elő) a garanciális időn belül meghibásodik?

Megoldás:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Legyen A az az esemény, hogy a vásárolt készülék meghibásodik a garanciális időn belül.

Műszak	I.	II.	III.	IV.
Esemény	B_1	B_2	B_3	B_4
Valószínűség	$P(B_1)=0,4$	$P(B_2)=0,3$	$P(B_3)=0,2$	$P(B_4)=0,1$
Feltételes valószínűség	$P(A\|B_1)=\frac{P(A\cap B_1)}{P(B_1)}=$ $=0,02$	$P(A\|B_2)=\frac{P(A\cap B_2)}{P(B_2)}=$ $=0,03$	$P(A\|B_3)=\frac{P(A\cap B_3)}{P(B_3)}=$ $=0,04$	$P(A\|B_4)=\frac{P(A\cap B_4)}{P(B_4)}=$ $=0,05$

B_1, B_2, B_3, B_4, teljes eseményrendszert alkot.

Meghatároztuk az A esemény (a vásárolt készülék garanciális időn belül hibásodik meg a készülék) valószínűségét a B_k, k=1,2,3,4 feltételek mellett.

$P(A\cap B_1)=$	$P(A\cap B_2)=$	$P(A\cap B_3)=$	$P(A\cap B_4)=$
$P(A\|B_1)P(B_1)=$	$P(A\|B_2)P(B_2)=$	$P(A\|B_3)P(B_3)=$	$P(A\|B_4)P(B_4)=$
$0,02\cdot 0,4=0,008$	$0,03\cdot 0,3=0,009$	$0,04\cdot 0,2=0,008$	$0,05\cdot 0,1=0,005$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{4}P(A\mid B_k)P(B_k)=0,008+0,009+0,008+0,005=0,03$$

3% annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a vásárolt készülék meghibásodik a garanciálisidőn belül, és 97% annak a valószínűsége, hogy nem hibásodik meg a garanciális időn belül.

$P(B_1\mid A)=\frac{0,008}{0,03}=\frac{0,8}{3}$	$P(B_2\mid A)=\frac{0,009}{0,03}=\frac{0,9}{3}$	$P(B_3\mid A)=\frac{0,008}{0,03}=\frac{0,8}{3}$	$P(B_4\mid A)=\frac{0,005}{0,03}=\frac{0,5}{3}$

$$\sum_{k=1}^{4}P(B_k\mid A)=\frac{0,8}{3}+\frac{0,9}{3}+\frac{0,8}{3}+\frac{0,5}{3}=1.$$

V1.19. **Események függetlensége.**

Az A és B események függetlennek, ha $P(A|B)=P(A)$, vagy $P(B|A)=P(B)$. Átalakítva: $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$.

V1.20. **10.** Tétel. Ha az Ω-hoz tartozó A és B események függetlenek, akkor az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is függetlenek. Ezenkívül A és $\overline{B}$ is; B és $\overline{A}$ is függetlenek.

V1.21. **Három esemény teljes függetlensége.**

Legyen A, B, és C három esemény az Ω-n, a három eseményt teljesen függetlennek mondjuk akkor, ha fennállnak az alábbiak:

$P(AB)=P(A)P(B)$
$P(AC)=P(A)P(C)$
$P(BC)=P(B)P(C)$
$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

V1..22. **Független kísérletek.**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Akkor beszélünk független kísérletekről, ha ugyanolyan körülmények között egy kísérletet többször megismételve, az egyes kísérletek kimenetele nincs befolyása a többire.

Legyenek $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ Ω-hoz tartozó események. Végezzünk n kísérletet a Ω-n úgy, hogy: az első kísérlet esetén az A_1, $P(A_1)$ valószínűséggel következik be, a második kísérlet esetén … , …, az n-edik kísérlet esetén az A_n , $P(A_n)$ valószínűséggel következik be. Független a kísérletsorozat, ha $P(A_1A_2A_3 \cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_n)$

V1.23. **Bernoulli kísérlet-sorozat.**

Egy kísérletnek legyen két kimenetele: A , vagy $\overline{A}$ (selejt, nem selejt). Legyen $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Végezzük el a kísérletet n-szer úgy, hogy az egyes kísérletek egymásra semmilyen befolyással ne legyenek. Az n kísérlet során az A esemény következzen be k-szor, az $\overline{A}$ pedig (n-k)-szor. Egy ilyen kísérletsorozat is esemény: Például az első k kísérletre következzen be az A esemény, az utolsó (n-k) esetben pedig az $\overline{A}$ esemény. Ennek az eseménynek a valószínűsége $p^k q^{n-k}$. Az n elem összes különböző sorrendje, $\binom{n}{k}$. Így annak valószínűsége, hogy a vázolt kísérlet sorozatban az A k-szor, $\overline{A}$ (n-k)-szor következett be: $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

12.2. 12.2. Valószínűségi változók (V2)

A valószínűségi változó fogalmának bevezetése az analízis eszközeinek és módszereinek alkalmazását teszik lehetővé.

V2.1. **A valószínűségi változó fogalma.**

ω_i jelölje Ω elemi eseményeit. Az elemi események halmazán értelmezett, $\eta = \eta(\omega)$ valós függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

V2.2. **Megjegyzés.**

1. A valószínűségi változó függvénye is valószínűségi változó. Például, ha η_1, η_2 valószínűségi változók, akkor az $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta = \eta^2$, …. is valószínűségi változók.

2. A valószínűségi változókat két nagy csoportba soroljuk. Diszkrét valószínűségi változók, folytonos valószínűségi változók.

V2.3. **Diszkrét valószínűségi változó.**

Ha η valószínűségi változó lehetséges értékei véges, vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazt alkotnak, akkor η-t diszkrét valószínűségi változónak nevezzük.

Legyenek az η diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei: x_1, x_2, x_3,…. Legyenek $\eta = x_1$, $\eta = x_2$, $\eta = x_3$, … események és ezek valószínűségei $P(\eta = x_1)$, $P(\eta = x_2)$, $P(\eta = x_3)$, … Amennyiben $\sum P(\eta = x_i) = 1$, akkor diszkrét eloszlásról beszélünk.

V2.4. **Folytonos valószínűségi változó.**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ha η valószínűségi változó lehetséges értékei nem megszámlálhatóan végtelen számosságú (kontinuum) halmazt alkotnak, -t folytonos valószínűségi változónak nevezzük.

Megjegyzés.

V2.5. **1.** Kevert típusú valószínűségi változó: a valószínűségi változó bizonyos intervallumokon folytonos, más intervallumokon diszkrét.

V2.6. **Eloszlásfüggvény és tulajdonságai.**

Legyen η az elemi eseményein értelmezett valószínűségi változó. Az $F(x)=P(\eta<x)$, $x \in R$ függvényt a η valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos.

Megjegyzés.

V2.7. **1.** Az $F(x)$ eloszlás függvény folytonos, és véges számú hely kivételével differenciálható, akkor deriváltja a $f(x)$ sűrűség-függvény, $F'(x)=f(x)$.

V2.8. **1. Tétel.** Legyen η folytonos valószínűségi változó, eloszlsáfüggvénye $F(x)$. Annak valószínűsége, hogy $a \le \eta \le b; P(a \le \eta \le b) = F(b) - F(a)$.

V2.9. **2. Tétel.** Minden η valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényére igazak a következő állítások:

a) $F(x)$ monoton növekvő

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

c) Az $F(x)$ balról folytonos azaz $\lim\limits_{x\to a-0} F(x) = F(a)$.

V2.10. **3. Tétel.** Ha η folytonos valószínűségi változó $F(x)$ az eloszlásfüggvénnyel, akkor bármely x_0 pontban $P(\eta = x_0) = 0$.

V2.11. **A sűrűség-függvény és tulajdonságai.**

Ha az η folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor azt az $f(x)$ függvényt, amelyre teljesül az $F'(x)=f(x)$ egyenlőség, a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük. A $f(x)$ primitív függvénye $F(x)$.

V2.12. **4. Tétel.** Legyen η folytonos valószínűségi változó, sűrűség-függvénye $f(x)$. Ekkor igazak az alábbi állítások:

a) Az $0 \le f(x)$, $x \in D_f$, a sűrűség-függvény nem negatív.

b) $\int_a^b f(x)dx = P(a \le \eta < b)$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

d) $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$.

A valószínűségi változó néhány jellemzője.

V2.13. **Medián.**

Az η valószínűségi változó mediánja, $med(\eta)$ az a valós szám, amelyre teljesül: $P(\eta < med(\eta)) \le 0,5$ és $P(\eta \ge med(\eta)) \ge 0,5$; ha a η diszkrét.

$P(\eta < med(\eta)) = F(med(\eta)) = 0,5$; ha η folytonos.

V2.14. **Módusz.**

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei között van maximális, akkor ezt az η móduszának nevezzük: $mod(\eta)$. A folytonos valószínűségi változó módusza az $f(x)$ sűrűség-függvényének a maximuma.

V2.15. **Kvantilis.**

Legyen $0<q<1$. Azt az x_q számot, amelyre fennáll: $P(\eta < x_q) \le q$ és $P(\eta \ge x_q) \ge q$, ha a η diszkrét,

$P(\eta<x_q)=F(x_q)=q$, ha a η folytonos,

q=0,25 $x_{0,25}$ kvartilis,

q=0,1 $x_{0,1}$ decilis,

q=0,01 $x_{0,01}$ centilis,… -nek nevezzük.

V2.16. **Várható érték.**

A η diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek x_1, x_2, x_3,…. Ezeket vegye fel rendre $p_1=P(\eta=x_1)$, $p_2=P(\eta=x_2)$, $p_3=P(\eta=x_3)$, … valószínűséggel.

Az $M(\eta) = \sum_i x_i p_i$ összeget az η várható értékének nevezzük (feltétel: az összeg véges).

Ha η folytonos valószínűségi változó: $M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (feltétel: integrál véges).

V2.17. **5. Tétel.** Konstans (c) várható értéke, maga a konstans (c).

V2.18. **6. Tétel.** Ha az η valószínűségi változónak létezik a várható értéke, és az $M(\eta)$, akkor a $c\eta$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, és $M(c\eta)=cM(\eta)$.

V2.19. **7. Tétel.** Ha az η valószínűségi változónak létezik a várható értéke, és az $M(\eta)$, akkor az $a\eta+b$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, és $M(a\eta+b)=aM(\eta)+b$.

V2.20. **Momentumok.**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az η valószínűségi változó n-edik ($n \in N$) momentumán:

Diszkrét esetben $M(\eta^n)=\sum_i x_i^n p_i$ összeget értjük.

Folytonos esetben $M(\eta^n)=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx$ impropius integrált értjük.

V2.21. **Szórás.**

Kérdés: az $M(\eta)$ várható érték körül hogyan ingadoznak a valószínűségi változó lehetséges értékei. Vizsgálandó kifejezés: $\eta - M(\eta)$.

Az η valószínűségi változó **szórásnégyzet**én a $D^2(\eta) = M([\eta - M(\eta)]^2)$ várható értéket értjük.

Az ebből vont négyzetgyök a **szórás**, $D^2(\eta) = \sqrt{M([\eta - M(\eta)]^2)}$

V2.22. **8. Tétel.** Ha az η, és η^2 valószínűségi változók várható értékeik léteznek, akkor a szórásnégyzet, $D^2(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta)$

V2.23. **9. Tétel.** Ha az η valószínűségi változó szórásnégyzete létezik, akkor a $c\eta$ valószínűségi változó szórásnégyzete is létezik, és $D^2(c\eta) = c^2 D^2(\eta)$.

V2.24. **10. Tétel.** Ha az η valószínűségi változó szórásnégyzete létezik, akkor az $a\eta+b$ valószínűségi változó szórásnégyzete is létezik, és $D^2(a\eta + b) = a^2 D^2(\eta)$.

V2.25. **Valószínűség-eloszlások - Nevezetes (speciális) eloszlások.**

Az eloszlásokon belül elkülönítünk két csoportot: diszkrét-, és folytonos eloszlások.

Diszkrét nevezetes eloszlások.

V2.26.

Karakterisztikus eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei $\{0,1\}$ (például selejt, nem selejt), és η vegye fel ezeket az értékeket $P(\eta=1)=p$, $P(\eta=0)=1-p=q$, $0 \le p \le 1$ valószínűségekkel, akkor az η-t karakterisztikus eloszlású valószínűségi változónak nevezzük

Várható értéke: $M(\eta)=1 \cdot p+0 \cdot q=p$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=1^2p+0^2q-p^2=p(1-p)=pq$.

Szórása: $D(\eta)=\sqrt{pq}$.

V2.27.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Egyenletes eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$ valós számok, és vegye fel azokat $p_i=P(\eta=x_i)=\frac{1}{n}$, $i=1,2,3,\dots,n$ valószínűséggel, akkor az η-t egyenletes eloszlású valószínűségi változónak nevezzük

Várható értéke: $M(\eta)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\frac{x_3}{n}+\dots+\frac{x_n}{n}=\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,

(számtani átlag, számtani közép).

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - M^2(\eta)$.

Szórása: a szórásnégyzet négyzetgyöke.

V2.28.

Binomiális (Bernoulli) eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei $\{0,1,2,\dots,n\}$ természetes számok, és vegye fel azokat: $p_k=P(\eta=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k=0,1,2,\dots,n$, $0<p<1$, $q=1-p$ valószínűséggel, akkor a η-t binomiális (Bernoulli) eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.

Lásd ismétléses mintavétel.

Várható értéke: $M(\eta)=\sum_{k=0}^{n} kp_k=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=np$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k}-M^2(\eta)=npq$.

Szórása: $D(\eta)=\sqrt{npq}$.

V2.29.

Hipergeometrikus eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei $\{0,1,2,\dots,n\}$ természetes számok, és vegye fel azokat: $p_k=P(\eta=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k=0,1,2,\dots,n$, $n\le\min(M,N-M)$, N, $M\in Z^+$ valószínűséggel, akkor a η-t hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.
Lásd ismétlésnélküli mintavétel.

Várható értéke: $M(\eta)=\sum_{k=0}^{n} kp_k=\sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=np$, $p=\frac{M}{N}$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}-M^2(\eta)=npq\frac{N-n}{N-1}$.

Szórása: $D(\eta)=\sqrt{npq\frac{N-n}{N-1}}$.

V2.30.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Poisson eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei {0,1,2,...} természetes számok, és vegye fel azokat: $p_k=P(\eta=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, k=0,1,2,..., $\lambda>0$ -az e Euler szám-valószínűséggel, akkor a η-t Poisson eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.

Várható értéke: $M(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-M^2(\eta)=\lambda$.

Szórása: $D(\eta)=\sqrt{\lambda}$.

V2.31.

Geometriai eloszlás

Ha az η valószínűségi változó lehetséges értékei {1,2,...} természetes számok, és vegye fel azokat: $p_k=P(\eta=k)=pq^{k-1}$, k=1,2,3,..., 0<p<1, q=1-p valószínűséggel, akkor a η-t geometriai eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.

Várható értéke: $M(\eta)=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k=\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}=p^{-1}$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1}-M^2(\eta)=qp^{-2}$.

Szórása: $D(\eta)=\sqrt{q}\,p^{-1}$.

Folytonos nevezetes eloszlások.

V2.32.

Egyenletes eloszlás

Az η valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az]a,b[nyílt intervallumon, ha sűrűségfüggvénye: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & ha\ \ a<x<b\\ 0, & egyébként\end{cases}$

Eloszlásfüggvénye: $F(x)=\begin{cases}0, & ha\ \ x\le a\\ \frac{1}{b-a}\int_a^x dt, & ha\ \ a<x\le b\\ 1, & ha\ \ b<x\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & ha\ \ x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, & ha\ \ a<x\le b\\ 1, & ha\ \ b<x\end{cases}$

Várható értéke: $M(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(a-b)(a+b)}{2(a-b)}=\frac{a+b}{2}$

Szórásnégyzete:

$D^2(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx-M^2(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$ $D(\eta)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

V2.33.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Exponenciális eloszlás

Az η valószínűségi változót exponenciális eloszlásának nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & ha\ x\geq 0\\ 0, & ha\ x<0\end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye: $F(x)=\begin{cases}0, & ha\ x\leq 0\\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt, & ha\ x>0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & ha\ x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & ha\ x>0\end{cases}$, mert

$$\lambda\int_a^x e^{-\lambda t}dt=\lambda\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^x=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}$$

Várható értéke:

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\lambda\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx=[-xe^{-\lambda x}-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-xe^{-\lambda x}-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x})+0+\tfrac{1}{\lambda}=-\lim\tfrac{x}{e^{\lambda x}}-\tfrac{1}{\lambda}\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{e^{\lambda x}}+\tfrac{1}{\lambda}=\tfrac{1}{\lambda}\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{e^{\lambda x}}-0+\tfrac{1}{\lambda}=\tfrac{1}{\lambda}0+\tfrac{1}{\lambda}=\tfrac{1}{\lambda}$$

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2(\eta)=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$, $D(\eta)=\frac{1}{\lambda}$

V2.34.

Normális eloszlás

Nagy jelentősége van a természetben, a műszaki, gazdasági életben, a biológiában, stb. A többi eloszlást is közelíthetjük vele.

Az η valószínűségi változót normális (Gauss) eloszlásának nevezzük, ha sűrűségfüggvénye: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in R$, ahol m, σ valós konstans paraméterek.

f(x) képe a haranggörbe.

Eloszlásfüggvénye: $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$, $x\in R$.

Várható értéke: $M(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=m$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2(\eta)=\sigma^2$, a szórás $D(\eta)=\sigma$.

Normális eloszlás jelölése: $N(m, \sigma)$.

V2.35.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Standard normális eloszlás

N(0,1) normális eloszlás: egy transzformációval bármely N(m, σ) normális eloszlás átvihető standard eloszlásba. Lásd standardizálás.
N(0,1) eloszlásra rendelkezésünkre áll F(x) és f(x) táblázat.

Az η valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha

Sűrűségfüggvénye: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in R$.

Eloszlásfüggvénye: $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dx$, $x\in R$.

Várható értéke: $M(\eta)=m=0$.

Szórásnégyzete: $D^2(\eta)=\sigma^2=1$, a szórás $D(\eta)=\sigma=1$.

φ(x) tulajdonságai: Páros függvény azaz: $\varphi(-x)=\varphi(x)$, a maximumát az x=0-ban veszi fel.

ϕ(x) tulajdonságai: $\phi(-x)=1-\phi(x)$ (ezért csak a pozitív x-ekre van táblázat), a függőleges tengelyt a függvény grafikonja a 0,5 pontban metszi.

V2.36. **Standardizálás.**

Egy $N(m,\sigma)$ normális eloszlást átvihetünk, transzformálhatunk N(0,1) standard normális eloszlásra. A belső transzformáció: $F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

V2.37. **Nagy számok törvénye.**

A bemutatott tétel a matematikai statisztika egy fejezetének egyik eleme. A fejezetben a gyakorlati tapasztalatok és az elmélet kapcsolatát bizonyítja a matematikai statisztika. Az itt szereplő tétel alapozza meg azt, hogy a relatív gyakorisággal közelíthetjük a valószínűséget.

V2.38. **11. Tétel.** Tekintsünk egy kísérletet az Ω eseménytéren, legyen a kísérlet kimenetele A, ennek valószínűsége $P(A)=p$. Végezzünk n kísérletet Ω -n. Jelöljük η_n-vel az A esemény gyakoriságát. Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$ és $\delta>0$ esetén létezik olyan n_0 küszöb szám, amelyre teljesül, hogy $P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\delta$, hacsak $n>n_0$. Átalakításokkal: $P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{\varepsilon^2 n}$, ahol $q=P(\overline{A})$. Ellentett eseményre: $P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{\varepsilon^2 n}$.

V2.39. **Központi (centrális) határeloszlás-tétel.**

A normális eloszlás kiemelkedő fontosságának matematikai alapjait bizonyítja ez a tétel.

Hasonlóan az előző fejetehez (Nagy számok törvényei), ez a tétel is a matematikai statisztika egy fejezetének egy eleme.

V2.40. **12. Tétel.**

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

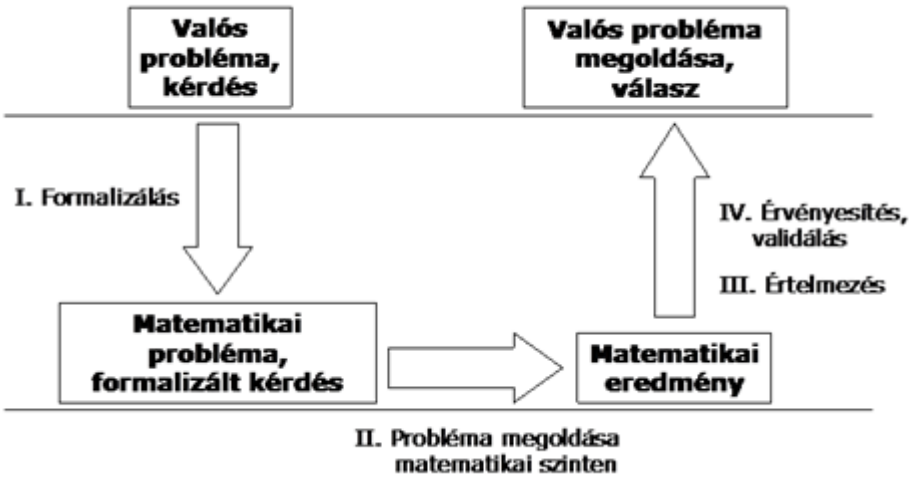
a) Legyen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $M(\eta_i) = m$, $D(\eta_i) = \sigma$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ $\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots \eta_n}{n}$ várható értékű, és szórású valószínűségi változók, $M(\eta) = m$, $D(\eta) = \sigma$ valószínűségi változó (számtani közép) várható értéke szintén , szórása .

b) Legyen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ azonos várható értékű, és szórású valószínűségi változók, $M(\eta_i) = m$, $D(\eta_i) = \sigma$, $i = 1,2,3,\ldots,n$. Legyen $\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$, n=1,2,3, … valószínűségi változók sorozatainak eloszlásfüggvényeik sorozata. Ez egy standard normális eloszlású sorozat.

13. 13. A modellalkotásról ismét

Ebben a fejezetben összefoglalásként visszatérünk a kezdő fejezet témaköréhez, a matematikai modellek építéséhez. Az előző fejezetek összefoglalását és bővítését adták a középiskolai matematika tananyagnak. Ennek alkalmazását és felhasználását segíti a modellalkotás folyamatának bemutatott lépései (1. ábra). Mindezt a vázlatosan kidolgozott feladatokon keresztül mutatjuk be itt.

1.9. ábra - 1. ábra - A modellalkotás lépései



Üzemanyag fogyasztás.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

Egy autós 432 kilométert tett meg 48 liter üzemanyaggal. Még 180 kilométert kell az út végéig megtennie. Mennyi üzemanyagra van előre láthatólag szüksége? (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(arányok képzése; egyenes arányosság - függvények témaköre)

Tudjuk, hogy minél nagyobb távolságot tesz meg az autós, annál több üzemanyagra van szüksége. Tehát az üzemanyag szükséglet arányos a megtett távolsággal.

Kérdésünk: 432 km 48 liter → 180 km ? liter

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Jelöljük a kialakítandó modellben a megtett távolság x-el; a szükséges üzemanyag-mennyiségét y-al.

A fentiek szerint y egyenes arányban van x-el.

Formalizálva: $y = k \cdot x$;

Itt k arányossági tényező amit most állandónak tekintünk

k értéke?

$y = 48$

$x = 432$

$k = y / x = 48 / 432 = 1 / 9$

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

Feladatunkban

$x = 180$

$y = ?$

$y = 1 / 9 * 180 = 20$

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

A matematikai eredmény értelmezve: 20 liter üzemanyagra van szükség a 180 kilométer megtételéhez.

A feladat lezárásaként, gondoljuk végig, hogy milyen határok, keretek között alkalmazható a modell.

Reális a 20 liter fogyasztás?

180 km 20 liter

100 km q liter

$q : 20 = 100 : 180$

…

$q = 11.1$

Tehát 100 kilométerre eső fogyasztás 11,1 liter.

Ez egy nagyobb teljesítményű gépkocsi fogyasztásaként elfogadható.

Nyilvánvaló, hogy az utazás feltételeinek megváltozása a k paraméter megváltozását eredményezi.

Például, amennyiben az első 432 kilométeren hegyeken át vezetett az út, a hátralévő 180 kilométer pedig sík vidék, akkor minden bizonnyal más (20 liternél kevesebb) lesz a szükséges üzemanyag mennyiség.

A modell pontosítása érdekében sok más körülményt figyelembe vehetnénk (időjárás, szél, stb.) - így egzaktabb (a valós világot jobban közelítő) modell kialakítása lenne lehetséges.

Csempézés.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Egy 6 méter hosszú és 5 méter széles szoba padlózatát kell lecsempéznünk 30 centiméteres, négyzet alakú mozaikcsempékkel. Hány csempére van szükségünk? Oldjuk meg a feladatot matematikai modell kialakításával. (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(arányok képzése; egyenes arányosság - függvények témaköre)

A feladat megoldásához ki kell számítanunk mind a szoba, mind a csempék területét. A szoba T = 6 m x 5 m = 30 m^2 területű. Egy csempe t = 0,3 m x 0,3 m = 0,09 m^2 területet fed le. Amennyiben osztjuk a T területet egy csempe területével, úgy megkapjuk a szükséges x darabszámot: x = T / t .

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

x = 30 / 0,09 = 333,33 ~ 334

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

A szükséges csempeszám: 334 darab.

A tapasztaltabb „csempézők” rázzák a fejüket, … - így nem lesz jó; előre látják, hogy kevés lesz a csempe. Valóban, amennyiben végiggondoljuk magát a csempézés folyamatát, egyből szembeötlik, hogy nem minden esetben tudunk egész csempéket használni. Újra kell gondolnunk a feladatot!!!

B'. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(arányok képzése; egyenes arányosság - függvények témaköre)

Mivel 6 m hosszú a szoba, 6 m / 0,3 m = 20 darab csempe kell egy sorba.

Az 5 m szélesség lefedéséhez 5 m / 0,3 m = 16,67 sor kellene.

Ez 16 csempesor, és egy darabolt sort.

Mivel 16 * 0,3 m = 4,8 m; és 5 m – 4,8 m = 0,2 m; ez a 0,2 m-nyi (6 m * 0,2 m) rész nem kerül lefedésre egész csempékkel.

Darabolnunk kell a csempéket, mégpedig 20 darabot kell elvágnunk, mert egy csempe darabolása során egy 0,2 m és egy 0,1 m széles darabunk lesz, amiből a 0,2-es darabot használjuk fel közvetlenül.

Tovább takarékoskodhatnánk, amennyiben a 0,1-es darabokat is felhasználnánk, de később látjuk, hogy más problémák is lehetségesek. Rögzítsük, hogy a 0,1 m-es darabokat nem használjuk fel.

Így a modellünk:

[szoba hosszúsága / csempehossz (egész értékkel számolva) x szoba szélessége / csempehossz (egész értékkel számolva)] + a darabolt csempék száma.

C'. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

Esetünkben a modellt alkalmazva:

6 / 0,3 egészre vágott érték * 5 / 0,3 egészre vágott érték + darabolt sor = [20 * 16] + 20 = 320 + 20 = 340.

D'. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

340 csempére van szükségünk a szoba lefedéséhez.

Az érvényesítés és validálás egy pontban már szóba került.

Rögzítettük, hogy 0,1 m-es darabokat nem használunk. Amennyiben nem ragaszkodnánk ehhez, akkor újabb modell kellene kialakítanunk. Másik, valós élethez közelebb álló kérdés, amit vizsgálnunk kell, az a gyakorlati megvalósítás tapasztalata. A csempék dobozokba csomagolva érkeznek, és néha előfordul, hogy sérült darabok

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

is vannak a dobozokban. Szintén figyelnünk kell arra is, hogy a darabolás sem minden esetben sikerül tökéletesen. Itt is keletkezhet selejt. Érdemes a szakemberek tanácsát megfogadni, és a pontosan kiszámított darabszám felett is vásárolni csempéket. Ez újabb modell építését jelenti – például a pontos darabszámon felüli arányt (%) meghatározva (ennek meghatározása a statisztika eszköztárának bevonását igényli). Zárjuk feladatunkat ezekkel a gondolatokkal. Fogadjuk el megoldásként a 340 darabos csempeszámot.

Halak egy tóban.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

Becsüljük meg egy tóban a halak számát. (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(arányok képzése; egyenes arányosság - függvények témaköre + valószínűségszámítás - mintavétel)

Nyilvánvaló, hogy nem fogadjuk el a „lehalászást”, vagyis az összes hal kifogását; más módszert kell alkalmaznunk.

Módunk van:

(1) mintát vennünk,

(2) megjelölni a kifogott halakat,

(3) majd visszaengedve a mintát,

(4) újabb véletlen mintát vennünk.

A második mintában lévő jelölt halak száma támpont lehet a teljes populáció nagyságára.

Jelölje:

n a tóban lévő halak számát;

k az első mintában megjelölt halak száma;

x a második minta nagysága;

y a második mintában a jelölt halak száma.

Arányokat felállítva: $(n – k) : k = (x – y) : y$

k, x, y ismert, cél n meghatározása.

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

$k = 20$;

$x = 50$;

$y = 10$

$(n – k) : k = (x – y) : y$

$(n – 20) : 20 = (50 – 5) : 5$

$(n – 20) : 20 = 45 : 5 = 9$

$(n – 20) = 9 * 20 = 180$

$\rightarrow n = 200$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

A tóban lévő halak száma 200.

A validálás lépése figyelembe kell, hogy vegye a tó nagyságát, a halak nagyságát, fajtáját, stb.

Ez lehetne a feladat végleges lezárásának, de mivel most ilyen adatokkal nem rendelkezünk a feladatot ezen a ponton zárhatjuk le.

Farm.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

Egy farmon naponta legalább 800 kg speciális tápanyagot használnak az állatok etetéséhez. A tápanyag gabona és szójabab keveréke. Ezek összetétele a következő:

1.3. táblázat - Takarmánykeverési feladat adatai

Anyag	**Protein-tartalom / kg**	**Rost-tartalom / kg**	**Ár / kg**
Kukorica	0,09	0,02	10 egység
Szójabab	0,60	0,06	20 egység

Az élelmezési előírások szerint a speciális tápanyagban legalább 30% szükséges a proteinből és 5% a rostból. Határozzuk meg a tápanyag felhasználás napi minimális költségét. (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(egyenlőtlenség rendszer - függvények - optimalizásái feladat)

A cél a minimális napi költség, vele együtt a szükséges anyagmennyiségek meghatározása – gabona és szójabab.

Jelölje:

x – a szükséges gabona mennyiségét

y – a szükséges szójabab mennyiségét

z – a költség

A költségek számítása szerint: $z = 10\,x + 20\,y$.

Így a probléma matematikai alakja z minimalizálása a következő feltételek mellett:

(a) a farm legalább 800 kg speciális élelmet használ naponta: $x + y \geq 800$

(b) az étrendben legalább 30% protein: $0{,}09\,x + 0{,}6\,y \geq 0{,}3\,(x + y)$

(c) az étrendben legalább 5% rost: $0{,}02\,x + 0{,}06\,y \geq 0{,}05\,(x + y)$

A feltételek egyszerüsítve:

(a) $x + y \geq 800$

(b) $0{,}21\,x - 0{,}3\,y \leq 0$

(c) $0{,}03\,x - 0{,}01\,y \geq 0$

Ez az egyenlőtlenség-rendszer a probléma matematikai modellje.

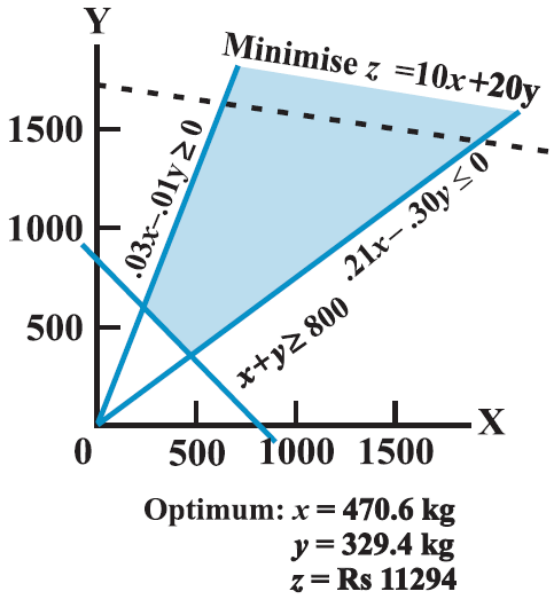
Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Olyan x és y értékeket keresünk, amelyek kielégítik a feltételeket.

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

A probléma több módon is megoldható.

Egy lehetséges út a grafikus megoldás, amikor az (a), (b), (c) egyenlőtlenségeket egy koordináta rendszerben ábrázoljuk és leolvassuk a megoldást. (ábra)



VAGY

megoldjuk az egyenlőtlenség-rendszert a z = 10 x + 20 y költséget minimalizálva:

Egyenlőségekkel számolva:

(a) x + y = 800;

(b) x = 1,4285 y;

(a) 1,4285 y + y = 2,4285 y = 800;

y = 800 / 2,4285 = 329,42;

x = 1,4285 * 329, 42 = 470,57

z = 10 * 470,6 + 20 * 329,4 = 11294

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

A grafikus megoldás lehetővé teszi a könnyű ellenőrizhetőséget, ami hozzájárul az értelmezéshez és validáláshoz:

A minimális összeg, amit az állatok etetése (ilyen feltételek mellett) megkövetel: 11294 pénzegység.

Ehhez 460,6 kg gabona és 329,4 kg szójabab szükséges.

A feladat értelmezhető, a valóságnak megfelelő nagyságrendű eredményeket kaptunk, a modell elfogadható.

Iskolázottság.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

2000-ben az Egyesült Nemeztek (United Nations; UN) 191 tagállama aláírt egy deklarációt, amiben 2015-re elérendő célokat rögzítettek (Millineum Development Goals). Ezen célok egyike volt a nők (lányok) ugyanolyan arányú részvétele az oktatásban alap-, közép- és felsőfokon, mint a férfiak (fiúk) esetén. India, mint az aláírók egyike, szándékozik emelni a nők részvételét az oktatásban. Rendelkezésünkre állnak korábbi és az aláírás évét követően adatok és becslések a nők arányára általános iskolai oktatás köréből:

1991-92 41,9%

1992-93 42,6%

1993-94 42,7%

1994-95 42,9%

1995-96 43,1%

1996-97 43,2%

1997-98 43,5%

1998-99 43,5%

1999-2000 43,6% (becslés)

2000-2001 43,7% (becslés)

2001-2002 44,1% (becslés)

Vizsgáljuk a nők arányának változását az általános iskolai körben.

Adjunk becslést, hogy mikor éri el a nők aránya az 50 %-ot. (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(függvények - lineáris modell)

Első lépésben konvertáljuk a feladatot matematikai problémává!

Alakítsuk át az adatsort.

Az 1991-92-es tanév 41,9% -os adata a tanév elején beiratkozottakat jelöli.

Ezt jelöljük 0. évként.

A többi év adatai sorban a következők:

0. 41,9%

1. 42,6%

2. 42,7%

3. 42,9%

4. 43,1%

5. 43,2%

6. 43,5%

7. 43,5%

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

8. 43,6%

9. 43,7%

10. 44,1%

Számítsuk ki és ábrázoljuk az évenkénti növekedéseket (ábra és táblázat):

Év	Felvett nők aránya	Növekedés az előző évhez képest
0	41,9	0
1	42,6	0,7
2	42,7	0,1
3	42,9	0,2
4	43,1	0,2
5	43,2	0,1
6	43,5	0,3
7	43,5	0
8	43,6	0,1
9	43,7	0,1
10	44,1	0,4

A növekedési adtok átlaga: (0,7+0,1+0,2+0,2+0,1+0,3+0+0,1+0,1+0,4)/10 = 0,22

Tegyük fel (modellünkben), hogy ez az átlagos növekedési ütem (0,22%) a későbbiekben is fennáll.

A növekedés részletezve:

Az első évben: a 0. évről az elsőre 41,9 + 0,22 = 42,12

A második évben: az 1. évről a másodikra 41,9 + 0,22 + 0,22 = 41,9 + 2 * 0,22 = 42,34

A harmadik évben: a 2. évről a harmadikra 41,9 + 0,22 + 0,22 + 0,22 = 41,9 + 3 * 0,22 = 42,56 …

A z n. évben: az n-1. évről az n.-re: 41,9 + n * 0,22

Összeállt tehát matematikai modellünk, amely választ ad arra a kérdésre, hogy hogyan növekszik átlagosan a felvett nők aránya.

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

A feladat az 50% elérésének időpontját keresi, ami a modell „működtetésével” kiszámítható.

Jelöljük e keresett évet (0. évtől számítva) t-vel:

50 = 41,9 + t * 0,22

t = (50 – 41,9) / 0,22 = 36,8

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Mivel az évek csak egész értékkel értelmezhetők, így a válaszunk: 37 év szükséges ahhoz, hogy elérje a nők iskolázottsági aránya az 50 %-ot.

Ez 1991 + 37 = 2028 -ban következik be.

A validálási pont dönt arról, hogy ezt az eredményt valósnak, elfogadhatónak tartjuk a tapasztalatokkal és más megfontolásokkal együttvéve.

Tegyük magunkban fel azt a kérdést, hogy lehetséges-e tovább javítani a modellen, finomítva az első szakasz eredményeit.

(**A'.** VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS). Ekkor újabb modellt kell építenünk: igazából egy új feladattal nézünk szembe az eredeti kérdésen belül.

A modell és a valóság összevetése a modell és a valós számértékek összehasonlításán keresztül lehetséges (táblázat)

Év	Felvett nők aránya	Növekedés az előző évhez képest	Modell értékei	Különbség: valódi - modell
0	41,9	0	41,9	0
1	42,6	0,7	42,12	0,48
2	42,7	0,1	42,34	0,36
3	42,9	0,2	42,56	0,34
4	43,1	0,2	42,78	0,32
5	43,2	0,1	43,00	0,20
6	43,5	0,3	43,22	0,28
7	43,5	0	43,44	0,06
8	43,6	0,1	43,66	-0,06
9	43,7	0,1	43,88	-0,18
10	44,1	0,4	44,10	0,00

Láthatjuk, hogy az eltérések igen különbözők, de megközelíthetik a 0,5 %-ot is! Számítsunk korrigáló tényezőt az első modellhez.

B'. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS – RE - FORMALIZÁLÁS.

Számítsuk ki a különbségek átlagát: (0 + 0,48 + 0,36 + 0,34 + 0,32 + 0,20 + 0,28 + 0,06 -0,06 – 0,18 + 0) / 10 = 0,18

Ezt az értéket építsük be korrigáló tényezőként az első modellbe:

Az n. évben: az n-1. évről az n.-re: 41,9 + n * 0,22 + 0,18 = 42,08 + 0,22 * n

C'. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

Ismétlés: A feladat az 50% elérésének időpontját keresi, ami a modell „működtetésével” kiszámítható. jelöljük e keresett évet (0. évtől számítva) t-vel:

50 = 42,08 + t * 0,22

t = (50 – 42,08) / 0,22 = 36

D'. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

36 év szükséges ahhoz, hogy elérje a nők iskolázottsági aránya az 50 %-ot.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ez 1991 + 36 = 2027 -ben következik be.

A validálási ponton ismét felvetődik az eredeti adatok és a (2.) modell adatainak összevetése:

Év	Felvett nők aránya	Növekedés az előző évhez képest	1. Modell értékei	Különbség: valódi – 1. modell	2. Modell értékei	Különbség: valódi – 2. modell
0	41,9	0	41,9	0	41,9	0
1	42,6	0,7	42,12	0,48	42,3	0,3
2	42,7	0,1	42,34	0,36	42,52	0,18
3	42,9	0,2	42,56	0,34	42,74	0,16
4	43,1	0,2	42,78	0,32	42,96	0,14
5	43,2	0,1	43,00	0,20	43,18	0,02
6	43,5	0,3	43,22	0,28	43,40	0,1
7	43,5	0	43,44	0,06	43,62	-0,12
8	43,6	0,1	43,66	-0,06	43,84	-0,24
9	43,7	0,1	43,88	-0,18	44,06	-0,36
10	44,1	0,4	44,10	0,00	44,28	-0,18

Látjuk, hogy a második modell számított értékei közelebb esnek a valódi értékekhez.

A második modell számított értékei és a valódi adatok különbségének átlaga 0.

Fogadjuk el a feladat lezárásaként ezt a második modellt és az általa szolgáltatott 36 évet.

(Azért az örök kutatói kérdést feltesszük – legalább zárójelesen: -) Fokozható tovább a modell pontossága ?)

Populáció nagysága.

A. VALÓS PROBLÉMA, KÉRDÉS.

Adjuk meg, hogy hány ember él egy vizsgált országban 10 év múlva. (Mathematics – Textbook for Class IX – India, CERT alapján)

B. MATEMATIKAI PROBLÉMA, FORMALIZÁLT KÉRDÉS - FORMALIZÁLÁS.

(exponenciális növekedési függvény kialakítása)

A válaszhoz több lépésben kell közelítenünk a problémához.

Nyilvánvaló, hogy a populáció változása időben a születések révén növekszik, a halálozások által csökken.

Modellünkbe ne vonjunk be más paramétereket (népmozgalom, migráció, stb.).

A populációt különböző időpontokban vizsgáljuk, tehát szükséges az idő jelölése (évek): t

t = 0, 1, 2, 3, …, 10, … (t=0 a jelen, t=1 a következő év, stb.)

Jelöljük a populáció nagyságát a t. évben (január 1.): P(t).

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Jelölje a születések számát egy adott t évben: B(t).

Jelölje a halálozások számát egy adott t évben: D(t).

A t+1. évben a lakosságszám: P(t+1) = P(t) + B(t) – D(t).

Születési ráta: a (t; t+1) időintervallumban: b = B(t) / P(t).

Halálozási ráta a (t; t+1) időintervallumban d = D(t) / P(t).

Tegyük fel, hogy modellünkben b és d paraméterek az évek múlásával nem változik (konstans paraméterek)

Mindezek alapján a matematikai modell alakja (^ a hatványozást jelöli, a^2 jelentése a a négyzeten, ...):

P(t+1) = P(t) + B(t) – D(t) = P(t) + b P(t) – d P(t) = P(t) * (1 + b -d).

Ha t=0, akkor P(1) = (1 + b – d) * P(0)

Ha t=1, akkor P(2) = (1 + b – d) * P(1) = (1 + b – d) * (1 + b – d) * P(0) = (1 + b – d)^2 * P(0)

Ha t=t, akkor P(t) = (1 + b – d)^t * P(0)

Az 1 + b – d konstans értékét gyakran jelöli r (növekedési ráta; Malthusian paraméter), így a képlet új alakja: P(t) = P(0) * r^t

P(t) egy exponenciális függvény.

C. MATEMATIKAI EREDMÉNY – MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA.

Igazi matematikai eredményt akkor kapunk, ha konkretizáljuk az országot, annak szükséges paramétereit.

Legyen

P(0) = 250 000 000

b = 0,02

d = 0,01

t =10

Behelyettesítve: P(10) = 1,01 10 250 000 000 P(10) = 276 155 531, 25

D. VALÓS PROBLÉMA MEGOLDÁSA, VÁLASZ – ÉRTELEMZÉS, ÉRVÉNYESÍTÉS ÉS VALIDÁLÁS.

A konkrét számérték egy negyed személyt jelöl, ezt kerekítenünk kell: P(10) = 276 155 531.

A modell visszacsatolása és ellenőrzése lehet az, hogy egy korábbi időszakaszra alkalmazzuk az összefüggéseket, majd összevetjük eredményeinket a mért populáció-számokkal.

Mivel rengeteg paraméter befolyásoló tényezőként lép fel egy populáció népességszámának kialakulásakor, nem várhatunk pontos becslést.

Pontosabb eredmények eléréséhez újabb modelleket kellene kidolgoznunk és ellenőriznünk, de első megközelítésként mindenképpen eredményesen zárhatjuk le a feladatot.

14. 14. Modulzárás

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A modul végére érve elmondhatjuk, hogy áttekintettük a matematikai modellakotás sok-sok elméleti elemét. Azonban azzal is tisztában kell lennünk, hogy számos fejezet kimaradt, mint például a differenciálegyenletek témaköre, vagy a gráfokkal foglalkozó fejezetek. Lezárásként néhány további forrást ajánlunk, amelyek továbbvezetik a témában érdeklődőket:

- Karsai János: Matematika gyógyszerészhallgatók számára. Szent-Györgyi Albert Orvostudományi Egyetem, Orvosi Informatikai Intézet, Szeged, 1996.
- Fodor János: Biomatematika. Szent István Egyetem Állatorvos-tudományi Kar, Biomatematikai és Számítástechnikai Tanszék.Budapest, 2007.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.