A VÉGESELEM-MÓDSZER ALAPJAI

ÚJ SZÉCHENYI TERV

A projekt címe: „Egységesített Jármű- és mobilgépek képzés- és tananyagfejlesztés”

A megvalósítás érdekében létrehozott konzorcium résztvevői:

KECSKEMÉTI FŐISKOLA
BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
AIPA ALFÖLDI IPARFEJLESZTÉSI NONPROFIT KÖZHASZNÚ KFT.

Fővállalkozó: TELVICE KFT.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Közlekedésmérnöki Kar

Írta:
VÖRÖS GÁBOR

FORBERGER ÁRPÁD

Lektorálta:
BORBÁS LAJOS

A VÉGESELEM-MÓDSZER ALAPJAI

Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2012

COPYRIGHT: © 2012-2017, Dr. Vörös Gábor, Forberger Árpád, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki Kar

LEKTORÁLTA: Dr. Borbás Lajos

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978-963-279-653-6
KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában
FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2.A/2-10/1-2010-0018 számú, „Egységesített jármű- és mobilgépek képzés- és tananyagfejlesztés” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638
MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK:

Rugalmasságtan alapegyenletei, virtuális munka elve, alakváltozási energia, végeselem módszer, merevségi mátrix, tömegmátrix, geometriai merevség, rácsos szerkezet, rúdelemek, másodrendű rúdelmélet, síkfeladatok.

ÖSSZEFOGLALÁS:

Az elmúlt évtizedekben a végeselem módszer (VEM) a mérnöki tervezés, modellezés és a szimuláció nélkülözhetetlen eszköze lett. Ez a jegyzet elsősorban az alapképzésben (BSc) részt vevőknek szól, ezért a feltételezett előtanulmányok a statika, szilárdságtan, dinamika, a matematikai analízis alapjai, közönséges és parciális differenciál egyenletek, továbbá a mátrixszámítás.
Az elméleti megalapozó, bevezető fejezetek röviden bemutatják a lineáris rugalmasságtan lokális és globális modelljeit, a rugalmasságtani alapegyenleteket és a virtuális munka elvét és végeselem módszer – elmozdulás módszer – alapgondolatát, a legfontosabb mennyiségek, elemmátrixok levezetését. A jegyzet részletesen tárgyalja a mérnöki gyakorlatban fontos rúd véges elemeket, a síkbeli rácsos szerkezeteknél alkalmazott csuklós végpontú elemet és a hajlított gerenda elemet. Több kidolgozott számpélda segíti a végeselem eljárás algoritmusának és a különböző analízisek – statika, dinamika, stabilitás – megismerését és megértését.
A záró fejezet a síkfeladatok végeselem modellezési lehetőségeit ismerteti.
A jegyzet végén található függelék a végeselem algoritmusokban alapvetően fontos mátrixszámítási ismereteket foglalja össze.
Célunk a mérnöki, elsősorban a járműmérnöki területen tevékenykedő, elméletileg jól felkészült végeselem szoftver felhasználók kiképzése.

Tartalom

1 Bevezetés 7

Fontosabb mennyiségek jelölése 10

2 A rugalmasságtan alapegyenletei 12

2.1 Lokális egyenletek 12
2.1.1 Alakváltozások, geometriai egyenletek 13
2.1.2 Feszültségi állapot, egyensúlyi egyenletek 16
2.1.3 Anyagtörvény 19
2.1.4 Peremfeltételek 20
2.1.5 Lokális egyenletek összefoglalása 22
2.1.6 Példa: Sík lemez mozgása 22
2.2 Globális modell, a virtuális munka elve 24
2.2.1 Példa: Raklap terhelése 26
2.2.2 Példa: Rugalmas kötél lehajlása 27
2.2.3 Példa: Láncrendszer mozgásegyenlete 28
2.2.4 Szilárd test alakváltozási energia növekménye 30
2.2.5 A virtuális munka elve 31
2.2.6 A teljes potenciál szélsőérték elve 32
2.2.7 Kezdeti feszültségi állapot 34

3 Rúdelemek egyenletei 36

3.1 Az Euler – Bernoulli rúdelmélet 37
3.1.1 A virtuális munka elve 39
3.1.2 A Rayleigh-Ritz módszer 42
3.1.3 Példa: Rúd megoszló terheléssel 43
3.1.4 Dinamikai feladatok, szabad lengések 47
3.1.5 Példa: Hajlító lengés 48
3.1.6 Nyomott rúdelemek kihajlása 51
3.1.7 Példa: Egyenes rúd kihajlása 54
3.1.8 Példa: A másodrendű elmélet 57
3.2 A Timoshenko féle rúdelmélet 59
3.2.1 Példa: Nyírási elmozdulás 60
3.2.2 A nyíró terület 62
3.3 A St'Venant féle csavarási modell 63
3.3.1 Csavarási másodrendű nyomaték 66
3.3.2 A csavaró/nyíró középpont 66
3.3.3 A virtuális munka elve 67

4 A végeselem-módszer egyenletei 69

4.1 Elemek, mátrixok 70
4.1.1 Interpoláció 71
4.1.2 Elem mátrixok 72
4.1.3 Kinematikai peremfeltételek 73
4.1.4 Támaszerők és belső erők számítása 74
4.2 Végeselem analízis 75
4.2.1 Lineáris statika 75

4.2.2 Másodrendű statika 76
4.2.3 Kritikus terhelés 76
4.2.4 Szabad lengések, sajátfrekvenciák 77
4.2.5 Másodrendű dinamika 78
4.2.6 Gerjesztett mozgások 78

5 Rúdszerkezetek végeselem modelljei 80

5.1 Csuklós végpontú rúdelem 80
5.1.1 Elem mátrixok 81
5.1.2 Síkbeli rácsos szerkezet 82
5.1.3 Példa: Síkbeli rácsos szerkezet 84
5.2 Hajlított rúdelem 87
5.2.1 Elmozdulás interpoláció 87
5.2.2 Elem mátrixok 89
5.2.3 A rúdelem igénybevételei 92
5.2.4 Példa: Statikus terhelés 93
5.2.5 Példa: Kritikus terhelés 95
5.2.6 Példa: Szabad lengések 97
5.2.7 Síkbeli rúdszerkezet 99
5.2.8 Példa: Keret hőterhelése 102
5.3 A Timoshenko rúdelem 105
5.4 A St'Venant féle csavarási modell 106
5.5 Térbeli keretszerkezet, ... 109
5.5.1 Transzformációk 111

6 Síkfeladatok 114

6.1 Síkfeszültségi állapot 114
6.2 Sík alakváltozási állapot 116
6.3 Síkfeladatok végeselem modelljei 117
6.3.1 Lineáris háromszögelem 118
6.3.2 Példa: Sík lemez peremterhelése 125
6.3.3 Lineáris négyszög elem 131
6.4 Magasabbrendű elemek 139
6.4.1 Háromszög elemek 139
6.4.2 Négyszög elemek 140

7 A. Függelék, Mátrixszámítás 143

1 Bevezetés

Az elmúlt évtizedekben a végeselem módszer (VEM) a modellezés és a szimuláció nélkülözhetetlen eszköze lett. Ez a jegyzet elsősorban egyetemi hallgatóknak szól, de gyakorló mérnököknek is hasznos, és a lineáris mechanikai rendszerekre alkalmazható módszer egységes és részletes leírását adja. A rugalmasságtani alapelvek és az elméleti háttér ismertetésének célja az, hogy az olvasók nagy biztonsággal használják, értékeljék és minősítsék a kereskedelmi forgalomban beszerezhető végeselem eljárást is alkalmazó programrendszereket.

Az elmúlt közel két évszázad során a klasszikus mechanika területén több, a mérnöki gyakorlatban használható numerikus eljárást dolgoztak ki. Ezek egy csoportja a lokális egyenletek, a kontinuum viselkedését leíró parciális differenciálegyenlet rendszerek közvetlen megoldására szolgált, mint például a véges differencia módszer. A numerikus eljárások egy másik része a globális elvek, az energetikai szélsőérték - stacioner érték - elvek direkt megoldását, ezen belül a *Rayleigh-Ritz* módszer különböző válfajait alkalmazta. Ezen módszerek alkalmazása a bonyolultabb alakú testek, alkatrészek esetén igen komoly nehézségekbe ütközik.

A végeselem eljárás alapgondolatát, a folytonos rendszereknek a diszkrét, véges szabadságfokú elemek rendszerével történő helyettesítését, már régóta használják a fizikai és mérnöki feladatok numerikus megoldására. Erre jellemző példa az egyenes rudakból álló tartószerkezetek vizsgálati módszere ami, többek között, *Maxwell* (1864), *Castigliano* (1879) vagy *Mohr* (1868) munkásságának része. A legelső ismert publikáció, ami a bonyolult tartományok résztartományokra bontását, azokon belül pedig lineáris interpolációt és az energetikai szélsőérték elveket együtt alkalmazta *Cuorant* (1943) nevéhez fűződik, aki a nem kör keresztmetszetű rudak szabad csavarási feladatát a potenciális energia szélsőérték elve alapján vizsgálta úgy, hogy a tetszőleges alakú keresztmetszetet olyan háromszög résztartományokra bontotta, melyeken belül a megoldás lineárisan változik. A minőségi változás feltételeit a digitális számítástechnikai eszközök fejlődése és széleskörű elterjedése tette lehetővé. A végeselem módszert a ma ismert formájában *Clough, Turner* és szerzőtársaik [1] publikálták. (1956, *Boeing and Bell Aerospace*) Náluk jelentek meg először a végeselem (*finite element*), csomópont (*node*) és csomóponti változó fogalmak és kifejezések is. Az első alkalmazás kifejlesztésének célja repülőgép szárnyszerkezetek dinamikai és szilárdsági vizsgálata volt. A módszer nyilvánvaló sikere és hatékonysága, továbbá a számítástechnikai eszközök fejlődése intenzív kutatásokat indított be, aminek eredményeként ma már a végeselem eljárást a mérnöki fizika legkülönbözőbb területein használják, alkalmas többek között lineáris és nemlineáris mechanikai, áramlástani, hőtechnikai, akusztikai jelenségek modellezésére, időben állandó vagy tranziens folyamatok szimulációjára. Matematikusok tisztázták az eljárás konvergenciájával, pontosságával kapcsolatos problémákat és ezzel együtt több, ma már klasszikusnak számító könyv jelent meg, mint például

Zienkiewicz [18] és *Przemieniecki* [5] művei, amelyek még ma is korszerűnek és hasznosnak bizonyulnak. Az 1980-as években megjelentek az első magyar nyelvű, [10], [14], [15] egyetemi jegyzetek és szakkönyvek is. Mindezek eredményeként napjainkra a mérnöki tervező - elemző munka részévé váltak a végeselem eljárást valamilyen szinten alkalmazó szoftverek. Ezek között vannak a sok elemtípust és analízis lehetőséget tartalmazó általános célú végeselem programrendszerek, melyek a legkülönbözőbb mérnöki feladatok megoldására is alkalmasak (NASTRAN, ANSYS, MARC, COSMOS, ABACUS, stb.). Igen hasznosak a szerkezettípusra orientált rendszerek, melyekkel csak egy féle szerkezetet, például ipari csővezetékeket (CAEPIPE) vagy acél, vasbeton vázszerkezeteket (FemDesign, AXIS) lehet tervezni, vizsgálni. A kereskedelmi forgalomban beszerezhető progranrendszerek megbízható, intelligens használatához és a kiszámított eredmények értékeléséhez a rendszer kezelésének ismeretén túl alapos szaktudásra is szükség van, aminek hiányában a felhasználónak a szoftver csak egy zárt, titokzatos doboz.

A végeselem eljárást eredetileg szerkezetek mechanikai vizsgálatokhoz alkalmazták, és ebben a jegyzetben is a lineáris rugalmasságtani feladatokon keresztül mutatjuk be a módszer elemeit. A jegyzet elsősorban az alapképzésben (BSc) részt vevőknek szól, ezért a feltételezett előtanulmányok a statika, szilárdságtan, dinamika, a matematikai analízis alapjai, közönséges és parciális differenciál egyenletek, továbbá a mátrixszámítás.

A bevezetést követő első fejezet röviden bemutatja a lineáris rugalmasságtan lokális és globális modelljeit, a rugalmasságtani alapegyenleteket és a virtuális munka elvét. Ennek csak az a célja, hogy az előtanulmányok során megszerzett ismereteket egységes szóhasználat és jelölésrendszer alkalmazásával felidézzük.

A második fejezet részletesebben foglalkozik a járműszerkezetekben fontos rúdelméletekkel, a mérnöki gyakorlatban általánosan használt *Euler-Bernoulli* elmélettel, a nyírás hatását pontosabban leíró *Timoshenko* féle rúdmodellel. Ugyanez a fejezet részletezi, és több numerikus példával illusztrálja a virtuális munka elvének egyik közismert direkt numerikus megoldási módszerét, a *Rayleigh-Ritz* módszert. Ezek a megoldott feladatok segíthetik a virtuális munka elvének és a direkt numerikus módszerek - beleértve a végeselem eljárást is - matematikai hátterének megértését.

A harmadik fejezet a virtuális munka elvére alapuló végeselem módszer - elmozdulás módszer - alapgondolatát, a legfontosabb mennyiségek, elemmátrixok bemutatását és levezetését foglalja össze.

A negyedik fejezet a rúdszerkezetek végeselem modellezését ismerteti. Részletes leírás található a síkbeli rácsos szerkezeteknél alkalmazott csuklós végpontú elemről valamint a hajlított gerenda elemről. Több kidolgozott számpélda segíti a végeselem eljárás algoritmusának és a különböző analízisek - statika, dinamika, stabilitás - megismerését.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

Az ötödik fejezet a síkfeladatok végeselem modellezési lehetőségeit ismerteti.

A jegyzet végén található függelék a végeselem algoritmusokban alapvetően fontos mátrixszámítási ismereteket foglalja össze.

Több kidolgozott feladat és a sok ábra támogatja a bemutatott elméletek megértését és az alkalmazási készség fejlesztését, mivel egy jó ábra felér több száz magyarázó szóval. Ez a jegyzet nem egy enciklopédia, ami a végeselem módszer keretében használatos vagy ismert technikákat részletesen ismerteti, továbbá nem cél a végeselem programfejlesztői ismeretek átadása. Célunk a mérnöki, elsősorban a járműmérnöki területen tevékenykedő, elméletileg jól felkészült szoftver felhasználók kiképzése.

Fontosabb mennyiségek jelölése

A	rúdelem keresztmetszete
C	rúd keresztmetszet középpontja
$\mathbf{C}$	rugalmas anyag jellemzőinek mátrixa
E	rugalmassági modulus
G	csúsztató rugalmassági modulus
$\mathbf{G}$	nagy alakváltozások másodfokú része
$\mathbf{H}$	nagy alakváltozások mátrixa
I_y, I_x	rúd keresztmetszet fő másodrendű nyomatékok
J	csavarási másodrendű nyomaték
$\mathbf{K}$	rendszer lineáris merevségi mátrixa
$\boldsymbol{k}^e$	elem lineáris merevségi mátrixa
$\mathbf{K}_\mathrm{G}$	rendszer geometriai merevségi mátrixa
L	rúdelem hossza
$\mathbf{M}$	rendszer tömegmátrixa
$\boldsymbol{m}^e$	elem tömegmátrixa
M_t	rúd csavaró igénybevételei
M_y, M_z	rúd hajlító igénybevételei
N	rúd húzó igénybevétele
N_i	interpolációs (forma) függvények
$\mathbf{N}$	interpolációs (forma) függvénymátrix
$\mathbf{p}$	felületi terhelés
$\mathbf{P}$	rendszer csomóponti terhelések mátrixa
p_x, p_y	megoszló terhelés
$\mathbf{q}$	térfogati megoszló terhelés
T	keresztmetszet nyíró/csavaró középpontja
$\mathbf{T}$	transzformáció mátrixa

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

U	alakváltozási energia
$\mathbf{u}$	elmozdulás mátrix
u, v, w	rúd tengely elmozdulásai
u_x, u_y, u_z	elmozdulás koordináták
V_y, V_z	rúd nyíró igénybevételei
W_k	külső erők munkája
y_T, z_T	csavaró/nyíró középpont koordináták

λ_1	kritikus (stabilitásvesztési) terhelés szorzó
τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{zy}	nyíró feszültségek
${}^0\boldsymbol{\sigma}$	kezdeti feszültségek mátrixa
γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{zy}	fajlagos szögváltozások
$\boldsymbol{\Delta}_i$	csomóponti szabadságfokok mátrixa
ΔT	hőmérséklet változása
ΔT_{Gy}	Hőmérsékletváltozás gradiense
$\boldsymbol{\varepsilon}$	kis alakváltozások mátrixa
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	nem mechanikai hatásokból következő alakváltozás
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	fajlagos nyúlások
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	forgás koordináták
ξ	dimenziótlan hossz koordináta
Π	teljes potenciál
ρ	tömegsűrűség
$\boldsymbol{\sigma}$	feszültségek mátrixa
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normál feszültségek
$\boldsymbol{\Phi}_j$	sajátvektorok (lengéskép, stabilitásvesztés alakja)
ω_j	sajátfrekvenciák

2 A rugalmasságtan alapegyenletei

Ebben a fejezetben bemutatjuk a lineáris rugalmasságtan alapvető mennyiségeit, és röviden összefoglaljuk az alapegyenleteket. A klasszikus rugalmasságtannal részletesen foglalkozó könyvekből további fontos részleteket lehet megismerni, érdemes megemlíteni például a jól ismert *Timoshenko - Goodier* [6] vagy a magyar nyelvű [10], [13] könyveket.

A külső terhelés hatására a szilárd test mozog és megváltoztatja az alakját, ezt jellemzi az *elmozdulás vektor* és az *alakváltozások*. Ugyanakkor kialakul a belső erőrendszer, a *feszültségi állapot*. A mechanikai számítások célja, hogy meghatározza ezen mennyiségek, a terhelések és az elmozdulás, alakváltozás és feszültségi állapot kapcsolatát. A külső terhelés lehet statikus, időben állandó vagy nagyon lassan változó, kvázistatikus. Gyorsan változó terhelés hatására a szerkezeti válaszok - mozgás, feszültségek, stb. - is időben változnak, ezt nevezzük dinamikai hatásnak.

A test mozgása, az alakváltozás mértéke, jellege függ az anyagi tulajdonságoktól. A test *rugalmas*, ha a külső terhelések megszüntetése után azonnal visszanyeri eredeti alakját, és *lineárisan rugalmas*, ha terhelés és az alakváltozás viszonya egy lineáris arányossággal írható le. A *képlékeny* alakváltozások jellemzője, hogy a szerkezet tehermentesítése után maradó alakváltozásokat észlelhetünk. További fontos anyagtulajdonság az anizotrópia. A test *anizotrop*, ha egy pontban az anyagjellemzők különböző irányokban mérve változnak. A kompozit, szálerősítésű anyagok, a fa jellemzően anizotrop tulajdonságúak. Az *izotóp* testeknél az anyagjellemzők iránytól függetlenek. Ha az anyagjellemzők a test különböző pontjaiban azonosak, akkor a test *homogén*, ellenkező estben *inhomogén*.

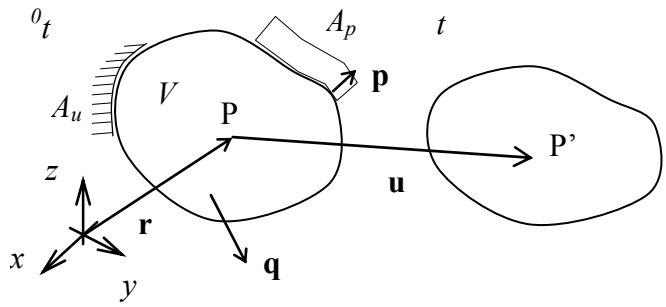
Egy kontinuummechanikai feladat matematikai modelljét két módon lehet megfogalmazni: parciális differenciálegyenletekkel, vagy globális érvényű, határozott integrál formájú elvek alakjában. Az előbbit *lokális* (angolul *strong form*) a másodikat *globális* (angolul *weak form*) matematikai modellnek nevezhetjük. A globális modell alapvető fontosságú a numerikus módszerek, ezen belül a végeselem módszer alkalmazásánál.

Ez a jegyzet a lineárisan rugalmas, homogén és izotrop anyagú, kismértékű mozgásokat és kis alakváltozásokat végző szerkezetekkel foglalkozik.

2.1 Lokális egyenletek

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a szilárd test mozgásának leírására alkalmas lokális formájú egyenleteket. A lokális egyenletek algebrai és parciális differenciál egyenletek, melyek egy anyagi pont kis környezetének mechanikai viselkedését, alakváltozását, feszültségi állapotát írják le.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



2.1 ábra. A szilárd test terhelései és mozgása

A vizsgált szilárd test - kontinuum - a tér V részét foglalja el. Külső A felületének A_p részén a felületi **p** megoszló terhelések, az A_u jelű részén pedig a mozgás kényszerfeltételek adottak. A mechanikai terhelések - a **p** felületi és a **q** térfogaton megoszló terhelések – valamint egyéb külső hatások (pl. hőmérsékletváltozás) következtében a test pontjai elmozdulnak, alakja megváltozik, és belső erők jönnek létre.

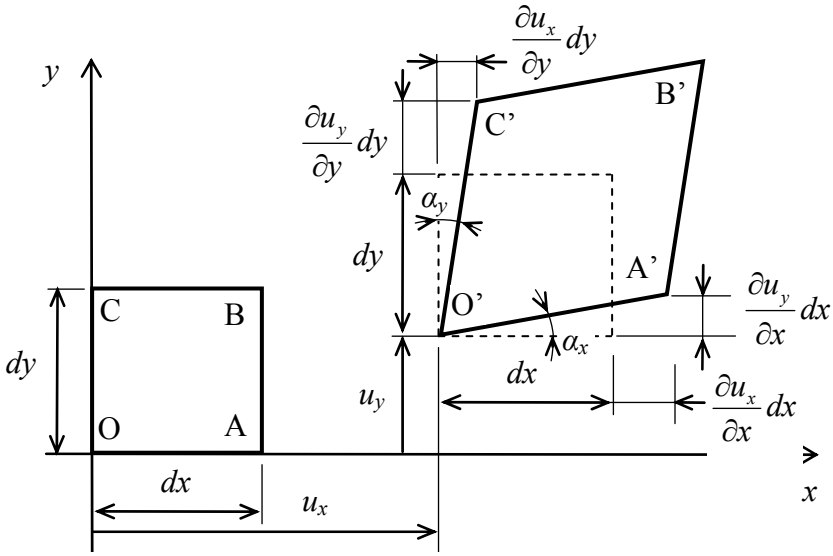
2.1.1 Alakváltozások, geometriai egyenletek

Egy P anyagi pont elmozdulását az eredeti helyzetéhez viszonyítva az **u** elmozdulás vektorral adhatjuk meg, aminek a koordináta tengelyek irányába mutató komponensei u_x, u_y és u_z (2.1 ábra). Általában ezek a koordináták az anyagi pont eredeti helyzetét megadó térkoordináták és az idő függvényei: $\mathbf{u}(x,y,z,t)$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T \tag{0.1}$$

Az áttekinthetőség kedvéért kezdjük az alakváltozások vizsgálatát az x, y síkban történő mozgás elemzésével. Az 2.2. ábrán jelölt OABC pontok elmozdulnak és a deformált anyagi elem sarokpontjainak új helyzete O'A'B'C' lesz. Az alakváltozás a szomszédos anyagi pontok közötti távolságok és a szögek változását jelenti. A mérnöki gyakorlatban használatos fajlagos nyúlás definíciója

$$\varepsilon_x = \frac{hosszváltozás}{eredeti\ hossz} = \frac{ds_x - dx}{dx} = \frac{ds_x}{dx} - 1 \tag{0.2}$$



2.2 ábra. Elemi kocka alakváltozása

A γ_{xy} fajlagos szögváltozás az eredetileg merőleges ds_x és ds_y anyagi vonalelemek közötti szög megváltozása, (a 2.2 ábrán $\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y$) ami pozitív, ha a deformált alakzaton a szög hegyesszög lesz.

Az áttekinthetőség kedvéért kezdjük az elmozdulások és az alakváltozás jellemzők vizsgálatát az x, y síkban történő mozgás elemzésével. A 2.2 ábrán jelölt OABC pontok elmozdulnak és a deformált anyagi elem sarokpontjainak új helyzete O'A'B'C' lesz.

Az eredetileg dx hosszúságú O'A' szakasz hossza:

$$ds_x^2 = \left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2, \quad \frac{ds_x^2}{dx^2} - 1 = 2\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 ,$$

majd felhasználva a fajlagos nyúlás (0.2) definícióját,

$$\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right) .$$

Ha a fajlagos nyúlás kicsi, akkor a baloldalon a másodrendű tag nagyságrendi megfontolás alapján elhagyható, és ekkor

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2\right) .$$

Ha az elmozdulás vektor koordinátái és a deriváltjai is kicsik, akkor a másodfokú tagokat a jobb oldalon is elhagyhatjuk:

$$\varepsilon_x \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad .$$

Most számítsuk ki az eredetileg merőleges *dx* és *dy* irányok közötti derékszög megváltozását! A 2.2 ábra jelöléseivel:

$$sin\,\gamma_{xy} = sin\left(\alpha_x + \alpha_y\right) = sin\,\alpha_x\, cos\,\alpha_y + sin\,\alpha_y\, cos\,\alpha_x$$
$$= \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{dx}{ds_x}\right)\left(1+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds_y} + \left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds_x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{ds_y}\right) .$$

Ismét felhasználva a fajlagos nyúlás (0.2) és a fajlagos szögváltozás definícióit, átrendezés után:

$$sin\,\gamma_{xy}\left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right) = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} .$$

Ha a fajlagos nyúlások és a szögváltozások is kicsik, akkor a másodrendű tagok az egyenlet bal oldalán elhanyagolhatóak,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} ,$$

továbbá, ha az elmozdulás koordináták és deriváltjaik is kicsik, akkor a másodfokú tagokat a jobb oldalon is elhagyhatjuk:

$$\gamma_{xy} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} .$$

Ezek után, ha a 2.2. ábrán a síkra merőleges u_z elmozdulással is számolunk, belátható, hogy a hat alakváltozási jellemző - három irányú nyúlás és három szögváltozás - az úgynevezett *Green-Lagrange* féle **H** alakváltozások tenzorának koordinátái, a következő formában írhatók fel:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G} \ , \tag{0.3}$$

ahol **ε** az alakváltozások lineáris,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{0.4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

és **G** a quadratikus része:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z & G_{xy} & G_{xz} & G_{yz} \end{bmatrix}^T,$$

$$G_x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right], \quad G_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$G_y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\right], \quad G_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{0.5}$$

$$G_z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right], \quad G_{yz} = \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Mérnöki szerkezeteknél, ha a fajlagos nyúlások nagyságrendje 10^{-3} vagy még kisebb, akkor a (0.3) geometriai egyenletekből a másodfokú tagok elhagyhatók

$$\mathbf{H} \approx \boldsymbol{\varepsilon} \tag{0.6}$$

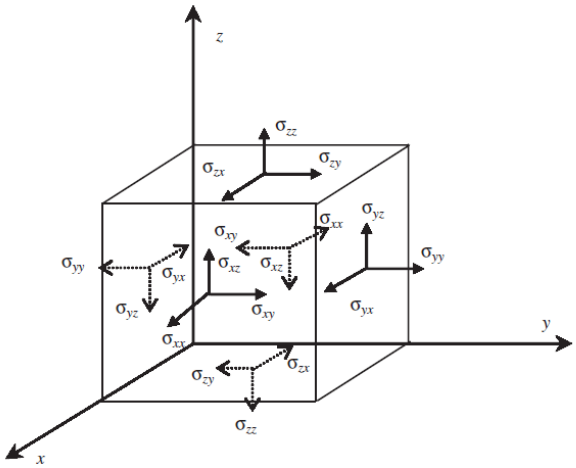
A (0.3) **H** és a (0.4) **ε** alakváltozási jellemzők fontos tulajdonsága, hogy értékük zérus, ha a test ugyan mozog, de alakja közben nem változik. Ezt nevezzük merevtest (szerű) mozgásnak.

A (0.2) definícióval az alakváltozási jellemzőket a kezdeti állapothoz (konfigurációhoz) tartozó *x*, *y*, és *z* térkoordinátákkal és a kezdeti méretekhez viszonyítva határozzuk meg. Ezt a kontinuummechanika *Lagrange* féle a leírás módjának nevezik, szemben az *Euler* féle leírással, ahol az alakváltozásokat az anyagi pont pillanatnyi helyzetét megadó koordinátákkal és a deformált méretekhez viszonyítva adjuk meg. Ez utóbbi eljárás elsősorban a folyadékmechanikában használatos. Kis alakváltozások estén a kezdeti és a pillanatnyi konfiguráció jó közelítéssel egybeesik, és a (0.5) lineáris geometriai egyenletet használhatjuk.

2.1.2 Feszültségi állapot, egyensúlyi egyenletek

A külső terhelések hatására a testben belső erőrendszer, feszültségi állápot alakul ki, amit egy anyagi pont környezetében kilenc - amiből hat különböző - feszültség komponens ad meg. A 2.3. ábrán láthatóak egy elemi méretű kiskocka három koor-

dináta síkokkal párhuzamos oldallapjaira ható feszültségek, a síkra merőleges normál és a páronként azonos, síkban lévő nyíró feszültségek.



2.3 ábra. Feszültségi állapot koordinátái

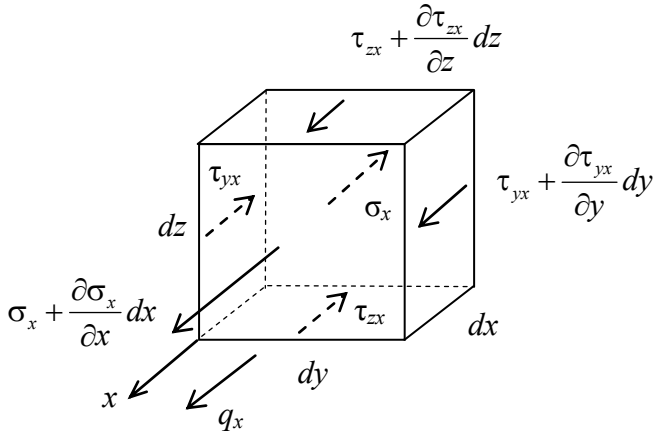
A testből bármilyen módon kivágott elemi részre az egyensúly feltétel teljesül. A 2.3 ábrán látható kiskocka közepén átmenő tengelyekre felírható nyomatéki egyensúlyi feltételek következménye a nyíró feszültségek dualitása: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. A kilenc feszültség koordináta közül a hat különbözőt írjuk fel a következő mátrix formában:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \tag{0.7}$$

Az x irányú vetületi egyensúlyi egyenlet az 1.4 ábra jelöléseivel, ahol a dx, dy és dz oldalméretű elemi test oldallapjaira csak az x irányú feszültség komponenseket és a q_x térfogati erőhatást rajzoltuk be, a következő formában írható fel:

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy + q_x dxdydz = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x = 0 \ .$$



2.4 ábra. Elemi kocka egyensúlya

A másik két vetületi egyenlet hasonló módon írható fel. Végül, a három vetületi egyensúlyi egyenlet, a **q** térfogaton megoszló erővel együtt, a következő lesz:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0 \ , \\ &\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0 \ , \\ &\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0 \ . \end{aligned} \tag{0.8}$$

Gyorsan mozgó testek vizsgálatánál a terhelések között figyelembe kell venni a tehetetlenségi erőket is. A *d'Alambert* elv szerint a statikai egyensúlyi feltételek formálisan érvényesek maradnak, ha a testre ható erőrendszert kiegészítjük a tehetetlenségi erőkkel. Például, egy mozgó, m tömegű pontszerű testre $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a formális egyensúlyi egyenlet, ahol **a** jelöli a gyorsulást. Ennek megfelelően dinamikai feladatokhoz a (0.8)egyenletben a testre ható erőrendszert ki kell egészíteni a térfogaton megoszló tehetetlenségi erővel:

$$\mathbf{q} = -\rho \ddot{\mathbf{u}} \ , \qquad \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \ddot{u}_x \\ -\rho \ddot{u}_y \\ -\rho \ddot{u}_z \end{bmatrix} \ , \tag{0.9}$$

ahol ρ a test tömegsűrűsége és $\ddot{\mathbf{u}}$ az elmozdulás idő szerinti második deriváltja, a gyorsulás vektor.

Mozgás közben a test mérete változik. A kezdeti, alakváltozás előtti felületekre vonatkoztatott feszültségek az úgynevezett *II. Piola-Kirchhoff* féle feszültségtenzor koordinátái, ami általában eltér a mozgás közben változó felületre vonatkoztatott,

valódi feszültségektől. Azonban, ha a mozgások és az alakváltozások kicsik és a (0.5) közelítés alkalmazható, a kétféle feszültség értelmezés közötti eltérés is elhanyagolható.

Az alakváltozási és feszültségi állapot pontos leírásának módjairól részletesebb leírás található a [6], [10], [12], és [13] könyvekben.

2.1.3 Anyagtörvény

Az anyagtörvény a feszültségek és az alakváltozások közötti kapcsolatot adja meg. Rugalmas testre ez a kapcsolat egyértékű. Lineárisan rugalmas testek anyagtörvénye a *Hooke* törvény, ami a kis alakváltozások esetén a következő lineáris mátrix egyenlet formájában írható fel:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^* \ , \qquad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{bmatrix} \right), \qquad (0.10)$$

A **C** egy szimmetrikus, 6x6 méretű mátrix, ami azt jelenti, hogy a legáltalánosabb anizotrop tulajdonságú rugalmas testnek 21 anyagjellemzője lehet. Az izotóp rugalmas testnek csak két független anyagjellemzője van és ekkor a **C** anyagjellemző mátrix is egyszerűbb szerkezetű:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} c_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \ , \\ c_2 &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \ , \\ c_3 &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \ . \end{aligned} \qquad (0.11)$$

ahol E a rugalmassági modulus, G a csúsztató rugalmassági modulus és ν a *Poisson* vagy kontrakciós tényező. Érdemes megemlíteni, hogy összenyomhatatlan testekre $\nu = 0{,}5$ és ilyenkor mindig $(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0$.

A (0.10) anyagtörvény inverze:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad b = 2(1+\nu), \tag{0.12}$$

Egyszerűen ellenőrízhető, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$, ahol $\mathbf{I}$ a 6x6 méretű egységmátrix.

A (0.10) anyagtörvényben $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ a nem közvetlen mechanikai hatások következtében kialakuló alakváltozások mátrixa. Ilyen lehet például a hőmérsékletváltozásból vagy valamilyen más technológiai okból - száradás, fázisátalakulás, stb. - bekövetkező alakváltozás. Izotrop, minden irányban azonos hőtágulási tulajdonság esetén

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \alpha\Delta T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \tag{0.13}$$

ahol α a lineáris hőtágulási együttható és ΔT a test hőmérsékletének változása.

2.1.4 Peremfeltételek

A mechanikai egyenletek fontos elemei a peremfeltételek. A testet határoló külső A felület minden pontjában meg kell adni vagy a mozgások vagy a felületi terhelések értékét. A peremfeltételek helyes megadása a modellalkotás egyik legfontosabb része.

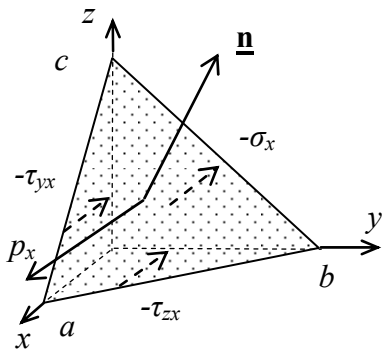
A *kinematikai* peremfeltételekkel az A felület A_u részén a test megtámasztását, esetleg az egyes felületrészek előírt mozgását adjuk meg:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}\ ,\ u_x = \tilde{u}_x\ ,\ u_y = \tilde{u}_y\ ,\ u_z = \tilde{u}_z\ , \qquad \mathrm{P} \in A_u\ . \tag{0.14}$$

A felüljelzés előírt mozgás értéket jelent. Rögzített pontokban vagy felületrészeken az előírt értékek zérusok.

A *dinamikai* peremfeltételek a test külső A felületének A_p részére működő terhelések és a belső erőrendszer, a feszültségi állapot kapcsolódásának törvényszerűséget írják le.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



2.5 ábra. Tetraéder egyensúlya

A 2.5 ábrán az A_p felületen lévő anyagi pont környezetét ábrázoltuk, ahol a tetraéder ferde oldallapja az A_p felület része. Jelölje T_x, T_y, T_z a koordinátatengelyekre merőleges oldalak és T a negyedik oldal területét, **n** pedig a negyedik oldal kifelé mutató normális egységvektorát:

$$T_x = \frac{bc}{2}\ ,\ T_y = \frac{ac}{2}\ ,\ T_z = \frac{ab}{2}\ ,\quad T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}\ ,$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x / T \\ T_y / T \\ T_z / T \end{bmatrix}\ ,\quad |\mathbf{n}| = 1\ .$$

Ezek az összefüggések egyszerű geometriai számításokkal igazolhatóak. A tetraédernek a test belsejében lévő felületeire a feszültség komponensek, az A_p felületen lévő oldalára pedig a **p** felületi terhelés működik. Írjuk fel az x irányú erőhatások egyensúlyát kifejező vetületi egyenletet:

$$-\sigma_x T_x - \tau_{xy} T_y - \tau_{xz} T_z + p_x T = 0\ .$$

Átrendezés után, figyelembe véve az **n** normális vektor koordinátáira felírt eredményeket is, megkapjuk az alábbi három dinamikai peremfeltétel közül az elsőt, ahol a további két feltételt - az y és z irányú egyensúlyi egyenletekből - hasonló módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= p_x\ , \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= p_y\ , \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= p_x\ . \end{aligned} \tag{0.15}$$

A test terheletlen, szabad felszíne az A_p felület része, ahol az előírt külső terhelés **p** = **0**.

2.1.5 Lokális egyenletek összefoglalása

Amint azt az előzőekben láthattuk, a kontinuummechanika, és ezen belül a lineáris rugalmasságtan lokális egyenleteit három csoportba sorolhatjuk: a (0.4) *geometriai egyenletek* az alakváltozások és a test mozgásának kapcsolatát adják meg, a *Newton* axiómából következő (0.7) *egyensúlyi egyenletek* vagy mozgásegyenletek a külső és belső erők kapcsolatát írják le és a harmadik egyenlet csoport a feszültségek és alakváltozások kapcsolata, az *anyagtörvény* (0.9). Ezekhez tartoznak még a (0.12) és (0.13) peremfeltételek. Általában, egy szerkezetmechanikai feladat megoldásához mind a három egyenletcsoportot fel kell használni. (Kivételnek számítanak a *statikailag határozott* feladatok, ahol az egyensúlyi egyenletek önmagukban elegendőek a külső és belső erők közötti összefüggések felírásához) Az alábbi táblázatból látszik, hogy a lokális megfogalmazásban az ismeretlenek és egyenletek darabszáma azonos.

Egyenletek száma		Ismeretlenek száma	
Geometriai egyenletek	6	Elmozdulás vektor u_x, u_y, u_z, Alakváltozási tenzor ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}	3 6
Egyensúlyi egyenletek	3	Feszültségi tenzor σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{zx}	6
Anyagtörvény	6		
Összesen	15		15

A pontos megoldást, amely az összes egyenletet és peremfeltételt kielégíti, a mérnöki gyakorlatban előforduló esetek döntő részénél nem lehet meghatározni. Ilyenkor van szükség a közelítő, numerikus módszerekre, amelyek többnyire a globális, integrál formában kifejezett elvekre, például a virtuális munka elvére, épülnek.

2.1.6 Példa: Sík lemez mozgása

Ismerjük az 2.6 *A* ábrán vázolt *a*x2*a* méretű és *t* vastagságú lemezben a (0.1) **u** elmozdulás vektor koordinátáit:

$$u_x = kxy\ , \quad u_y = -ky^2/2\ , \quad u_z = 0\ , \quad k = 2\cdot 10^{-6}\ \text{mm}^{-1}\ ,$$

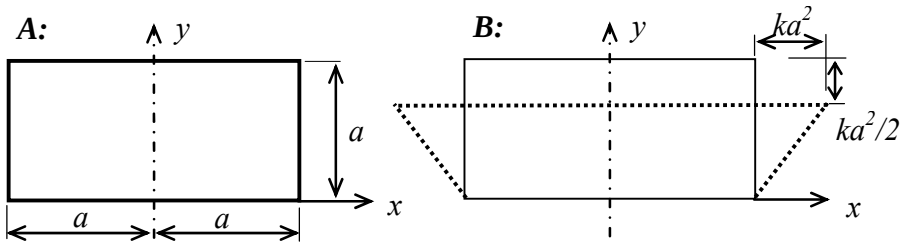
$$a = 100\ \text{mm}\ , \quad t = 5\ \text{mm}\ , \quad E = 2\cdot 10^5\ \text{MPa}\ , \quad \nu = 0{,}25\ .$$

Rajzoljuk meg a lemez deformálódott alakját és számítsuk ki az oldallapokra és a lemez térfogatára ható erőrendszert, ami ezt az alakzatot létrehozta.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

A 2.6 *B* ábra mutatja a lemez deformálódott alakját, ahol az $x = a$, $y = a$ koordinátájú sarokpont elmozdulásai:

$$u_x = ka^2 = 0{,}02 \text{ mm} \ , \ u_y = ka^2 / 2 = 0{,}01 \text{ mm} \ , \ u_z = 0 \ .$$



2.6 ábra. Sík lemez alakváltozása (nem arányos vázlat)

A terhelések meghatározásához előbb az alakváltozásokat, majd a feszültségeket kell kiszámítani. A geometriai egyenletekből:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = ky \ , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \text{-}ky \ , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = kx \ ,$$
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \ ,$$

és a (0.10) *Hooke* törvényből a zérustól különböző feszültség koordináták:

$$\sigma_x = c_1\varepsilon_x + c_2\varepsilon_y = \frac{E}{(1+\nu)}ky \ , \quad \sigma_y = c_1\varepsilon_y + c_2\varepsilon_x = -\frac{E}{(1+\nu)}ky \ ,$$
$$\tau_{xy} = Gkx = \frac{E}{2(1+\nu)}kx \ .$$

A (0.15) dinamikai peremfeltételekből meghatározhatjuk a lemez oldallapjaira ható felületi nyomásterheléseket. Az $y = a$ oldallap kifelé mutató normális egységvektorának koordinátái: $n_x = 0$, $n_y = 1$, $n_z = 0$, és a (0.15) peremfeltételből ezen a lapon:

$$p_x = \tau_{xy} = \frac{Ek}{2(1+\nu)}x = 0{,}16x \ , \ p_y = \sigma_y = -\frac{Ek}{(1+\nu)}a = 32 \text{ MPa},$$
$$p_z = \tau_{yz} = 0.$$

Hasonló módon, az $y = 0$ lapon $n_x = 0$, $n_y = \text{-}1$, $n_z = 0$,

$$p_x = \tau_{xy} = \frac{Ek}{2(1+\nu)}x = 0{,}16x \ , \quad p_y = \sigma_y = 0, \quad p_z = \tau_{yz} = 0,$$

az $x = a$ lapon $n_x = 1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$,

$$p_x = \sigma_x = \frac{Ek}{(1+\nu)} y = 0{,}32y \qquad p_y = \tau_{xy} = \frac{Ek}{2(1+\nu)} a = 16 \text{ MPa}, \quad p_z = 0,$$

és végül az $x = -a$ lapon $n_x = -1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$,

$$p_x = -\sigma_x = -0{,}32y \qquad p_y = -\tau_{xy} = -\frac{Ek}{2(1+\nu)}(-a) = 16 \text{ MPa}, \quad p_z = 0 .$$

Ezek a perem terhelések láthatóak az 2.7 ábrán.

A lemezre ható térfogati erőt a (0.8) egyensúlyi egyenletekből számíthatjuk ki:

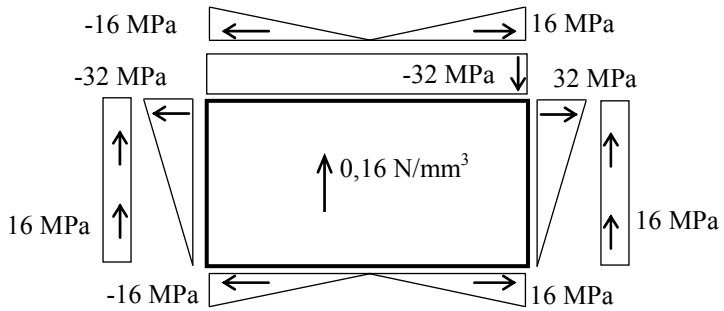
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \qquad 0 + q_x = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0, \qquad \frac{Ek}{2(1+\nu)} - \frac{Ek}{(1+\nu)} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + q_z = 0, \qquad 0 + q_z = 0.$$

Ebből a térfogati erőhatás egyetlen nem zérus koordinátája:

$$q_y = \frac{Ek}{2(1+\nu)} = 0{,}16 \text{ N/mm}^3 .$$



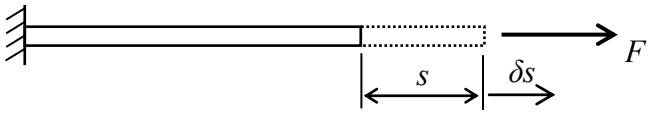
2.7 ábra. Sík lemez terhelése

Végezetül ellenőrizhetjük, hogy az 2.7 ábrán megadott erőrendszer valóban egyensúlyi.

2.2 Globális modell, a virtuális munka elve

Egy erő munkája az erő és az irányába eső elmozdulás szorzata. Pontosabban, egy F erő a vele párhuzamos ds mozgás közben $dW = Fds$ munkát végez. Ha ez az F mint egy külső erő, terhelés valamilyen mechanikai rendszerre működik, akkor a rendszer mozgása, alakváltozása közben a belső erők is végeznek munkát, ami

munkavégző képesség, energia formájában tárolódik a rendszerben. Ezt az energiát gyakran *alakváltozási energiának* is nevezik.



2.8. ábra. Húzóerő munkája, belső energia

A külső erő munkája és az energia változásának viszonyát vizsgáljuk először az 2.8. ábrán látható igen egyszerű mechanikai rendszeren. A rúdra az F erő működik és ismerjük az egyensúlyi helyzetet megadó megoldást: a belső erő (rúderő) $R = F$ és a megnyúlás $s = kR$. Ebből az egyensúlyi helyzetből - képzeletben - mozdítsuk ki a rendszert egy kicsi ds elmozdulással. Ezt a kis elmozdulást *virtuális elmozdulásnak* nevezzük.

A külső erőnek a virtuális elmozduláson végzett $dW_k = Fds$ *virtuális munkája* megegyezik a rugóerő virtuális munkájával, ami a belső, vagy alakváltozási energia $dU = Rds$ megváltozása, azaz $dU - dW_k = 0$. Ez nyílván csak akkor igaz, ha az eredeti állapot egyensúlyi volt, azaz $R = F$. Tehát az egyensúlyi helyzetre jellemző, hogy

$$d\Pi = d\left(U - W_k\right) = 0\,, \quad \Pi\left(s\right) = extrémum\,, \tag{0.16}$$

más szóval a $\Pi(s)$ *teljes potenciál* az s elmozdulás függvénye és az egyensúlyi helyzetben szélsőértéke van:

$$d\Pi = \frac{d\Pi}{ds}ds = 0 \;\rightarrow\; \frac{d\Pi}{ds} = 0\,.$$

Az (0.16) a *virtuális munka elve,* amit most a következő formában lehet megfogalmazn: az az elmozdulás, aminél a teljes potenciál megváltozása zérus, teljesíti az egyensúlyi feltételeket. Fontos megjegyezni, hogy ez a megállapítás akkor is igaz, ha rugó nemlineáris, $k = k(s)$, vagy az s eredő megnyúlásnak van maradó nyúlás része is.

Ha az 2.8. ábra szerinti rugó lineárisan rugalmas, akkor a k értéke állandó és akkor a belső erő virtuális munkája, vagy más szóval az alakváltozási energia megváltozása

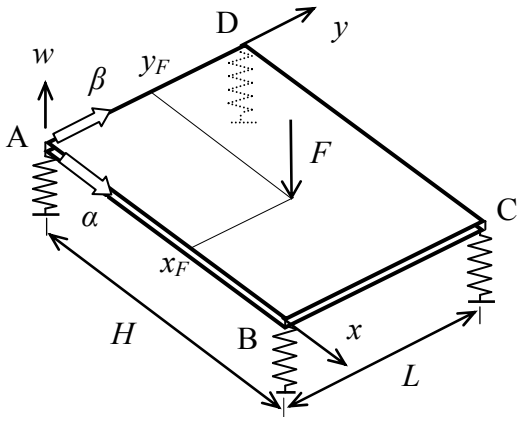
$$dU = Rds = ksds = d\left(k\frac{s^2}{2}\right).$$

2.2.1 Példa: Raklap terhelése

Az 2.9 ábrán látható merev raklap négy sarkát egyforma rugókkal támasztjuk meg. A sarokpontok csak függőleges irányba mozoghatnak. A raklap adott pontjában működik az F erő. Határozzuk meg a raklap mozgását és a rugókat terhelő erőket.

A merev lap kismértékű függőleges mozgását három paraméter - a szabadságfokok - határozza meg. Legyenek ezek az A jelű sarokpont w mozgása és a koordináta tengelyek körüli α és β forgások. Ezzel a támaszrugók megnyúlásai

$$\Delta_A = w\,,\ \Delta_B = w - \beta H\ ,\ \ \Delta_C = w + \alpha L - \beta H,\ \ \Delta_D = w + \alpha L\,.$$



2.9 ábra. Raklap terhelése

A megoldáshoz a teljes potenciál

$$\Pi = U - W_k = extrémum$$

alakú szélsőérték elvét használjuk fel. A rugórendszer összes alakváltozási energiája és a terhelő erő munkája

$$U = \frac{1}{2}k\left(\Delta_A^2 + \Delta_B^2 + \Delta_C^2 + \Delta_D^2\right)\ ,\ \ W_k = -F\left(w + \alpha y_F - \beta x_F\right),$$

ahol k jelöli a rugóállandót. A teljes potenciál most egy háromváltozós függvény,

$$\Pi\left(w,\alpha,\beta\right) = U - W_k = \frac{1}{2}k\left(\Delta_A^2 + \Delta_B^2 + \Delta_C^2 + \Delta_D^2\right) + F\left(w + \alpha y_F - \beta x_F\right)$$

aminek a szélsőértékénél (extremális pontjában) a változók szerinti parciális deriváltak értéke zérus. Ez három egyenletet jelent, amiből az első:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w} = 0 \rightarrow k\left(\Delta_A \frac{\partial \Delta_A}{\partial w} + \Delta_B \frac{\partial \Delta_B}{\partial w} + \Delta_C \frac{\partial \Delta_C}{\partial w} + \Delta_D \frac{\partial \Delta_D}{\partial w}\right) + F = 0\,,$$

és a rugó megnyúlások helyettesítése után:

$$4w + 2L\alpha - 2H\beta = -F / k \ .$$

Hasonló módon a második és harmadik egyenlet:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \ 2w + 2L\alpha - H\beta = -Fy_F / kL \ ,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \ 2w + L\alpha - 2H\beta = -Fx_F / kH \ .$$

A három egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$w = -\frac{F}{4k}\left(3 - 2\frac{x_F}{H} - 2\frac{y_F}{L}\right) ,$$

$$\alpha = +\frac{F}{2kL}\left(1 - 2\frac{y_F}{L}\right) , \ \beta = -\frac{F}{2kH}\left(1 - 2\frac{x_F}{H}\right) .$$

Ezek után meghatározhatjuk a rugóerőket:

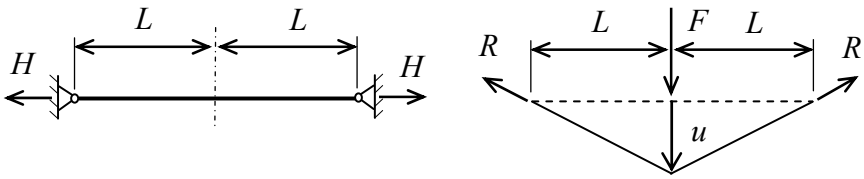
$$R_A = k\Delta_A = -\frac{F}{4}\left(3 - 2\frac{x_F}{H} - 2\frac{y_F}{L}\right) , \quad R_B = k\Delta_B = -\frac{F}{4}\left(1 + 2\frac{x_F}{H} - 2\frac{y_F}{L}\right) ,$$

$$R_C = k\Delta_C = -\frac{F}{4}\left(-1 + 2\frac{x_F}{H} + 2\frac{y_F}{L}\right), \quad R_D = k\Delta_D = -\frac{F}{4}\left(1 - 2\frac{x_F}{H} - 2\frac{y_F}{L}\right) .$$

A támaszerők megegyeznek a rugóerőkkel, csak az előjeleket kell felcserélni (nyomott rugó alatt a támaszerő felfelé mutat). Végezetül ellenőrizhetjük az egész raklap egyensúlyát, ami nyilván teljesül.

2.2.2 Példa: Rugalmas kötél lehajlása

Az 2.10 ábrán látható a $2L$ hosszúságú, lineárisan rugalmas anyagú, H erővel előfeszített kötél. A kötél hajlító merevsége elhanyagolhatóan kicsi. Határozzuk meg középpontban ható F erő és a középpont u elmozdulásának kapcsolatát!



2.10 ábra. Előfeszített kötél lehajlása

Mozgás közben a rugalmas kötelet terhelő húzóerő $R = H + k\Delta$ alakban írható fel, ahol k a rugóállandó és Δ az egyik kötélág megnyúlása:

$$\Delta = \sqrt{L^2 + u^2} - L \ .$$

Az egyik kötélágban az összes alakváltozási energia, ami a rugóerő munkája,

$$dU_1 = Rd\Delta = \left(H + k\Delta\right) \;\rightarrow\; U_1 = H\Delta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \;,$$

és az F terhelő erő munkája $W_k = Fu$.

A teljes potenciál most egy egyváltozós függvény,

$$\Pi\left(u\right) = U - W_k = 2\left(H\left(\sqrt{L^2+u^2} - L\right) + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2+u^2} - L\right)^2\right) - Fu \,.$$

Az egyváltozós függvény szélsőérték helyénél az első derivált értéke zérus:

$$\frac{d\Pi}{du} = 0 \;\rightarrow\; 2H\frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} + 2k\left(\sqrt{L^2+u^2} - L\right)\frac{u}{\sqrt{L^2+u^2}} - F = 0 \,,$$

ahonnan kifejezhető a keresett erő - elmozdulás kapcsolat:

$$F = 2\frac{u}{L}\left(\frac{H}{\sqrt{1+\left(u/L\right)^2}} + kL\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(u/L\right)^2}}\right)\right).$$

Ha a kötél lehajlása kicsi, $(u/L)^2 \ll 1$, akkor ebből a jól ismert

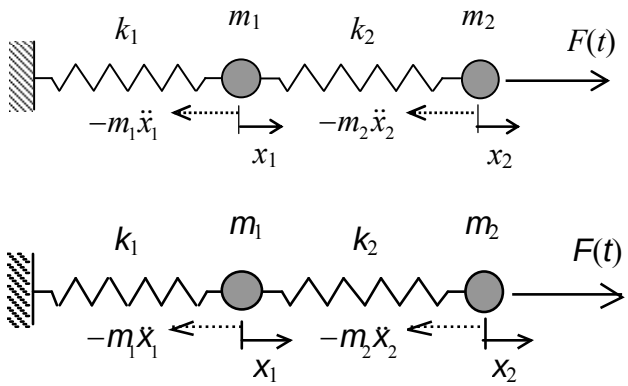
$$F = 2H\frac{u}{L}$$

eredmény adódik.

2.2.3 Példa: Láncrendszer mozgásegyenlete

Írjuk fel az 2.11 ábrán látható rendszer mozgásegyenletét! A rendszer két lineáris rugóból és két tömegpontból áll, melyek csak az ábra szerinti vízszintes irány mentén mozoghatnak. A láncrendszerre működő külső erő az időben változó $F(t)$. A rendszer pillanatnyi helyzetét két paraméter - szabadságfok - határozza meg, a rendszer nyugalmi helyzetétől mért x_1 és x_2 koordináták.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



2.11 ábra. Rugalmas láncrendszer

Mozgás közben a rugók összes alakváltozási energiája, az egyes rugók megnyúlásának ismeretében, a következő alakban írható fel:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - x_1\right)^2 ,$$

és ebből az U alakváltozási energia megváltozása

$$\begin{aligned} dU &= k_1x_1dx_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right)\left(dx_2 - dx_1\right) = \\ &= \left(k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2\right)dx_1 + \left(k_2x_2 - k_2x_1\right)dx_2 \ . \end{aligned}$$

A *d'Alambert* elv szerint, a külső erőrendszer részének tekintjük az (0.9) tehetetlenségi erőt is. A kiegészített külső erőrendszernek a kicsi dx_1, dx_2 virtuális elmozdulásokon végzett virtuális munkája:

$$dW_k = \left(-m_1\ddot{x}_1\right)dx_1 + \left(-m_2\ddot{x}_2 + F\right)dx_2 .$$

Behelyettesítve a virtuális munka elvének (0.16) alakjába, a következő egyenletet kapjuk,

$$\begin{aligned} d\Pi &= dU - dW_k = \\ &= \left(k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 + m_1\ddot{x}_1\right)dx_1 + \left(k_2x_2 - k_2x_1 + m_2\ddot{x}_2 - F\right)dx_2 = 0 \ , \end{aligned}$$

amiből - mivel dx_1, dx_2 egymástól független változók - a következő lineáris differenciálegyenlet rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 &= 0 \ , \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 &= F\left(t\right) \ . \end{aligned}$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert mátrix formában is felírhatjuk:

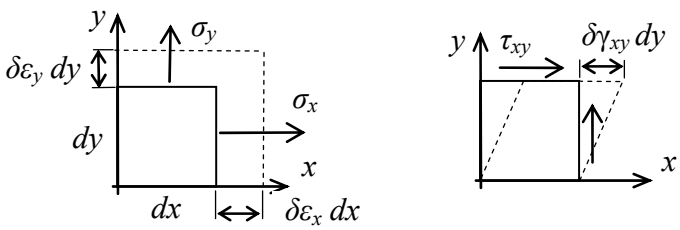
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ F \end{bmatrix}.$$

A láncrendszer mozgásegyenletének megoldása, a megoldás módszerének részletei megtalálhatók *Ludvig* [8] magyar nyelvű könyvében.

2.2.4 Szilárd test alakváltozási energia növekménye

Vizsgáljuk meg a szilárd testben a belső, alakváltozási energia kiszámításának lehetőségét! Az áttekinthetőség kedvéért tekintsük az 2.12 ábra szerinti síkbeli esetet, ahol a dx, dy és dz oldalhosszúságú anyagi kocka oldallapjaira hatnak a σ_x, σ_y, és τ_{xy} feszültségek. A belső erők - a feszültség komponensek - virtuális munkája a kapcsolódó alakváltozások kismértékű, virtuális $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$ és $\delta\gamma_{xy}$ megváltoztatása során a szilárd test egész V térfogatára vonatkoztatva:

$$\delta U=\int_V\left[\left(\sigma_x dydz\right)\delta\varepsilon_x dx+\left(\sigma_y dxdz\right)\delta\varepsilon_y dy+\left(\tau_{xy} dxdz\right)\delta\gamma_{xy} dy\right].$$



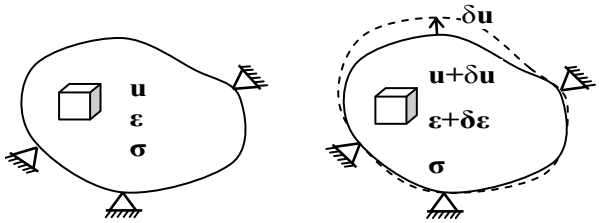
2.12 ábra. Alakváltozási energia növekménye

Ha ezt még a z irányú belső erők munkájával is kiegészítjük, akkor az egész test alakváltozási energia megváltozására, ami a belső erők virtuális munkája, a következő eredményt kapjuk:

$$\delta U=\int_V\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}\right)dV,$$
$$\delta U=\int_V \boldsymbol{\sigma}^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV, \tag{0.17}$$

ahol felhasználtuk az alakváltozási és feszültségi mátrixok (0.4) és (0.7) alakját.

2.2.5 A virtuális munka elve



2.13 ábra. A virtuális elmozdulás

Terjesszük ki a 2.2 fejezetben vázolt gondolatmenetet az 2.13 ábrán látható szilárd testre. Tételezzük fel, hogy ismerjük a teljes egyensúlyi megoldást, vagyis ismert a külső terhelések – a **p** felületi és a **q** térfogati erők – hatására kialakuló **u** elmozdulás vektor, az **ε** alakváltozások és a **σ** feszültségi állapot. Mozdítsuk ki a testet ebből az egyensúlyi helyzetből egy szomszédos (**u** + δ**u**) helyzetbe ahol δ**u** egy tetszőleges, de kicsi virtuális elmozdulás. Itt - és a továbbiakban is - csak azért használjuk a *d***u** növekmény helyett a δ**u** jelölést, mert az **u** nem egy skalár koordináta, hanem egy függvény, vektormező. Természetesen, az **u** is, és a (**u** + δ**u**) is kinematikailag lehetséges mozgások. Definíció szerint, a *kinematikailag lehetséges mozgások* teljesítik a (0.14) kinematikai peremfeltételeket. Az elmozdulásokkal együtt az alakváltozási állapot is megváltozik, az új helyzetben az alakváltozás (**H** + δ**H**) lesz. A δ**H** virtuális alakváltozást a δ**u** virtuális elmozdulásból az 2.1.1 fejezetben bemutatott geometriai egyenletekből határozhatjuk meg. Ha feltételezzük, hogy az alakváltozások kicsik, akkor jó közelítéssel **H** ≈ **ε**, és a (0.4) lineáris egyenleteket lehet használni.

A δ**u** virtuális mozgás közben a belső erők virtuális munkája - az alakváltozási energia megváltozása - a (0.17) szerinti δU, a külső erők virtuális munkája pedig δW_k :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\mathbf{H}\, dV \approx \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV \\ &= \int_V \left(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}\right) dV.\end{aligned} \tag{0.18}$$

$$\begin{aligned}\delta W_k &= \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, dA + \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\, dV \\ &= \int_{Ap} \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{bmatrix} dA + \int_V \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{bmatrix} dV\ ,\end{aligned} \tag{0.19}$$

Mivel az (0.16) virtuális munka elv szerint az egyensúlyi helyzetben a külső erők δW_k munkájának megváltozása megegyezik az alakváltozási energia δU megválto-

zásával, a virtuális munka elve szilárd testekre, kis alakváltozásokat feltételezve, a következő formában írható fel:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \left(\int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, dA + \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\, dV \right) = 0 \quad . \qquad (0.20)$$

A $\Pi(\mathbf{u})$ teljes potenciál egy olyan függvény, aminek a független változói is függvények, vagyis ez a függvények függvénye. Az ilyen függvényeket nevezik *funkcionálnak*.

Gyorsan mozgó testeknél $\mathbf{q}$ a térfogati erőhatás részének tekintjük az (0.9) $-\rho\dot{\mathbf{u}}$ *d'Alambert* erőt is. A virtuális munka elvének a tehetelenségi erők virtuális munkájával kiegészített alakja:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \delta W_k + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u}\, dV = 0 \quad , \qquad (0.21)$$

ahol δW_k most már a tényleges mechanikai terhelések virtuális munkája. A virtuális munka elvének ez az alakja az anyagtörvénytől független.

2.2.6 A teljes potenciál szélsőérték elve

A belső erők virtuális munkájának (0.17) kifejezése bizonyos esetekben tovább egyszerűsíthető. Ha a test lineárisan rugalmas, akkor a (0.10) *Hooke* törvény helyettesítésével az alakváltozási energia megváltozása:

$$\delta U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right)^T \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \delta \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \, ,$$

mivel a $\mathbf{C}$ anyagmátrix szimmetrikus,

$$\delta \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^T\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} \, ,$$

és az $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ alakváltozás nem függvénye az $\mathbf{u}$ elmozdulásnak. Lineárisan rugalmas testeknél az U alakváltozási energia az alakváltozás koordináták másodfokú függvénye:

$$\delta U = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV \quad .$$

Ezzel a (0.21) virtuális munka elvnek a lineárisan rugalmas testekre érvényes alakja:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \delta\left(\int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\right) dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV\right) - \delta W_k + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}^T\delta\mathbf{u}\, dV = 0. \tag{0.22}$$

A kinematikailag lehetséges elmozdulások közül az lesz az adott lineáris rugalmasságtani feladat megoldása, amelyik teljesíti a virtuális munka elvét.

Ha a külső erőrendszer független az **u** elmozdulásoktól, akkor

$$\delta W_k = \int_{Ap} \mathbf{p}^T\delta\mathbf{u}\, dA + \int_V \mathbf{q}^T\delta\mathbf{u}\, dV = \delta\left(\int_{Ap} \mathbf{p}^T\mathbf{u}\, dA + \int_V \mathbf{q}^T\mathbf{u}\, dV\right) .$$

Lassú - kvázistatikus - folyamatoknál az (0.22) utolsó tagjában lévő tehetetlenségi erő a többi mechanikai terheléshez képest elhanyagolható és így a (0.22) elv egy újabb alakja:

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 , \qquad \Pi(\mathbf{u}) = \textit{extrémum} ,$$

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_{Ap} \mathbf{p}^T\mathbf{u}\, dA - \int_V \mathbf{q}^T\mathbf{u}\, dV . \tag{0.23}$$

Ez a teljes potenciális energia szélsőérték elve, amit a lineáris rugalmasságtanban *Lagrange* féle szélsőérték elvnek is szokták nevezni. *A kinematikailag lehetséges elmozdulások közül az lesz az adott lineáris rugalmasságtani feladat megoldása, amelyik teljesíti a teljes potenciál szélsőérték feltételét*. A Π teljes potenciál független változója az **u** elmozdulás vektor. Az ilyen függvényt funkcionálnak nevezzük, értelmezési tartománya a kinematikailag lehetséges elmozdulások. Kis alakváltozások és lineáris anyagtörvény esetén a (0.22) $\Pi(\mathbf{u})$ teljes potenciál az elmozdulás vektor koordinátáinak másodfokú függvénye, ami alapvetően az alakváltozások mértékére vonatkozó $\mathbf{H} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$ közelítés és a lineáris anyagtörvény következménye.

A (0.20) - (0.23) elvek felírása során az 1.1.5 fejezet táblázatában összefoglalt egyenletek közül felhasználtuk a (0.4) geometriai egyenleteket és a (0.10) anyagtörvényt. Mivel az **u** elmozdulás eleve teljesíti a kinematikai peremfeltételeket (mert kinematikailag lehetséges), belátható, hogy a virtuális munka elve egyenértékű az eddig fel nem használt (0.8) egyensúlyi egyenletekkel és a dinamikai peremfeltételekkel.

A (0.20) virtuális munka elv - és annak itt röviden bemutatott változatai - csak egy a kontinuummechanika globális elvei közül, melyekről további részletek ismerhetők meg többek között *Washizu* [2] vagy *Wunderlicht-Pilkey* [19] könyveiből. A matematikából ismert variációszámítás [7] eszközeivel pedig további mérnöki-fizikai feladatokhoz - pl. hővezetés, folyadékáramlás, stb. - tartozó globális szélső-

érték elveket lehet megfogalmazni, melyek ezeken területeken is lehetővé teszik a végeselem módszer alkalmazását.

2.2.7 Kezdeti feszültségi állapot

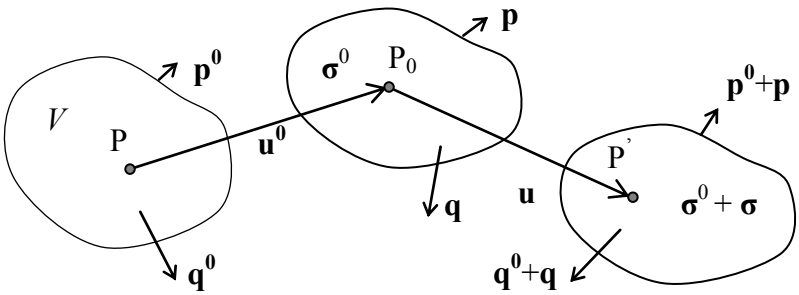
Az előző fejezetben, a virtuális munka (0.20) elvének felírásakor feltételeztük, hogy az alakváltozási folyamat kezdetén a test feszültségmentes. Most vizsgáljuk meg a $\boldsymbol{\sigma}^0$ egyensúlyi kezdeti feszültségi állapot hatását, amit a testre ható $\mathbf{p}^0$ felületi és $\mathbf{q}^0$ térfogati terhelések hoztak létre (2.14 ábra). Mivel ez egy egyensúlyi állapot, a kis alakváltozásokra érvényes (0.20) virtuális munka elv teljesül:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_{Ap} \mathbf{p}^{0T} \delta\mathbf{u}\, dA - \int_V \mathbf{q}^{0T} \delta\mathbf{u}\, dV = 0. \tag{0.24}$$

Az így definiált kezdeti állapotból kiindulva a terhelések megváltozása, növekménye legyen $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$. Az új helyzetet az ($\mathbf{u}^0 + \mathbf{u}$) elmozdulások és a ($\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}$) feszültségi állapot jellemzi, amire szintén teljesül a (0.20) virtuális munka elve:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0\right)^T \delta\mathbf{H}\, dV - \int_{Ap} \left(\mathbf{p} + \mathbf{p}^0\right)^T \delta\mathbf{u}\, dA - \int_V \left(\mathbf{q} + \mathbf{q}^0\right)^T \delta\mathbf{u}\, dV = 0.$$

Itt fontos megjegyezni, hogy az $\mathbf{u}$ is és az ($\mathbf{u}^0 + \mathbf{u}$) is kinematikailag lehetséges mozgások.



2.14. ábra. Kezdeti feszültségek hatása

Helyettesítsük be a virtuális alakváltozásnak a $\delta\mathbf{u}$ elmozdulásokból a pontosabb, (0.3) összefüggés szerinti $\delta\mathbf{H} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\mathbf{G}$ alakját. Átrendezés után a következőket kapjuk:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}^T \left(\delta\boldsymbol{\varepsilon} + \delta\mathbf{G}\right) + \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\mathbf{G}\right) dV - \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, dA - \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\, dV$$
$$+ \int_V \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{Ap} \mathbf{p}^{0T} \delta\mathbf{u}\, dA - \int_V \mathbf{q}^{0T} \delta\mathbf{u}\, dV = 0.$$

Az utolsó három tag együtt, mivel a kezdeti feszültségi állapot egyensúlyi állapot, a (0.24) szerint zérus. Ha az eddigiekkel összhangban feltételezzük, hogy a virtuális

alakváltozások kicsik, a megmaradó rész első tagjában alkalmazhatjuk a $\mathbf{H} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$ közelítést, azaz $\boldsymbol{\sigma}^T \delta(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}) \approx \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\mathbf{G}\right) dV - \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, dA - \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\, dV = 0$$

Végül, ha a test lineárisan rugalmas, akkor a *Hooke* törvény helyettesítésével felírhatjuk a kis alakváltozásokat végző, mozgó testre a (0.22) virtuális munka elvnek a kezdeti feszültségi állapotot is tartalmazó változatát:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{u}) = & \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{0T} \delta\mathbf{G} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u} dV \\ & - \left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{C}\, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV + \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, dA + \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\, dV \right) = 0, \end{aligned} \tag{0.25}$$

ahol figyelembe vettük a tehetelenségi erő növekmény virtuális munkáját is.

A (0.25) elvben $\boldsymbol{\sigma}^0$ a kezdeti feszültségi állapot, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ a felületi és térfogati terhelések növekménye, $\mathbf{u}$ az elmozdulás növekmény, $\boldsymbol{\varepsilon}$ az alakváltozás növekménye, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ a nem mechanikai hatásokból következő alakváltozás, $\mathbf{G}$ az alakváltozások nemlineáris (quadratikus) része, $\mathbf{C}$ a rugalmas test anyagjellemzőinek szimmetrikus mátrixa, $\ddot{\mathbf{u}}$ a gyorsulás, és ρ a tömegsűrűség. A (0.25) virtuális munka elv tömörebb formában is felírható,

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \delta U + \delta U_G + \delta T - \delta W_k = 0\,, \tag{0.26}$$

ahol U az alkváltozási energia növekmény (a feszültség növekmények munkája az alakváltozás növekményen), U_G a kezdeti belső erők munkája az alakváltozás növekményen, T a tehetetlenségi erők és W_k a külső terhelések munkája - beleértve az $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ hatását is - az $\mathbf{u}$ elmozdulás növekményen.

A mérnöki alkalmazások szempontjából alapvető fontosságúak a közelítő, numerikus módszerek, ezen belül is azok az eljárások igen hatékonyak, melyek a globális modellt alkalmazzák. Ezeket a numerikus módszereket összefoglalóan *direkt* numerikus módszereknek is nevezik. A direkt numerikus módszerek közül azokat, amelyek a virtuális munka elv valamelyik itt bemutatott változatát alkalamzzák, *elmozdulás módszernek* nevezik.

A virtuális munka elvére vonatkozó szélsőérték feladatok közelítő megoldására két módszer közismert, a *Ritz*, vagy *Rayleigh-Ritz*, és a *végeselem* módszer.

3 Rúdelemek egyenletei

A rúd a mérnöki gyakorlatban leggyakrabban használt mechanikai modell. Felhasználható gépelemek, hajtómű tengelyek vagy épületek és jármű vázszerkezetek mechanikai vizsgálatára, ahol a rúdszerkezethez csatlakozó lemezburkolatnak nincs szilárság növelő funkciója.

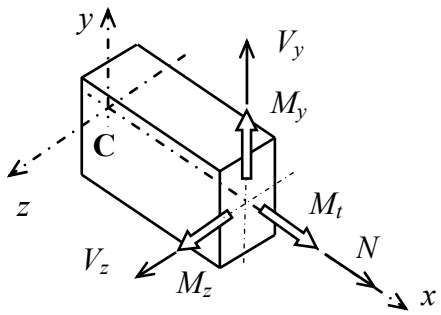
Geometriai értelemben rúdnak tekinthető az a szilárd test, amelyiknek egy mérete (L hossz) jóval nagyobb, mint a másik két irányú, keresztmetszeti mérete. A méretek tényleges arányára nehéz általános érvényű korlátot adni, mivel azt esetenként, a terhelések, működési körülmények és a számítás céljának ismeretében, kellő műszaki gyakorlattal lehet meghatározni.

3.1. ábra. Térbeli rúdszerkezet

A rúd fontos jellemzője a keresztmetszet alakja, és ehhez igazodva vesszük fel a koordináta rendszert. Egy állandó keresztmetszetű, prizmatikus, egyenes tengelyű rúdelem látható a 3.2. ábrán, ahol x a rúd tengelye és az y, z tengelyek a keresztmetszet **C** középponti főtengelyei. A továbbiakban lényeges keresztmetszeti jellemzők az A terület és az I_y, I_z fő másodrendű nyomatékok:

$$A = \int_A dA\,, \quad I_y = \int_A z^2 dA\,, \quad I_z = \int_A y^2 dA\,, \quad I_p = I_y + I_z\,,$$
$$\int_A y\,dA = 0\,, \quad \int_A z\,dA = 0\,, \quad \int_A zy\,dA = 0\,. \tag{3.1}$$

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



3.2. ábra. Lokális koordináta rendszer és igénybevételek

A 3.2. ábra mutatja a megállapodás szerinti igénybevétel előjel szabályt: a rúd $+x$ normálisú keresztmetszetben a pozitív vektor koordináták a pozitív igénybevételek. (ez konvenció, alkalmazhatnánk más előjel szabályt is!) Egyenes rudaknál a főtengelyek koordináta rendszerében a húzás, a két főtengelyhez tartozó hajlítás és a csavarás nem kapcsolódnak, ezért ezeket külön-külön lehet vizsgálni. Természetesen, ez a megállapítás görbe, vagy különböző irányú egyenes rudakból álló keretszerkezetekre már nem igaz.

A rudak hajlítására vonatkozó különböző rúdelméletek közül itt kettőt érdemes megemlíteni, az *Euler – Bernoulli* és a *Timoshenko* féle elméleteket. Az előbbi, amelyiket gyakran mérnöki elméletnek is neveznek, a legismertebb, ezért a továbbiakban ezt a modellt tárgyaljuk részletesebben.

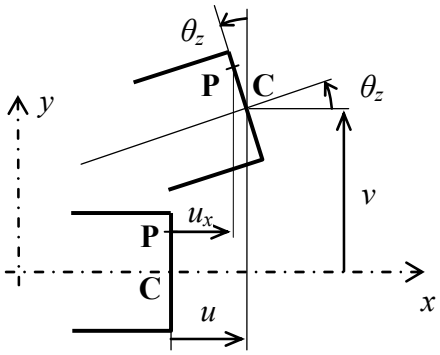
3.1 Az Euler – Bernoulli rúdelmélet

A hajlítás *Euler – Bernoulli* féle elméletének három alapvető geometriai hipotézise a következő:

1. a keresztmetszet alakja a saját síkjában (y, z) nem változik,
2. a keresztmetszet a mozgás során sík marad, és
3. a keresztmetszet síkja mindig merőleges a rúd görbült tengelyére.

A fenti, egyszerűsítő feltételezések szerint a kis keresztmetszeti méretek irányában a mozgásokat egyszerű, lineáris függvények írják le. Az áttekinthetőség kedvéért, először vizsgáljuk az egyenes rúdelem x - y síkbeli mozgását. A fenti hipotézisek felhasználásával és a 3.3. ábra jelöléseivel, ahol $u(x)$, $v(x)$ - dinamikai feladatoknál $u(x,t)$, $v(x,t)$ - a rúd tengelyén lévő C középpont elmozdulásai, egy tetszőleges helyzetű P anyagi pont elmozdulás koordinátái a következők lesznek:

$$u_x = u - y\sin\theta_z \approx u - yv' , \quad u_y = v , \quad u_z = 0 . \tag{3.2}$$



3.3 ábra. Az *Euler – Bernoulli* rúdelem mozgásai

A lineáris elmélet keretében feltételezzük, hogy a mozgások és a forgások kicsik, azaz $\sin\theta_z \approx \theta_z \approx tg\theta_z = v'$. A (0.4) geometriai egyenletekből következik, hogy most az egyetlen nem zérus alakváltozás jellemző az ε_x tengelyirányú fajlagos nyúlás. A fajlagos nyúlás és az egyszerű - az egytengelyű feszültségi állapotra érvényes - *Hooke* törvényből a normál feszültség

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u' - yv'', \qquad \sigma_x = E\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right), \tag{3.3}$$

ahol ε_x^* a nem közvetlen mechanikai hatás, például a hőmérsékletváltozás következtében kialakuló fajlagos nyúlás. Az elmozdulásokra érvényesített egyszerűsítő feltételekkel összhangban tételezzük fel, hogy a rúdelem ΔT hőmérséklet változása a keresztmetszetben lineáris:

$$\varepsilon_x^* = \alpha\Delta T\left(x,y\right) = \alpha\left(\Delta T_0\left(x\right) + \Delta T_{Gy}\left(x\right)y\right), \tag{3.4}$$

ahol α a lineáris hőtágulási együttható, ΔT_0 az átlagos hőmérséklet változás és ΔT_{Gy} a hőmérséklet változás y irányú gradiense. Ezzel a keresztmetszet síkjára merőleges feszültség:

$$\sigma_x = E\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right) = E\left(u' - \alpha\Delta T_0\right) - E\left(v'' + \alpha\Delta T_{Gy}\right)y\,. \tag{3.5}$$

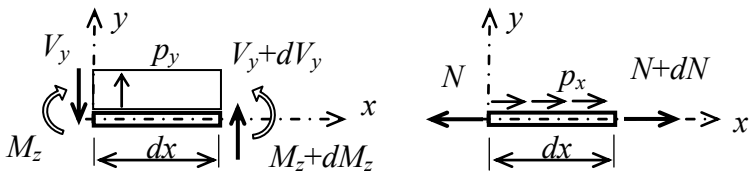
Az N húzó, M_z hajlító és a V_y nyíró igénybevételek, figyelembe véve a (3.1) keresztmetszeti jellemzőket is, a statikai egyenértékűség alapján a következők:

$$N = \int_A \sigma_x dA = EA\left(u' - \alpha\Delta T_0\right)\,,\quad M_z = -\int_A y\sigma_x dA = EI_z\left(v'' + \alpha\Delta T_{Gy}\right)\,,$$
$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0\,. \tag{3.6}$$

Látszik, hogy az *Euler–Bernoulli* hipotézisek és az azt kifejező (3.2) elmozdulások következménye, hogy a $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ nyíró feszültség, és így a V_y nyíró igénybevétel is zérus. Ez nyilván nem lehetséges, ha rúdon a tengelyre merőleges, y irányú terhe-

lések is vannak. Ezt az ellentmondást - ami a mozgásokra vonatkozó egyszerűsítő feltételezések következménye - csak úgy lehet feloldani, ha nyíró igénybevételt nem a feszültség eloszlásból, hanem a (3.6) egyenletek „megkerülésével”, közvetlenül a 3.4 ábrán látható rúdelemre felírható egyensúlyi egyenletből határozzuk meg. A rúdelem egyensúlyát kifejező vetületi és nyomatéki egyenletek:

$$\begin{aligned} &dN + p_x dx = 0\,, \quad dV_y + p_y dx = 0\,, \quad dM_z + V_y dx = 0\,, \\ &N' = -p_x\,, \qquad V_y' = -p_y\,, \qquad V_y = -M_z'\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$



3.4 ábra. Egyenes rúdelem egyensúlya

A (3.4) és a (3.7) egyenletekből felírhatjuk a síkbeli, egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű húzott és hajlított rúdelem alapegyenleteit - a 2.1. fejezet szerinti lokális egyenleteket:

$$u'' = -\frac{p_x}{EA} + \alpha\Delta T_0'\,, \quad v'''' = \frac{p_y}{EI_z} - \alpha\Delta T_{Gy}''\,. \tag{3.8}$$

Az egyenletek megoldása egy-két rúdból álló, statikailag határozott, vagy egyszeresen határozatlan szerkezetekre még viszonylag egyszerűen felírható. A klasszikus - elsősorban az erőmódszert, vagy más néven a *Castigliano* és *Betti* tételeket alkalmazó - megoldási módszerek részletes leírása megtalálható az elemi szilárdságtannal foglalkozó tankönyvekben, például *Muttnyánszky* [11] vagy *Csizmadia-Nándori* [17] közismert tankönyveiben.

Bonyolultabb alakú és terhelésű, esetleg térbeli rúdszerkezetek (lásd 3.1. ábra) mechanikai vizsgálatára ezek az egyenletek már gyakorlatilag közvetlenül nem alkalmasak. Szükség van egy nagy hatékonyságú numerikus eljárásra, aminek alapja a virtuális munka elve.

3.1.1 A virtuális munka elve

Az 2.2. fejezetben megállapítottuk, hogy egy mechanikai rendszer egyensúlyban van ha teljesül a

$$\delta\Pi = \delta\left(U - W_k\right) = 0 \tag{3.9}$$

virtuális munka elve. Alkalmazzuk ezt az elvet az előző fejezetben tárgyalt *Euler-Bernoulli* rúdelemre! A rúd tengelyén lévő pontok kicsi δu, δv, virtuális elmozdulá-

sai következtében az alakváltozási energia (0.17) megváltozása, a (3.3) és (3.5) alakváltozás és feszültség helyettesítésével:

$$\delta U = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_V \sigma_x \delta\varepsilon_x\, dV =$$

$$= \delta \int_L \left(\int_A E\left[\left(u' - \alpha\Delta T_0\right) - \left(yv'' + \alpha\Delta T_{Gy}\right) y \right] \left(\delta u' - y\delta v''\right) dA \right) dx \ ,$$

ahol a térfogati (dV) integrálokat felbontottuk a keresztmetszet menti (dA) és a hossz menti (dx) integrálokra. A keresztmetszeti integrálok elvégzése után, a (3.1) keresztmetszeti jellemzők helyettesítésével a következő eredményt kapjuk,

$$\delta U = \delta \int_L E\left[A\left(u' - \alpha\Delta T_0\right)\delta u' + I_z\left(v'' + \alpha\Delta T_{Gy}\right)\delta v'' \right] dx \ ,$$

ami átrendezés után a következő alakú lesz:

$$\delta U = \delta\left(\frac{1}{2}\int_L E\left(Au'^2 + I_z v''^2\right) dx - \int_L E\alpha\left(A\Delta T_0 u' - I_z \Delta T_{Gy} v''\right) dx \right) ,$$

$$U = \frac{1}{2}\int_L E\left(Au'^2 + I_z v''^2\right) dx - \int_L E\alpha\left(A\Delta T_0 u' - I_z \Delta T_{Gy} v''\right) dx \ . \tag{3.10}$$

Megjegyzés: Ha eltekintünk a hőmérsékletváltozás hatásától, és az U fenti kifejezésébe helyettesítjük a (3.6) igénybevételek - elmozdulások kapcsolatot, akkor az alakváltozási energiának egy másik,

$$U = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2}\int_L \frac{M_z^{\ 2}}{EI_z} dx \ ,$$

az elemi szilárdságtanból is jól ismert alakjához jutunk

A (3.9) elvben δW_k a rúdra ható külső, terhelő erők virtuális munkáját (ez a kicsi δu, δv virtuális mozgásokon végzett virtuális munka) jelöli. Ha például a rúdon (a rúd tengelye mentén) csak olyan $p_x(x)$, $p_y(x)$ megoszló terhelések vannak, amelyek függetlenek az u és v elmozdulásoktól, (3.4. ábra) akkor:

$$\delta W_k = \int_L \left(p_x \delta u + p_y \delta v\right) dx = \delta \int_L \left(p_x u + p_y v\right) dx \ ,$$

$$W_k = \int_L \left(p_x u + p_y v\right) dx \ . \tag{3.11}$$

További terhek - például koncentrált erők - esetén a W_k értelemszerűen további tagokat is tartalmazhat. Például, gyorsan mozgó rúdelemeknél a terhelő erőrendszer részének tekinthetjük a (0.9) *d'Alambert* erőt is, aminek megfelelő vonal menti megoszló erők:

$$p_x = -\rho A\ddot{u}\,, \quad p_y = -\rho A\ddot{v}\,.$$

Ezzel a virtuális munka elvének az *Euler – Bernoulli* rúdelemre érvényes alakja, a tehetelenségi erők virtuális munkájával kiegészíve:

$$\begin{aligned}
&\delta\Pi(u,v) \\
&\quad = \delta\left(\frac{1}{2}\int_L \left(EAu'^2 + EI_z v''^2\right)\,dx - \int_L E\alpha\left(A\Delta T_0 u' - I_z \Delta T_{Gy} v''\right)\,dx\right) \\
&\quad - \delta W_k + \int_L \rho A\left(\ddot{u}\,\delta u + \ddot{v}\delta v\right)\,dx \;= 0\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A kinematikailag lehetséges u(z,t) és v(z,t) elmozdulások közül az lesz az adott feladat megoldása, amelyik teljesíti a virtuális munka elvét.

Fontos ismét hangsúlyozni, hogy a (3.12) virtuális munka elv csak akkor érvényes, ha az abban szereplő független változók, az $u(z,t)$ és $v(z,t)$ elmozdulások, kinemetikailag lehetségesek, azaz eleve teljesítik a mozgásokra vonatkozó peremfeltételeket!

Lassú - kvázistatikus - folyamatoknál a (3.12) utolsó tagjában lévő tehetetlenségi erő a többi mechanikai terheléshez képest elhanyagolható, továbbá, helyettesítve a virtuális munka (3.11) alakját, a (3.12) elv egy egyszerűbb formáját kapjuk,

$$\begin{aligned}
\delta\Pi(u,v) = \delta\Bigg(&\frac{1}{2}\int_L \left(EAu'^2 + EI_z v''^2\right)\,dx - \\
&-\int_L E\alpha\left(A\Delta T_0 u' - I_z \Delta T_{Gy} v''\right)\,dx - \int_L \left(p_x u + p_y v\right)dx\Bigg) = 0\,,
\end{aligned}$$

ami a (0.23) *Lagrange* féle szélsőérték elvnek egyenes rudakra érvényes alakja:

$$\Pi(u,v) = extrémum,$$

$$\begin{aligned}
\Pi(u,v) = &\frac{1}{2}\int_L \left(EAu'^2 + EI_z v''^2\right)dx - \\
&-\int_L E\alpha\left(A\Delta T_0 u' - I_z \Delta T_{Gy} v''\right)\,dx - \int_L \left(p_x u + p_y v\right)dx
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A (3.12) eredményből - és a (3.6) lokális egyenletekből is – látható, hogy egyenes rúdelemeknél a főtengelyek koordináta rendszerében a húzás és a hajlítás nem kapcsolódnak, ezeket külön-külön vizsgálhatjuk. A független u és v mozgásokra vonatkozó virtuális munka elvek:

$$\delta\Pi = \delta\Pi(u) + \delta\Pi(v) = 0 \;\rightarrow\; \delta\Pi(u) = 0\,,\;\; \delta\Pi(v) = 0\,,$$

$$\delta\Pi(u)=\int_L EAu'\delta u'\,dx-\int_L EA\alpha\Delta T_0\delta u'\,dx-\delta W_k+\int_L \rho A\ddot{u}\,\delta u\,dx=0\,, \quad (3.14)$$

$$\delta\Pi(v)=\int_L EI_z v''\delta v''\,dx+\int_L EI_z\alpha\Delta T_{Gy}\delta v''\,dx-\delta W_k+\int_L \rho A\ddot{v}\delta v\,dx=0\,, \quad (3.15)$$

ahol W_k - értelem szerűen - a mechanikai terheléseknek vagy az u, vagy a v mozgásokon végzett munkája

A virtuális munka elv - vagy a szélsőérték elvek - megoldására több módszert is ismerünk, ezeket direkt módszereknek nevezik. Itt most kettőt érdemes megemlíteni a *Rayleigh-Ritz*, vagy röviden *Ritz* módszert és a végeselem módszert. Ez utóbbit majd a következő fejezetekben részletesen ismertetjük.

3.1.2 A Rayleigh-Ritz módszer

A *Rayleigh-Ritz*, vagy röviden *Ritz* módszer szerint az u és v kinematikailag lehetséges elmozdulásokat függvénysorokkal közelítjük,

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x,t)\,, \quad v(x,t)=\sum_{j=1}^{m} b_j g_j(x,t)\,, \qquad (3.16)$$

ahol az f_i és g_j függvények külön-külön teljesítik a kinematikai peremfeltételeket. A függvények típusa tetszőleges lehet (pl. hatvány vagy trigonometrikus függvények), de a (3.12) és (3.14)-(3.15) elvekben szereplő deriváltaknak létezni kell. További, a konvergencia szempontjából fontos követelmény, hogy a (3.16) függvénysorok legyenek teljesek. Mivel az a_i és b_j tetszőleges, de egyelőre határozatlan együtthatók, az f_i és g_i függvények pedig kinematikailag lehetségesek, a virtuális elmozdulásokat a következő formában írhatjuk fel:

$$\delta u(x,t)=\delta a_i f_i(x,t)\,, \quad \delta v(x,t)=\delta b_i g_i(x,t)\,.$$

A közelítő függvényeket behelyettesítve a (3.12) elvbe, az a továbbiakban az a_i, b_j változók függvénye lesz:

$$\delta\Pi(u,v)=\delta\Pi(a_i,b_j)=\frac{\partial\Pi}{\partial a_i}\delta a_i+\frac{\partial\Pi}{\partial b_j}\delta b_j=0\,,$$

ami a következő lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i}=0\,, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial b_j}=0\,, \quad i=1,\ldots,N,\ \mathrm{j}=1,\ldots,M. \qquad (3.17)$$

Az (n+m) egyenletből álló lineáris egyenletrendszer a_i, b_j megoldásait a (3.16) sorokba visszahelyettesítve megkapjuk az adott feladat közelítő megoldását, amiből további mennyiségeket, igénybevételeket, támaszerőket, stb, lehet kiszámítani.

Egy szilárd test anyagi pontjainak elmozdulásai különbözőek lehetnek. Az egyes pontok mozgásának iránya, mértéke más és más, ezért azt mondhatjuk hogy egy deformálható szilárd test szabadságfokainak száma végtelen. A (3.16) interpolációval ezt a végtelen sok szabadságfokú rendszert helyettesítjük egy véges, $(n+m)$ szabadságfokú rendszerrel.

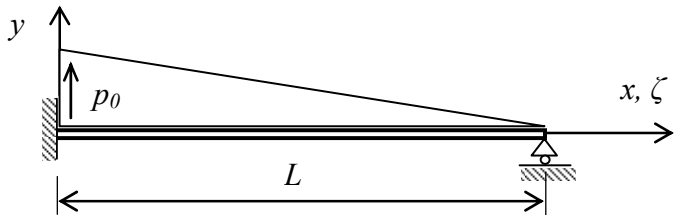
A közelítő megoldás pontossága, az n és m számok mellett erősen függ a közelítő f_i és g_j függvények helyes és célszerű kiválasztásától. Ugyancsak javíthatjuk a megoldások pontosságát, ha a (3.16) függvénysort úgy határozzuk meg, hogy az a dinamikai peremfeltételeket, vagy azok egy részét is teljesítse. Például szabad rúdvégen az a_i és b_j értékektől függetlenül legyen a nyíró és hajlító igénybevétel zérus. A szakirodalomban több, ehez hasonló gyorsító eljárást is találhatunk. Ezek a kiegészítő feltételek nem szükségesek, de hasznosak.

3.1.3 Példa: Rúd megoszló terheléssel

Határozzuk meg a 3.5 ábrán látható, állandó keresztmetszetű rúd $v(x)$ lehajlását és az $M_z(x)$ hajlító igénybevételét. A lineárisan változó megoszló terhelés

$$p_y = p_0\left(1 - x/L\right) = p_0\left(1-\zeta\right)\ , \quad \zeta = x/L$$

alakban írható fel. A függvények kezelését egyszerűsíti, ha az x koordináta helyett a továbbiakban a dimenziótlan $\zeta = x/L$ koordinátát használjuk.



3.5. ábra. Rúd megoszló terheléssel

A (3.15) szélsőérték elvnek erre a feladatra érvényes alakja, mivel EI_z állandó és $dx = Ld\zeta$:

$$\Pi\left(v\right) = \frac{1}{2}\int_L EI_z v''^2\ dx - \int_L p_y v\ dx = \frac{EI_z}{2}\int_0^1 v''^2 Ld\zeta - p_0\int_0^1 \left(1-\zeta\right) vLd\zeta\ = extr.$$

Első lépés a megtámasztás módját megadó

$$v\left(0\right) = 0\ , \quad v'\left(0\right) = 0\ , \quad v\left(1\right) = 0$$

peremfeltételeket teljesítő, kinematikailag lehetséges függvények meghatározása. A

$$v\left(\zeta\right) = \zeta^2\left(1-\zeta\right)\sum_{i=1}^{N} a_i \zeta^{i-1}$$

teljes hatványsor minden egyes tagja teljesíti ezeket a feltételekett. Természetesen, más típusú függvényeket is használhatnánk, de az adott feladat jellege és az elvégzendő deriválási és integrálási műveletek szempontjából ez a polinom alak a legkedvezőbb.

A legegyszerűbb, első közelítés legyen a sor első tagja:

$$v_1(x) = a_1\zeta^2(1-\zeta) = a_1\left(\zeta^2 - \zeta^3\right).$$

Ezek után kiszámíthatjuk a virtuális munka elvében lévő határozott integrálokat:

$$\int_0^1 v''^2 L d\zeta = \frac{1}{L^3}\int_0^1 \left(\frac{d^2 v_1}{d\zeta^2}\right)^2 d\zeta = \frac{1}{L^3} a_1^2 \int_0^1 \left(4 - 24\zeta + 36\zeta^2\right) d\zeta = a_1^2 \frac{4}{L^3} ,$$

$$\int_0^1 (1-\zeta) v L d\zeta = a_1 L \int_0^1 (1-\zeta)\left(\zeta^2 - \zeta^3\right) d\zeta = a_1 \frac{L}{30} ,$$

majd ezeket visszahelyettesítve, a teljes potenciál a következő, egyváltozós függvény alakjában írható fel:

$$\Pi(a_1) = \frac{EI_z}{2} a_1^2 \frac{4}{L^3} - a_1 p_0 \frac{L}{30} = extr.$$

Az egyváltozós függvény szélsőérték feladatának megoldásából:

$$\frac{d\Pi}{da_1} = 0 \;\rightarrow\; a_1 = \frac{p_0 L^4}{120 EI_z} .$$

Ezzel a lehajlás és a (3.6) hajlító igénybevétel első közelítése:

$$v_1(x) = \frac{p_0 L^4}{120 EI_z}\left(\zeta^2 - \zeta^3\right) , \quad M_{z1} = EI_z v'' = \frac{p_0 L^2}{120}(2 - 6\zeta).$$

Most számítsuk ki a pontosabb. második közelítést is! A lehajlás függvény legyen a függvénysor első két tagja:

$$v_2(x) = \zeta^2(1-\zeta)(a_1 + a_2\zeta) = a_1\left(\zeta^2 - \zeta^3\right) + a_2\left(\zeta^3 - \zeta^4\right) .$$

A virtuális munka elvében szereplő

$$\int_0^1 v''^2 L d\zeta$$

$$= \frac{1}{L^3}\int_0^1 \Big[a_1^2\left(4-24\zeta+36\zeta^2\right)+2a_1a_2\left(12\zeta-60\zeta^2+72\zeta^3\right)$$

$$+a_2^2\left(36\zeta^2-144\zeta^3+144\zeta^4\right)\Big]d\zeta = \frac{1}{L^3}\left(4a_1^2+8a_1a_2+\frac{24}{5}a_2^2\right),$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)vLd\zeta = L\left(a_1\frac{1}{30}+a_2\frac{1}{60}\right),$$

határozott integrálokkal a teljes potenciál:

$$\Pi\left(a_1,a_2\right)=\frac{EI_z}{2}\frac{1}{L^3}\left(4a_1^2+8a_1a_2+\frac{24}{5}a_2^2\right)-p_0L\left(\frac{a_1}{30}+\frac{a_2}{60}\right)=extr.$$

A kétváltozós függvényre vonatkozó szélsőérték feladat a következő lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}=0\rightarrow\quad \frac{EI_z}{L^3}\left(4a_1+4a_2\right)-p_0\frac{L}{30}=0\ ,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2}=0\rightarrow\quad \frac{EI_z}{L^3}\left(4a_1+\frac{24}{5}a_2\right)-p_0\frac{L}{60}=0\ .$$

A lineáris egyenletrendszer

$$a_1=\frac{p_0L^4}{120EI_z}\frac{7}{2}\ ,\quad a_2=-\frac{p_0L^4}{120EI_z}\frac{5}{2}\ ,$$

megoldásait helyettesítve, a lehajlás és a hajlító igénybevétel második közelítése a következő lesz:

$$v_2\left(x\right)=\frac{p_0L^4}{120EI_z}\left(3{,}5\zeta^2-6\zeta^3+2{,}5\zeta^4\right)\ ,\qquad M_{z2}=\frac{p_0L^2}{120}\left(7-36\zeta+30\zeta^2\right).$$

Végül a harmadik közelítés legyen

$$v_3\left(x\right)=\zeta^2\left(1-\zeta\right)\left(a_1+a_2\zeta+a_3\zeta^2\right)=a_1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)+a_2\left(\zeta^3-\zeta^4\right)+a_3\left(\zeta^4-\zeta^5\right)$$

amivel ismét elvégezve az előzőekben már részletezett műveleteket a teljes potenciál a következő háromváltozós függvénnyé redukálódik:

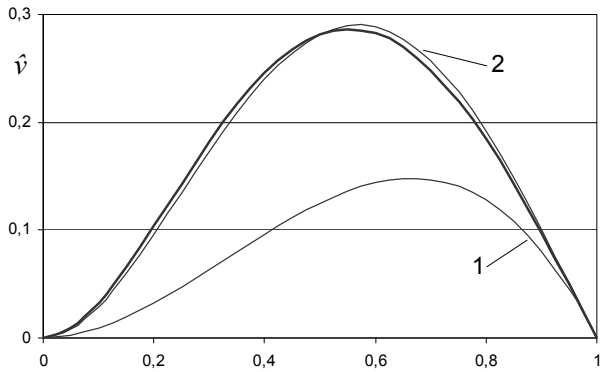
$$\Pi\left(a_1,a_2,a_3\right)=\frac{EI_z}{2}\frac{1}{L^3}\left(4a_1^2+\frac{24}{5}a_2^2+\frac{208}{35}a_3^2+8a_1a_2+8a_1a_3+\frac{52}{5}a_2a_3\right)$$
$$-p_0L\left(\frac{a_1}{30}+\frac{a_2}{60}+\frac{a_3}{105}\right)=extr.$$

A $\partial\Pi/\partial a_1=0,\ \partial\Pi/\partial a_2=0,\ \partial\Pi/\partial a_3=0$ lineáris egyenletrendszer

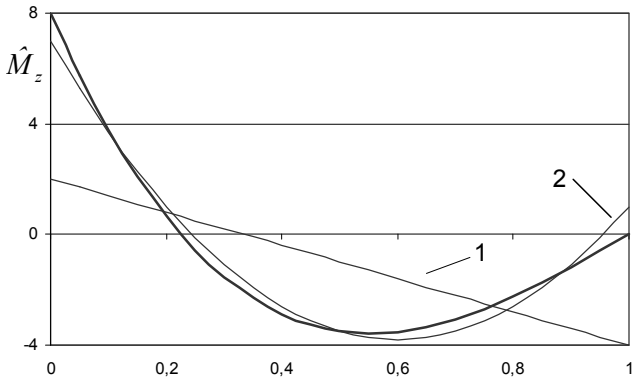
$$a_1=\frac{p_0L^4}{120EI_z}4\ ,\qquad a_2=-\frac{p_0L^4}{120EI_z}4\ ,\qquad a_3=\frac{p_0L^4}{120EI_z}\ ,$$

megoldásával a lehajlás és a hajlító nyomaték harmadik közelítése - ami most megegyezik a pontos megoldással:

$$v\left(x\right)=\frac{p_0L^4}{120EI_z}\left(4\zeta^2-8\zeta^3+5\zeta^4-\zeta^5\right)\ ,$$
$$M_z=\frac{p_0L^2}{120}\left(8-48\zeta+60\zeta^2-20\zeta^3\right)\ .$$



3.6/a ábra. A közelítő lehajlás függvények



3.6/b ábra. A közelítő nyomtéki függvények

A 3.6/a,b ábrákon a

$$\hat{v} = v \Big/ \left(\frac{p_0 L^4}{120 EI_z} \right), \quad \hat{M}_z = M_z \Big/ \left(\frac{p_0 L^2}{120} \right)$$

dimenziótlan elmozdulás és nyomaték függvények első és második közelítéseit összehasonlíthatjuk a pontos megoldással.

Az ábrákon a következő - általánosan érvényes - tulajdonságokat figyelhetjük meg:

- A v_2 elmozdulás hibája kisebb, mint az M_{z2} nyomaték hibája. A virtuális munka elvén alapuló direkt numerikus módszerekre általában igaz, hogy az elmozdulások hibája kisebb, mint az ezekből számolt igénybevételek, feszültségek hibája.

- Az ismert dinamikai peremfeltétel - a rúd végén $M_z = 0$ - a közelítő megoldásokban csak közelítőleg teljesül. Az ismert és a számolt dinamikai peremfeltételek - peremterhelések - eltérése jól jellemzi a közelítő számítás minőségét.

- Ha a felhasznált közelítő függvényekből a pontos megoldás előállítható, akkor a *Ritz* módszerrel meghatározott megoldás a pontos megoldás lesz.

3.1.4 Dinamikai feladatok, szabad lengések

A szabad lengés azt jelenti, hogy a terheletlen, rugalmas szerkezet lengőmozgást végez. A (3.12), elv, ha nincs külső erőhatás és hőmérsékletváltozás, a következő alakúa lesz:

$$\delta \Pi = \delta \left(\frac{1}{2} \int_L \left(EAu'^2 + EI_z v''^2 \right) dx \right) + \int_L \rho A \left(\ddot{u}\, \delta u + \ddot{v} \delta v \right) dx = 0 \,. \quad (3.18)$$

A főtengelyek koordináta rendszerében az u és v mozgások nem kapcsolódnak, azok egymástól függetlenül vizsgálhatóak:

$$\delta \Pi(u) = \delta \frac{1}{2} \int_L EAu'^2 \, dx + \int_L \rho A \ddot{u} \delta u \, dx = 0 \,,$$

$$\delta \Pi(v) = \delta \frac{1}{2} \int_L EI_z v''^2 \, dx + \int_L \rho A \ddot{v} \delta v \, dx = 0 \,,$$

vagy más formában,

$$\delta \Pi(u) = \int_L EAu' \delta u' \, dx + \int_L \rho A \ddot{u} \delta u \, dx = 0 \,, \quad (3.19)$$

$$\delta \Pi(v) = \frac{1}{2} \int_L EI_z v'' \delta v'' \, dx + \int_L \rho A \ddot{v} \delta v \, dx = 0 \,. \quad (3.20)$$

Ha a rúd anyaga lineárisan rugalmas, nincs csillapítás és nincs külső gerjesztő hatás, akkor a rúdelem pontjai időben periodikus - harmonikus - lengő mozgást végeznek:

$$u(x,t)=U(x)\sin\omega t\ ,\quad v(x,t)=V(x)\sin\omega t\ , \tag{3.21}$$

ahol ω a szabad, lengő mozgás frekvenciája, a *sajátfrekvencia*. Az U és V, függvények a lengő mozgás amplitúdó függvényei, vagy más néven a *lengésképek*. Az U és V egyelőre tetszőleges, de kinematikailag lehetséges függvények. A (3.21) alapján a virtuális elmozdulások, a deriváltak és a gyorsulások a következők:

$$\delta u=\delta U\sin\omega t\ ,\quad \delta v=\delta V\sin\omega t\ ,$$

$$u''=U''\sin\omega t\ ,\quad v''=V''\sin\omega t\ ,\quad \ddot{u}=-\omega^2 U\sin\omega t\ ,\quad \ddot{v}=-\omega^2 V\sin\omega t\ .$$

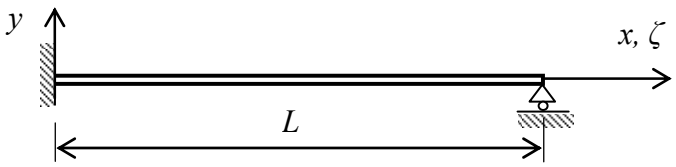
Ezek helyettesítése után a (3.19), (3.20) elveknek a szabad, longitudinális és a hajlító lengésekre vonatkozó alakjai:

$$\begin{gathered}\int_L EAU'\delta U'\,dx-\omega^2\int_L \rho AU\delta U\,dx=0\ ,\\ \delta\left(\int_L EAU'^2dx-\omega^2\int_L \rho AU^2dx\right)=0\ ,\end{gathered} \tag{3.22}$$

$$\begin{gathered}\int_L EI_zV''\delta V''\,dx-\omega^2\int_L \rho AV\delta V\,dx=0\ ,\\ \delta\left(\int_L EI_zV''^2\,dx-\omega^2\int_L \rho AV^2\,dx\right)=0\ ,\end{gathered} \tag{3.23}$$

3.1.5 Példa: Hajlító lengés

Határozzuk meg a 3.7 ábrán látható, állandó keresztmetszetű rúd x-y síkbeli, hajlító lengéseinek első frekvenciáját! A rúd anyagának tömegsűrűsége ρ.



3.7 ábra. Rúd szabad, hajlító lengése

A (3.23) elvnek erre a feladatra érvényes alakja:

$$EI_z\int_L V''\delta V''\,dx-\omega^2\rho A\int_L V\delta V\,dx=0\ ,$$

mivel EI_z és a ρA állandó. A kinematikailag lehetséges, a

$$v(0)=0\,,\quad v'(0)=0\,,\quad v(1)=0$$

megtámasztási feltételeket teljesítő, közelítő $V(x)$ lengésképet célszerű az előző, feladathoz hasonlóan a

$$V(\zeta)=\zeta^2(1-\zeta)\sum_{i=1}^{N}a_i\zeta^{i-1}\quad,\quad \zeta=x/L$$

teljes hatványsor alapján felvenni.

Az első közelítés legyen a sor első tagja:

$$V_1(x)=a_1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)\,,\qquad \delta V_1(x)=\delta a_1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)\quad .$$

A virtuális munka elvében lévő határozott integrálok:

$$\int_0^1 V''^2 L d\zeta=\frac{1}{L^3}\int_0^1\left(\frac{d^2V_1}{d\zeta^2}\right)^2 d\zeta=a_1^2\frac{4}{L^3}\,,$$

$$\int_0^1 V^2 L d\zeta=a_1^2 L\int_0^1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)^2 d\zeta=a_1^2\frac{L}{105}\,,$$

majd ezzel a virtuális munka elve a következő alakban írható fel:

$$\delta a_1\left(4\frac{EI_z}{L^3}-\omega^2\rho A\frac{L}{105}\right)a_1=0\,.$$

Mivel δa_1 tetszőleges, és a_1 nem lehet zérus - mert akkor nincs lengésképe - az első frekvencia első közelítő értékére a következő egyenletet kapjuk:

$$4\frac{EI_z}{L^3}-\omega^2\rho A\frac{L}{105}=0\;\rightarrow\;\omega_{1,1}=20{,}49\sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}}\,.$$

A második közelítés számításához a lengésképe legyen a függvénysor első két tagja:

$$V_2(x)=a_1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)+a_2\left(\zeta^3-\zeta^4\right)=\left[\left(\zeta^2-\zeta^3\right)\quad\left(\zeta^3-\zeta^4\right)\right]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\mathbf{Na}\,,$$

$$\delta V_2(x)=\delta a_1\left(\zeta^2-\zeta^3\right)+\delta a_2\left(\zeta^3-\zeta^4\right)=\mathbf{N}\delta\mathbf{a}=\delta\mathbf{a}^T\mathbf{N}^T\quad .$$

A több szabad paraméter esetén célszerű áttérni a mátrixos jelölésekre. A virtuális munka elvében szereplő határozott integrálok (az előző feladathoz hasonlóan):

$$\int_0^1 V''^2 L d\zeta = \frac{1}{L^3}\left(4a_1^2 + 8a_1a_2 + \frac{24}{5}a_2^2\right) ,$$

$$\int_0^1 V^2 L d\zeta = L\left(\frac{1}{105}a_1^2 + \frac{1}{84}a_1a_2 + \frac{1}{252}a_2^2\right) .$$

Helyettesítés után a virtuális munka elvét rendezzük át a következő mátrix szorzat formába:

$$\delta\mathbf{a}^T\left(\frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & \frac{24}{5}\end{bmatrix} - \rho AL\omega^2\begin{bmatrix}\frac{1}{105} & \frac{1}{168}\\ \frac{1}{168} & \frac{1}{252}\end{bmatrix}\right)\mathbf{a} = 0 \quad , \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} .$$

Mivel a $\delta\mathbf{a}$ tetszőleges, ebből a következő homogén és lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\left(\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & \frac{24}{5}\end{bmatrix} - \frac{\rho AL^4}{EI_z}\omega^2\begin{bmatrix}\frac{1}{105} & \frac{1}{168}\\ \frac{1}{168} & \frac{1}{252}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} = 0$$

Az $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ most nem elfogadható megoldás, mert akkor nincs lengő mozgás. A homogén egyenletrendszernek csak akkor lehet nem zérus megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus. Bevezetve a

$$q = \frac{\rho AL^4}{EI_z}\omega^2$$

jelölést, a következő sajátérték feladatot kapjuk:

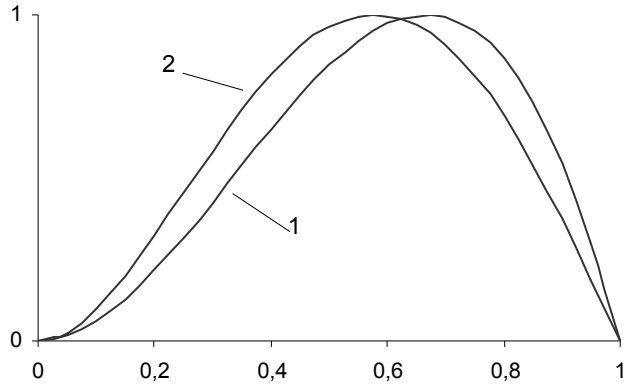
$$det\begin{bmatrix}4 - \frac{q}{105} & 4 - \frac{q}{168}\\ 4 - \frac{q}{168} & \frac{24}{5} - \frac{q}{252}\end{bmatrix} = 0 \quad .$$

A detrmináns kifejtésének eredménye a másodfokú karakterisztikus egyenlet. A másodfokú egyenlet q_1 = 238,73 és q_2 = 5675,06 megoldásaiból az első két sajátfrekvencia második közelítései:

$$\omega_{1,2} = 15,45\sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad , \quad \omega_{2,2} = 75,33\sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} .$$

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

A sajátértékkel az ismert módon kiszámíthatjuk a sajátvektorokat, aminek ismeretében a meghatározhatjuk a lengésképeket. A 3.8 ábra mutatja az első frekvenciához tartozó lengésképe első és második (a q_1 sajátértékhez tartozó) közelítéseit.



3.8 ábra. Az első lengésképe első és második közelítései

Ha a közelítő eredményeket összevetjük a

$$\omega_1 = 15,42\sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad , \quad \omega_2 = 49,96\sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \ .$$

pontos eredményekkel, akkor megállapíthatjuk, hogy a második közelítés csak az első frekvenciára ad elfogadható értéket. A közelítő függvények száma mindig több kell legyen - általában 3 - 5 taggal - mint a kiszámítandó frekvenciák száma.

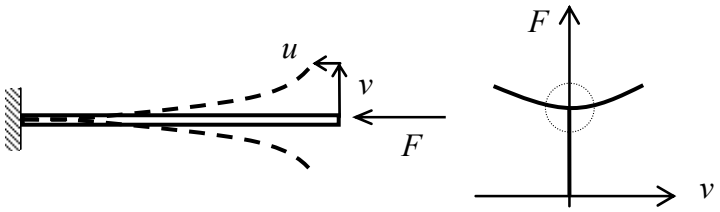
További fontos észrevétel, hogy a közelítő számítás eredményei mindig nagyobbak, mint a pontos frekvencia értékek. Ennek magyarázata, hogy a *Ritz* módszerrel generált véges szabadságfokú rendszer mindig merevebb, mint az eredeti, végtelen szabadságfokú rugalmas kontinuum.

3.1.6 Nyomott rúdelemek kihajlása

Egy rugalmas szerkezet instabilitását az jellemzi, hogy a külső hatások - terhek - kismértékű megváltoztatása jelentős mértékű mozgásokat eredményez. Előfordulhat, hogy a rugalmas szerkezet a kismértékű teher változás megszüntetése után nem tér vissza az eredeti helyzetébe, hanem egy új egyensúlyi állapotba kerül. Ilyenkor az eredeti egyensúlyi állapot instabil, az új állapot pedig feltehetően már stabil.

Ezt a jelenséget követhetjük a 3.9 ábrán. Ha a nyomóerő meghalad egy kritikus értéket, akkor a rúdnak több egyensúlyi állapot van, lehet, hogy egyenes marad (v = 0), de kismértékű oldalirányú zavarás hatására kihajlik, és onnan már nem tér vissza az eredeti egyenes állapotba. Az egyensúlyi állapotokat jellemző vonalak el-

ágazási pontját bifurkációs pontnak nevezzük. A bifurkációs pontot alatt a szerkezet viselkedését leíró egyenleteknek csak egy megoldása van, azonban az elágazási pontot elérve az egyenletek egyértékűsége megszűnik. A megoldás között vannak stabil és instabil megoldások is. Mérnöki szempontból a legfontosabb eredmény az elágazási pont eléréséhez szükséges, F_{cr} *kritikus terhelés* meghatározása.

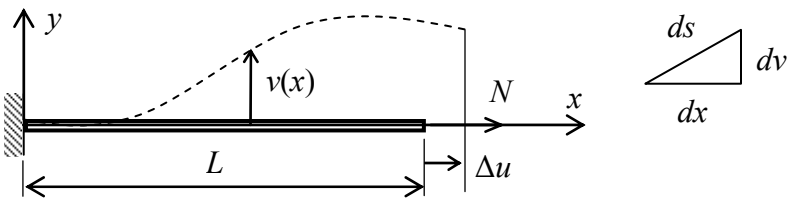


3.9 ábra. A bifurkációs pont

Rúdszerkezeteknél gyakori jelenség a nyomott rúdelemek kihajlása. A kihajlás egy lehetséges stabilitásvesztési forma. Természetesen, lehetnek más stabilitásvesztési formák is, mint például a hajlított rudak oldalirányú kifordulása, vagy vékonyfalú elemek horpadása. Ezek részletes elemzése többnyire nemlineáris egyenletekhez vezet.

A továbbiakban szűkítsük le a vizsgált jelenségek körét a nyomott elemek kihajlására, amit *Euler* féle stabilitásvesztésnek is neveznek.

Amint az a 3.9. ábrán is látható, az F tengelyirányú erő támadáspontjának van tengelyirányú u elmozdulása, ami két részből tevődik össze. Egyrészt, a húzó/nyomó igénybevétel hatására a rúd megnyúlik/összenyomódik, másrészt, a tengelyre merőleges irányú $v(x)$ elmozdulás további Δu mozgást okoz. Ez a Δu elmozdulás általában másodrendben kicsi és elhanyagolható, azonban a kritikus állapot, a bifurkációs pont közelében hatása mégis számottevő lehet. Ilyenkor a virtuális munka elvében a tengely irányú erők W_k munkájának meghatározásánál - az egyébként másodrendben kicsi - Δu mozgást is figyelembe kell venni. A másodrendben kicsi Δu elmozdulás hatásával is számoló modellt a szakirodalomban gyakran *másodrendű elméletnek* is nevezik.



3.10 ábra. Hajlított rúd tengelyirányú mozgása

Számítsuk ki az egyenes rúd tengelyére merőleges irányú, $v(x)$ lehajlás következtében előálló, x tengely irányú mozgást! A 3.10. ábra jelöléseivel a görbült rúd középvolán az ívhossz elem:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + v'^2}\,dx \approx \left(1 + \frac{1}{2}v'^2\right)dx \,.$$

A középvonal hossza, ami a hajlítás következtében nem változik (ugyanis, a (3.3) egyenletből, ha $u = 0$ és $y = 0$, a fajlagos nyúlás értéke zérus):

$$L = \int_0^L ds = \int_0^{L+\Delta u}\left(1 + \frac{1}{2}v'^2\right)dx = L + \Delta u + \int_0^{L+\Delta u}\frac{1}{2}v'^2 dx \,.$$

Ebből a hajlítás okozta tengelyirányú elmozdulás és az N húzó igénybevételt létrehozó, x tengely irányú külső $F = N$ erő munkája (nyomó igénybevétel esetén az N természetesen negatív):

$$\Delta u = -\int_0^{L+\Delta u}\frac{1}{2}v'^2 dx \approx -\frac{1}{2}\int_0^L v'^2 dx \,, \qquad W_k = N\Delta u = -\frac{1}{2}\int_0^L N\, v'^2 dx \,.$$

A (3.12) virtuális munka elve ezzel a kiegészítéssel - ha csak statikus terhelések vannak és a hőmérséklet változás hatásától eltekintünk - a következő alakú lesz:

$$\delta\Pi(u,v) = \delta\left(\frac{1}{2}\int_L \left(EAu'^2 + EI_z v''^2\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_L Nv'^2\,dx\right) - \delta W_k = 0 \,.$$

Itt is látszik, - a statikai és dinamikai feladathoz hasonlóan - hogy a főtengelyek koordináta rendszerében az u és v mozgások nem kapcsolódnak, azok egymástól függetlenül vizsgálhatóak. A tengelyére merőleges irányú, v mozgásra vonatkozó virtuális munka elve,

$$\delta\Pi(v) = \delta\left(\frac{1}{2}\int_L \left(EI_z v''^2\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_L Nv'^2\,dx\right) - \delta W_k = 0 \,,$$

vagy ugyanez, más formában

$$\int_L EI_z v''\delta v''\,dx + \int_L Nv'\delta v'\,dx - \delta W_k = 0 \,, \tag{3.24}$$

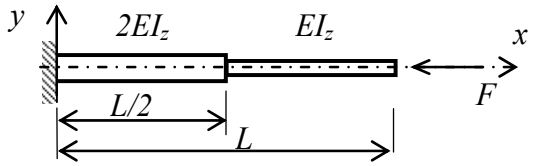
ahol δW_k a rúd tengelyére merőleges terhek virtuális munkája. . *A kinematikailag lehetséges $v(x)$ elmozdulások közül az lesz az adott feladat megoldása, amelyik teljesíti a virtuális munka elvét*. Ha az adott feladatnak több $v(x)$ megoldása is lehet, akkor a rendszer terhelése elérte a 2.5 ábra szerinti elágazási ponthoz tartozó kritikus értékét. A bifurkációs pont utáni állapotok vizsgálatára a lineáris elmélet és az ahhoz tartozó (2.21) virtuális munka elv már nem alkalmas.

A másodrendben kicsi Δu elmozdulás hatásával is számoló modellt a szakirodalomban *másodrendű elméletnek* is nevezik.

A rugalmas rendszerek stabilitási problémáival részletesebben foglalkozó, terjedelmes szakirodalomból érdemes megemlíteni *Timoshenko* [3] és *Kollár* [16] könyveit.

3.1.7 Példa: Egyenes rúd kihajlása

Határozzuk meg a 3.11. ábrán látható, változó keresztmetszetű rúd *x-y* síkbeli kihajlásához tartozó kritikus nyomóerőt!



3.11 ábra. Változó keresztmetszetű rúd

A (3.24) virtuális munka elvének erre a feladatra érvényes alakja:

$$EI_z\left(2\int_0^{L/2} v''\delta v''dx+\int_{L/2}^{L} v''\delta v''dx\right)-F\int_0^L v'^2dx=0 \ ,$$

mivel $N = -F$ és EI_z szakaszonként állandó. Első lépés a kinematikailag lehetséges függvények kiválasztása. A $v(0)=0,\ v'(0)=0$ peremfeltételeket a

$$v(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i x^{i+1}$$

teljes hatványsor minden egyes tagja teljesíti. Más típusú, például trigonometrikus függvényeket is használhatnánk, tudva, hogy az *Euler* féle kihajlási feladat pontos megoldási trigonometrikus függvények kombinációi, de az elvégzendő deriválási és integrálási műveletek szempontjából a polinom alak kedvezőbb.

Az első közelítés legyen a sor első tagja:

$$v_1(x)=a_1x^2 \ , \qquad \delta v_1(x)=\delta a_1 x^2 \ .$$

A virtuális munka elvében lévő határozott integrálok értéke:

$$\int_0^{L/2} v''^2dx=2a_1^2L \ , \quad \int_{L/2}^{L} v''^2dx=2a_1^2L \ , \quad \int_0^L v'^2dx=\frac{4}{3}a_1^2L^3 \ ,$$

majd ezeket visszahelyettesítve, a következő alakban egyenletet kapjuk:

$$\delta a_1 \left(EI_z 6L - FL^3 \frac{4}{3} \right) a_1 = 0 .$$

Mivel δa_1 tetszőleges, ennek az egyenletnek több megoldása is van. Lehet $a_1 = 0$, ami azt jelenti, hogy az egyenes alak is egyensúlyi megoldás. De lehet a zárójelben lévő rész is zérus, ahonnan a kritikus erő első közelítő értékére a következő adódik:

$$\left(EI_z 6L - FL^3 \frac{4}{3} \right) = 0 \;\rightarrow F_{cr1} = 4{,}5 \frac{EI_z}{L^2} .$$

Ez utóbbi esetben a_1 értéke tetszőleges, tehát a szerkezet elérte a 3.8. ábrán bemutatott elágazási pontot. A bifurkációs pont utáni állapotok vizsgálatára azonban a lineáris elmélet és az ahhoz tartozó virtuális munka elv már nem alkalmas.

A második közelítés legyen a függvénysor első két tagja:

$$v_2(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 = \begin{bmatrix} x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a} ,$$

$$\delta v_2(x) = \delta a_1 x^2 + \delta a_2 x^3 = \mathbf{N}\delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{N}^T .$$

Az $\mathbf{N}$ a közelítő függvények és $\mathbf{a}$ az együtthatók mátrixa:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}' = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 6x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \end{bmatrix} .$$

A virtuális munka elvében szereplő határozott integrálok kiszámított értékeit visszahelyettesítve virtuális munka elvébe, amit az előző feladathoz hasonlóan átrendezünk mátrix szorzatok formájába:

$$\delta\mathbf{a}^T \left(\begin{bmatrix} 6 & \frac{15}{2}L \\ \frac{15}{2}L & \frac{27}{2}L^2 \end{bmatrix} - \frac{FL^2}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3}{2}L \\ \frac{3}{2}L & \frac{9}{5}L^2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{a} = 0 .$$

Mivel a $\delta\mathbf{a}$ tetszőleges, az $\mathbf{a}$ elemei a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai lesznek:

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & \frac{15}{2}L \\ \frac{15}{2}L & \frac{27}{2}L^2 \end{bmatrix} - \frac{FL^2}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3}{2}L \\ \frac{3}{2}L & \frac{9}{5}L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

Az $\mathbf{a} = 0$ egy lehetséges megoldás, ami azt jelenti, hogy az egyenes alak is egyensúlyi helyzet. A homogén egyenletrendszernek csak akkor lehet nem zérus megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus. Ez egy sajátérték feladat. A

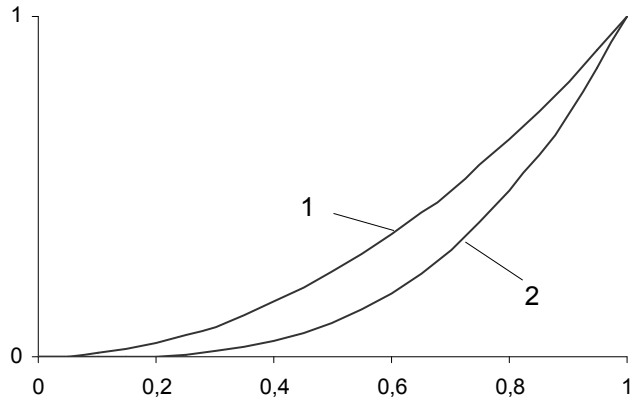
$$q = \frac{FL^2}{EI_z}$$

jelöléssel, a determináns kifejtése után a következő másodfokú karakterisztikus egyenlethez jutunk:

$$q^2 0{,}15 - q6{,}3 + 24{,}75 = 0\,.$$

A két lehetséges sajátérték közül a kritikus erő számításánál csak legkisebb abszolút értékűnek van értelme. A kisebbik sajátértékből a kritikus erő másodok közelítése:

$$F_{cr2} = 4{,}39\frac{EI_z}{L^2}\,,$$



3.12 ábra. A kihajlott alak első és második közelítése

A tartó kihajlott alakjának második közelítése az első sajátértékhez tartózó sajátvektor:

$$v_2(x) = a_1\left(x^2 - 0{,}164x^3 / L\right).$$

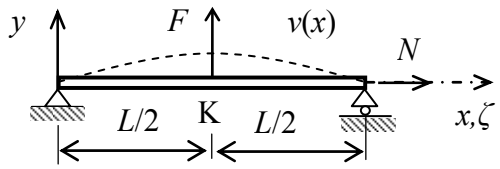
A kritikus erő két tizedesre pontos eredménnye:

$$F_{cr2} = 4{,}13\frac{EI_z}{L^2}$$

A második közelítés hibája 6,3%. Itt is megfigyelhető, hogy a közelítő kritikus erő nagyobb, mint a pontos érték. Ennek is az a magyarázata, hogy a közelítő, véges szabadságfokú rendszer merevebb, mint az eredeti, végtelen szabadságfokú rugalmas kontinuum. Ezért a kritikus erő számításnál különösen figyelni kell a modell és a számítás pontosságára, mivel a közelítés nem a biztonság oldalára viszi el az eredményeket.

3.1.8 Példa: A másodrendű elmélet

Határozzuk meg a 3.13 ábrán látható egyenes, állandó keresztmetszetű rúd $v(x)$ lehajlását és az $M_z(x)$ hajlító igénybevételét! A rúd terhelése F erő a K középpontban és az N erő végpontjában. A számításnál vegyük figyelembe a hajlított rúd végpontjának tengely irányú mozgásait is!



3.13 ábra. Húzott, hajlított rúd lehajlása

A (3.24) virtuális munka elvének erre a feladatra érvényes alakja:

$$\delta\Pi(v) = EI_z \int_0^L v''\delta v'' dx + N\int_0^L v'\delta v' dx - F\delta v_K = 0 \quad ,$$

vagy más formában:

$$\Pi(v) = \frac{EI_z}{2}\int_0^L v''^2 dx + \frac{N}{2}\int_0^L v'^2 dx - Fv_K = extrémum \ .$$

mivel EI_z állandó és v_K a K középpont elmozdulása.

A $v(0)=0,\ v(L)=0$ peremfeltételeket is teljesítő, első közelítés legyen

$$v_1(x) = a_1 \, sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

A virtuális munka elvében lévő határozott integrálok értéke:

$$\int_0^L v''^2 dx = a_1^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = a_1^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{L}{2} \ ,$$

$$\int_0^L v'^2 dx = a_1^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \int_0^L cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = a_1^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{L}{2} \ ,$$

majd ezeket visszahelyettesítve, a következő egyenletet kapjuk:

$$\Pi(a_1) = a_1^2 \frac{1}{2}\left[EI_z\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + N\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]\frac{L}{2} - Fa_1 \, ,$$

és a szélsőérték feltételéből a megoldás

$$\frac{d\Pi}{da_1}=0 \rightarrow a_1=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{2}{\pi^4}\frac{1}{1+\frac{NL^2}{EI_z\pi^2}}=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{2}{\pi^4}\frac{1}{1-N/N_{cr}},$$

ahol felhasználtuk az *Euler* féle kritikus nyomó erő kifejezését is:

$$N_{cr}=-\frac{EI_z\pi^2}{L^2}.$$

Ezzel a 3.13 ábrán látható tartó másodrendű elmélet szerinti lehajlásának első közelítése:

$$v_1(x)=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{2}{\pi^4}\frac{1}{1-N/N_{cr}}sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

A közelítő megoldás hibájára kaphatunk egy becslést, ha összevetjük a középpont lehajlásának az elsőrendű elmélet szerinti v_K pontos, és a most kiszámított, $N = 0$ terheléshez tartozó v_{1K} lehajlását:

$$v_K=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{1}{48}, \quad v_{1K}=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{2}{\pi^4}=\frac{FL^3}{EI_z}\frac{1}{48,70}.$$

A hiba kisebb, mint1,5%, feltételezhetjük hogy az $N \neq 0$ megoldás hibája is ilyen nagyságrendű. A másodrendű elmélet szerinti hajlító igénybevételi függvény első közelítése a (3.6) egyensúlyi egyenletből:

$$M_{z1}=EI_z v_1''=-FL\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{1-N/N_{cr}}sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

Most is összehasonlítsuk össze a maximális hajlító nyomatéknak az elsőrendű elmélet szerinti és a most kiszámított, $N = 0$ terheléshez tartozó értékeit:

$$M_{z,max}=-FL\frac{1}{4}, \quad M_{z1max}=-FL\frac{2}{\pi^2}=-FL\frac{1}{4,93}.$$

A nyomaték hibája közel 20%, ami jóval nagyobb, mint az elmozdulás első közelítésének hibája. Álltalában érvényes megállapítás, hogy a virtuális munka elvén alapuló numerikus módszereknél - beleértve a végeselelm módszert is - az elmozdulások hibája mindig kisebb, mint az ezekből számolt igénybevételek, hibája.

Az eredményekből az is látszik, hogy rúdszerkezeteknél a másodrendű elmélet szerinti számításnak akkor van jelentősége, ha a rúdelemek nyomó igénybevétele megközelíti a kritikus nyomóerőt.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

3.2 A *Timoshenko* féle rúdelmélet

A 3.1. fejezetben, a (3.6) összefüggés kapcsán megállapítottuk, hogy az *Euler-Bernoulli* elmélet nem veszi figyelembe a nyírási alakváltozásokat. Ez az ott felsorolt feltételezések közül a 3. következménye, ami szerint a keresztmetszet síkja mindig merőleges a rúd görbült tengelyére. A *Timoshenko* elmélet ezt a megkötést feloldja, és ezért a 3.14 ábrán a θ_z keresztmetszet forgás nem azonos a tengely érintőjének v' elfordulásával. A keresztmetszet síkjában lévő, tetszőleges helyzetű P anyagi pont elmozdulás koordinátái, ha θ_z kicsi, a következők:

$$u_x = u - y\sin\theta_z \approx u - y\theta_z\ , \qquad u_y = v\ , \qquad u_z = 0\ . \tag{3.25}$$

A (2.4) geometriai egyenletből az alakváltozások, majd a *Hooke* törvénnyel a feszültségek, és végül a belső és külső erők statikai egyenértékűségéből az igénybevételek a következő formában írhatók fel:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u' - y\theta_z'\ , \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\theta_z + v'\ ,$$

$$N = \int_A \sigma_x dA = EAu'\ ,$$

$$M_z = -\int_A y\sigma_x dA = EI_z\theta_z'\ , \quad V_y = \int_A \tau_{xy} dA = GA\left(v' - \theta_z\right)\ . \tag{3.26}$$

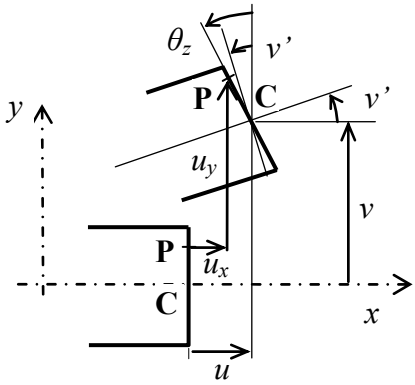
Látható, hogy a *Timoshenko* elmélet szerint a nyíró feszültség a keresztmetszetben állandó. Ilyen értelemben ez is egy közelítő elmélet. A (3.7)

$$V_y' = -p_y\ , \qquad V_y = -M_z'$$

egyensúlyi egyenletek felhasználásával felírhatjuk a síkbeli, egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű *Timoshenko* rúdelem hajlításának alapegyenleteit:

$$GA\left(v' - \theta_z\right)' = -p_y\ , \qquad EI_z\theta_z'' + GA\left(v' - \theta_z\right) = 0\ , \tag{3.27}$$

amelyekben két ismeretlen függvény, a $v(x)$ elmozdulás és a $\theta_z(x)$ forgás szerepel.



3.14 ábra. A *Timoshenko* rúdelem mozgásai

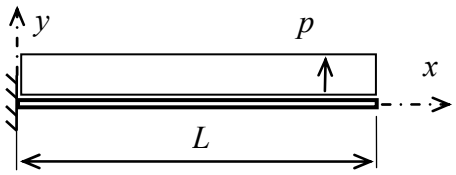
A (3.25) elmozdulás koordináták ismeretében felírhatjuk a *Timoshenko* modellre az (2.16) vagy (2.21) virtuális munka elvet. A belső erők virtuális munkája:

$$
\begin{aligned}
\delta U &= \int_L \left(\int_A \left(\varepsilon_x E \ \delta\varepsilon_x + \gamma_{xy} G \delta\gamma_{xy} \right) dA \right) dx \\
&= \int_L EAu'\delta u' \ dx + \int_L EI_z \theta_z' \delta\theta_z' dx + \int_L GA\left(v' - \theta_z\right)\delta\left(v' - \theta_z\right) \ dx \\
&= \delta\left(\frac{1}{2}\int_L EAu'^2 \ dx + \frac{1}{2}\int_L EI_z \theta_z'^2 dx + \frac{1}{2}\int_L GA\left(v' - \theta_z\right)^2 \ dx \right) \\
&= \delta U_{húzó} + \delta U_{hajlító} + \delta U_{nyíró} \ .
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

ahol az utolsó két tag a hajlításból és a nyírásból származó energia növekmény. A keresztmetszeti integrálok számításánál figyelembe vettük a (3.1) keresztmetszeti jellemzőket is. Az (2.21) virtuális munka elvben a további tagok - a kezdeti belső erők, a tehetetlenségi erők és a külső terhelések munkája – számításában nincs eltérés, azok megegyeznek az *Euler-Bernoulli* elméletből levezetett (3.12) elvben lévő tagokkal.

3.2.1 Példa: Nyírási elmozdulás

A nyírás hatásának értékeléséhez oldjuk meg a 2.14 ábrán látható egyszerű konzolos tartóra a *Timoshenko* elmélet (3.27) egyenlet rendszerét.



3.15 ábra. Konzolos tartó

Az egyenletek közül az első egyszer integrálható,

$$GA\left(v'-\theta_z\right)=-p_y x+c_1\,,$$

mivel p_y állandó. Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$EI_z\theta_z''=p_y x\text{-}c_1\,,$$

majd integrálva mindkét oldalt:

$$\theta_z'=\frac{p_y}{EI_z}\frac{x^2}{2}-\frac{c_1}{EI_z}x+c_2\,,\qquad \theta_z=\frac{p_y}{EI_z}\frac{x^3}{6}-\frac{c_1}{EI_z}\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3\,.$$

A szögelfordulást visszahelyettesítve az első egyenletbe, megkapjuk az elmozdulást:

$$v'=\frac{1}{GA}\left(c_1-p_y x\right)+\theta_z=\frac{1}{GA}\left(c_1-p_y x\right)+\frac{p_y}{EI_z}\frac{x^3}{6}-c_1\frac{x^2}{2EI_z}+c_2x+c_3\,,$$

$$v=\frac{1}{GA}\left(c_1x-p_y\frac{x^2}{2}\right)+\frac{p_y}{EI_z}\frac{x^4}{24}-c_1\frac{x^3}{6EI_z}+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4\,.$$

A négy integrálási állandót a konzol végeire felírható

$$x=0:\quad v=0\,,\qquad \theta_z=0$$

$$x=L:\quad M_z=0\rightarrow\theta_z'=0\,,\quad V_y=0\rightarrow v'-\theta_z=0$$

kinemeatikai és dinamikai peremfeltételekből határozhatjuk meg:

$$c_1=p_yL\,,\quad c_2=\frac{p_yL^2}{2EI_z}\,,\ c_3=0\,,\quad c_4=0\,.$$

Végül, a megoldás:

$$v\left(x\right)=\frac{p}{EI_z}\left(\frac{x^4}{24}-\frac{Lx^3}{6}+\frac{L^2x^2}{4}\right)+\frac{p}{GA}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)\,,$$

$$\theta_z\left(x\right)=\frac{p}{EI_z}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{Lx^2}{2}+\frac{L^2x}{2}\right)\,.$$

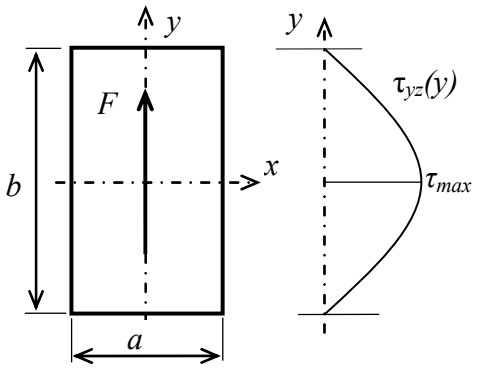
A $\theta_z(x)$ forgás teljes egészében és a $v(x)$ első része megegyezik az *Euler-Bernoulli* megoldással. A rúd végének

$$v_{max}=\frac{p\,L^4}{8EI_z}\left(1+\frac{8EI_z}{GAL^2}\right)=v_{max\,E-B}\left(1+8\frac{E}{G}\frac{I_z/\mathrm{A}}{L^2}\right)$$

lehajlásából megállapítható, hogy a nyírási alakváltozásnak akkor lehet jelentősége, ha a rúd rövid, vagy ha az E/G anyagjellemző hányados nagy. Homogén izotróp fémes anyagra $E/G \approx 2{,}6$, azonban rétegzett, kemény és lágy rétegekből álló rudaknál az E/G hányados értéke akár százas nagyságrendű is lehet.

3.2.2 A nyíró terület

A *Timoshenko* féle modellben a nyíró feszültség a keresztmetszetben állandó, ami nyilván egy közelítés. Az állandó nyíró feszültséggel a (3.28) alakváltozási energia nyírási része is közelítő érték lenne, azonban a tényleges A keresztmetszet terület helyett az $A_{sy} = Ak_{sy}$ nyíró terület használatával a pontos energia értéket kapjuk. A k_{sy} nyíró faktor keresztmetszeti jellemző.



3.16 ábra. Téglalap szelvény nyírása

Például, a 3.16 ábra szerinti, axb méretű téglalap keresztmetszetben a nyíró feszültség

$$\tau_{yz} = \frac{V_y}{I_z}\frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right),$$

ami az y tengely mentén parabolikus eloszlás. Ebből számolva, a nyírási energia növekmény pontos értéke:

$$\delta U_{pontos} = \int_L \left(\int_A \gamma_{xy} G \delta\gamma_{xy} dA\right) dx = \delta \int_L \left(\frac{1}{2G}\int_A \tau_{xy}{}^2 dA\right) dx =$$

$$\delta \int_L \left(\frac{1}{8G}\frac{V_y{}^2}{I_z{}^2}\int_A \left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)^2 dA\right) dx = \delta \int_L \frac{V_y{}^2}{2G}\frac{1{,}2}{A}\, dx\ .$$

Ugyanez az energia növekmény az állandó, V_y/A átlagos nyíró feszültséggel:

$$\delta U_{\text{közelítő}} = \delta \int_L \left(\frac{1}{2G} \int_A \tau_{xy}{}^2 dA \right) dx = \delta \int_L \left(\frac{\tau_{xy}{}^2}{2G} A \right) dx = \delta \int_L \frac{V_y{}^2}{2G} \frac{1}{A} dx .$$

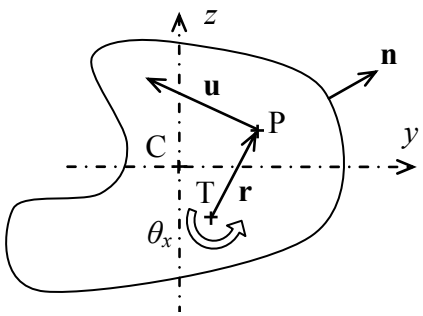
Látható, hogy a közelítő eredmény akkor lesz azonos a pontos eredménnyel, ha abban a tényleges A terület helyett az $A_{sy} = A/1{,}2 = A\ 0{,}833$ nyíró területet használjuk. Téglalap keresztmetszetre a nyíró faktor a főtengelyek irányába azonos: $k_{sx} = k_{sy} = 0{,}833$. Más alakzatra a nyíró faktor irányonként eltérő lehet. Egyes végeselem programrendszerekben speciális segédmodulok végzik a nyíró faktorok – és a többi keresztmetszet jellemző – kiszámítását. (például a *FemDesign®* rendszer *Section Editor* modulja [22])

Itt érdemes megjegyezni, hogy a műszaki gyakorlatban a maximális nyíró feszültség számításához használják az $A_{s,eff}$ effektív nyíró terület fogalmát is. Példánkban a maximális feszültség $\tau_{yzmax} = 1{,}5 V_y/A = V_y/A_{s,eff}$, tehát téglalap szelvényre $A_{s,eff} = A\ 0{,}666$. Az alakváltozási energia és a maximális feszültség számításához használatos nyíró területek nem azonosak!

3.3 A St'Venant féle csavarási modell

Az előzőekben csak síkbeli rúdelemeket vizsgáltunk, ami azt jelentette, hogy a terhelés is és az elmozdulások is valamelyik főtengely, y vagy z, és az x tengely síkjában vannak. Ilyenkor a rúdnak nem lehet csavaró igénybevétele és elcsavarodó mozgása. Ha a terhelés irányára nincs megkötés, vagy a rúdelem egy térbeli vázszerkezet része, akkor számolni kell a csavarás hatásával is. Csavaráskor a rúd igénybevétele a 3.17 ábra szerinti M_x nyomatékú csavaró erőpár.

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a mérnöki gyakorlatban legtöbbször használt, prizmatikus, egyenes rudak csavarási feladatát. A *St'Venant* féle, vagy szabad csavarási modell alapvető feltételezése, hogy a rúd keresztmetszetében csak csúsztató feszültségek jönnek létre. A szabad jelző itt arra utal, hogy ebben a modellben a keresztmetszet tengely irányú mozgását, a csavarási vetemedést semmi sem gátolja.



3.17 ábra. A keresztmetszet elcsavarodása

Mivel a keresztmetszet alakja nem torzul, az a saját síkjában nézve, ahogy azt a 3.17 ábra is mutatja, mint egy merev alakzat elfordul a T pont körül. Az elmozdulás vektor, feltéve, hogy a $\theta_x(x)$ forgás kicsi,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ -\theta_x\left(z - z_T\right) \\ \theta_x\left(y - y_T\right) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

formában írható fel, ahol y_T, z_T a T forgáspont vagy *csavaró középpont* koordinátái és az u_x a keresztmetszet pontjainak a síkra merőleges, x irányú elmozdulása. Ebben a formában ismeretlenek a $\theta_x(x)$ és az $u_x(x,y,z)$ függvények valamint a T forgás középpont helyét megadó x_T, y_T koordináták.

A (3.29) elmozdulásokból az alakváltozások az (2.4) lineáris geometriai egyenletek, a feszültségek pedig a rudakra érvényes, egyszerű *Hooke* törvény szerint a következő formában írhatók fel:

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x = E\ \frac{\partial u_x}{\partial x}\ ,$$

$$\tau_{xy} = G\ \gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = G\left[\frac{\partial u_x}{\partial y} - \theta_x'\left(z - z_T\right)\right],$$

$$\tau_{xz} = G\ \gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = G\left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \theta_x'\left(y - y_T\right)\right],$$

ahol E és G a lineárisan rugalmas, izotróp és homogén anyag jellemzői. Ha a szabad csavarás feltétele teljesül, és a tengely irányú mozgások kialakulását semmi sem gátolja, akkor a rúd keresztmetszetében nincs σ_x normál feszültség. Ezek alapján a csúsztató feszültség koordináták a következő, egyszerűbb alakban írhatók fel:

$$\tau_{xy} = G\left[-\vartheta\left(z - z_T\right) + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right], \quad \tau_{xz} = G\left[\vartheta\left(y - y_T\right) + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right]. \tag{3.30}$$

Ha a szabad csavarás előzőekben részletezett feltételei nem teljesülnek, és a tengely irányú mozgás, a vetemedés korlátozása miatt a σ_x normál feszültség értéke jelentős lehet, akkor az úgynevezett *gátolt csavarási* feladatot kell megoldani. Ennek egyik közismert módja a *Vlasov* féle csavarási modell alkalmazása, aminek magyar nyelvű leírása megtalálható *Ponomarjov* [4] könyvében.

A (3.30) egyenletekben egyelőre még ismeretlenek az y_T, z_T csavaró középpont koordináták a θ_x' = q fajlagos elcsavarodás és az u_x elmozdulás függvény. A to-

vábbi vizsgálatok célja az, hogy ezeket az ismeretlen mennyiségeket a rugalmasságtani egyenletek felhasználásával meghatározzuk.

Vezessük be a $\varphi(y,z)$ *St'Venant* féle vetemedési függvényt a következő definícióval:

$$u_x = \vartheta\left(\varphi - yz_T + zy_T\right) , \qquad \vartheta = \frac{d\theta_x}{dx} = \theta'_x . \tag{3.31}$$

A $\varphi(y,z)$ vetemedési függvény használatával – legalábbis formálisan – az ismeretlenek számát csökkentettük, ugyanis a (3.30) csavarási csúsztató feszültségek a következő, tömörebb formában írhatók fel:

$$\tau_{xy} = G\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right) , \qquad \tau_{xz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right). \tag{3.32}$$

A belső erőkre vonatkozó (2.8) egyensúlyi egyenletek megmaradó része, mivel most nincs térfogati erőhatás,

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad ,$$

ami a (3.30) összefüggések helyettesítésével a következőt eredményezi:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{3.33}$$

A rúd palástja terheletlen, ezért a keresztmetszet peremgörbéjén a (3.32) csúsztató feszültségek erdője csak érintő irányú lehet. Ha a 3.17 ábra szerinti **n** a peremgörbe kifelé mutató normális egységvektora, akkor a terheletlen peremen az (2.15) dinamikai peremfeltételek:

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0 \quad , \quad \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} n_y & n_z \end{bmatrix} \ , \quad |\mathbf{n}| = 1 \ . \tag{3.34}$$

A φ St'Venant féle vetemedési függvény a (2.35) homogén *Laplace* féle peremérték feladat megoldása. A vetemedési függvény kiszámításának további részletei, beleértve a numerikus módszerek, a végeselem eljárás alkalmazását is erre a feladatra, megtalálhatok a [4], [6], [10] vagy a [21] könyvekben.

3.3.1 Csavarási másodrendű nyomaték

A $\varphi(y,z)$ vetemedési függvény mellett még a $\theta_x' = \mathsf{q}$ fajlagos elcsavarodásra is szükség van a (3.32) csúsztató feszültség eloszlás egyértelmű megadásához. A külső és belső erőrendszerek statikai egyenértékűsége alapján a csúsztató feszültségek nyomatéka megegyezik az M_x csavaró igénybevétellel:

$$M_x = \int_A \left(y\tau_{xz} - z\tau_{xy} \right) dA = G\vartheta \int_A \left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y^2 - z\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z^2 \right) dA ,$$

és definíció szerint a J csavarási másodrendű nyomaték:

$$M_x = G\theta_x' J \;\rightarrow\; J = I_y + I_z - \int_A \left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) dA \;. \qquad (3.35)$$

A J keresztmetszeti jellemző és a $\varphi(y,z)$ vetemedési függvény ismeretében a (2.34) csúsztató feszültség eloszlása már egyértelműen meghatározható:

$$\tau_{xy} = \frac{M_x}{J}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z \right) , \quad \tau_{xz} = \frac{M_x}{J}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y \right).$$

A kör vagy a körgyűrű keresztmetszet C középpontja és a T csavaró/nyíró középpontja egybeesik, azaz $y_T = z_T = 0$, és nincs tengely irányú elmozdulás, nem vetemedik, $u_x = 0$. Ekkor, a (3.31) egyenletből $\varphi = 0$, és ezért a (3.35) J csavarási másodrendű nyomaték megegyezik a poláris másodrendű nyomatékkal: $J = I_y + I_z = I_p$, és a (3.32) az elemi szilárdságtanból ismert lineáris feszültség eloszlást eredményezi. Nem kör alakú keresztmetszetekre a J keresztmetszeti jellemzőt a *St'Venant* féle csavarási feladat rugalmasságtani megoldásából lehet kiszámítani és értéke általában kisebb, mint az $I_p = I_y + I_z$ poláris másodrendű nyomaték, $J < I_p$. Vékonyfalú szelvényeknél a két érték között akár nagyságrendi különbség is lehet, például az IPE 100 szelvényre ezek a keresztmetszeti jellemzők: $I_p = 186{,}9$ cm^4 , $J = 1{,}15$ cm^4.

3.3.2 A csavaró/nyíró középpont

A rúd pontjainak x tengely irányú elmozdulását a φ vetemedési függvény és a $\theta_x' = \mathsf{q}$ fajlagos elcsavarodás nem határozza meg egyértelműen. Az u_x elmozdulás függvényt megadó (3.31) egyenletben még határozatlan az a lineáris függvény, melynek együtthatói a csavaró középpont koordináták. Ez a lineáris függvény a rúdnak egy merevtest mozgását írja le. A (3.34) dinamikai peremfeltételek a merevtest mozgást - mivel ahhoz nem kapcsolódik alakváltozás és feszültség - nem korlátozzák. Szükség van egy olyan kiegészítő, kinematikai feltételre, ami ezt a merevtest mozgás részt korlátozza, kiszűri, az eredő mozgásokat minimalizálja, de a keresztmetszet szabad mozgását nem gátolja. Ennek megfelelően írjuk elő, hogy a keresztmetszet pontjainak tengelyirányú mozgása a lehető legkisebb legyen, azaz teljesítse a

$$F\left(y_T, z_T\right) = \int_A u_x^{\,2}\, dA = \vartheta^2 \int_A \left(\varphi - xy_T + yx_T\right)^2 dA = minimum$$

minimum feltételt. A kétváltozós szélsőérték feladat

$$\frac{\partial F}{\partial y_T} = \vartheta^2 \int_A 2\left(\varphi - yz_T + zy_T\right) z \;\, dA = 0 \,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_T} = \vartheta^2 \int_A 2\left(\varphi - yz_T + zy_T\right) y \;\, dA = 0 \,,$$

megoldásából a csavaró középpont koordinátáira a következő eredményt kapjuk:

$$y_T = -\frac{1}{I_y}\int_A z\,\varphi \;\, dA \quad , \quad z_T = \frac{1}{I_z}\int_A y\,\varphi \;\, dA \,. \tag{3.36}$$

Ha már megoldottuk a (3.33) egyenletet és ismerjük a φ *St'Venant* féle vetemedési függvényt, a csavaró középpont koordinátáit is meg tudjuk határozni.

A lineáris rugalmasságtan *Betti* tételének felhasználásával igazolható, hogy a *csavaró középpont* egybeesik a *nyíró középponttal*. (*Muttnyánszky* [11]). Definíció szerint, ha a keresztmetszet nyíró igénybevételének hatásvonala átmegy a nyíró középponton, akkor a rúd nem csavarodik. Ebből következik, hogy a rúd csavaró igénybevétele a nyíró erő nyomatéka a T pontra.

3.3.3 A virtuális munka elve

Alkalmazzuk a 2. fejezetben felírt (2.22) virtuális munka elv általános

$$\begin{gathered} \delta\Pi = \delta U + \delta T - \delta W_k = 0 \,, \\ \delta\Pi\left(\mathbf{u}\right) = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}\; dV + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u}\; dV - \delta W_k = 0 \,, \end{gathered} \tag{3.37}$$

alakját a szabad csavarási feladatra. A (3.37) alakú belső erők virtuális munkája:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_L \int_A G\left(\gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\delta\gamma_{xz}\right) dA\; dx = \\ &= \int_L G \int_A \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - z\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + y\right)^2\right] dA\theta_x{}'\delta\theta_x{}' dx \;\; = \int_L GJ\theta_x{}'\delta\theta_x{}' dx \,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Igazolható, hogy az alábbi egyenlőség teljesül minden olyan φ függvényre, amelyik a (3.33) - (3.34) peremérték feladat megoldása:

$$J=\int_A\left(y^2+z^2-y\frac{\partial\varphi}{\partial z}-z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dA=\int_A\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-z\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+y\right)^2\right]dA\,.$$

A tehetetlenségi erők virtuális munkájának számításakor figyelembe kell venni, hogy a (3.29) szerint az *y-z* síkban történő forgó mozgás pólusa a 3.17 ábra szerinti T csavaró/nyíró középpont:

$$\begin{aligned}\delta T&=\int_V\rho\ddot{\mathbf{u}}^T\delta\mathbf{u}dV=\int_L\left(\int_A\rho\left(\ddot{u}_y\delta u_y+\ddot{u}_z\delta u_z\right)dA\right)dx=\\&=\int_L\rho\ddot{\theta}_x\delta\theta_x\left(\int_A\left[\left(y-y_T\right)^2+\left(z-z_T\right)^2\right]dA\right)dx=\int_L\rho I_{pT}\ddot{\theta}_x\,\delta\theta_x\,dx\,,\end{aligned}\tag{3.39}$$

ahol I_{pT} a T pontra számított poláris másodrendű nyomaték:

$$I_{pT}=I_y+I_z+A\left(y_T^2+z_T^2\right).$$

Ezzel a virtuális munka elvének a *St'Venant* féle szabad csavarási feladatra érvényes alakja:

$$\delta\Pi\left(\theta_x\right)=\int_L GJ\theta_x'\delta\theta_x'dx+\int_L\rho I_{pT}\ddot{\theta}_x\,\delta\theta_x\,dx-\delta W_k\tag{3.40}$$

ahol θ_x a rúd keresztmetszet T pont körüli forgása, elcsavarodása és W_k a rudat terhelő csavaró erőpárok virtuális munkája.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

4 A végeselem-módszer egyenletei

A mérnöki gyakorlatban előforduló mechanikai feladatok jelentős részénél a pontos, zárt alakú megoldást nem lehet meghatározni. Ilyenkor különböző egyszerűsítéseket, közelítéseket kell alkalmazni, melyek alapvetően két csoportba sorolhatók: a mechanikai modell megalkotásához használt egyszerűsítések és a matematikai modell, a felírt egyenletek numerikus megoldása során alkalmazott közelítések.

A mechanikai modell megalkotása során a vizsgálatot végző többek között eldönti, hogy egy adott szerkezeti elem rúd vagy lemez, az anyagi tulajdonsága lineáris, vagy nem, a terhelések közül melyik jelentős, melyik nem, jellege megoszló, pontszerű, esetleg szimmetrikus. A matematikai modell vonatkozásában pedig dönteni kell az alkalmazott numerikus módszerről, meg kell határozni a megoldás pontosságát befolyásoló paramétereket, például a *Rayleigh-Ritz* módszernél a közelítő függvények típusát és számát, vagy a végeselem módszer esetén az elemfelosztás sűrűségét és a csomópontok számát. A megbízható eredményeket adó mechanikai és matematikai modellek összeállításához komoly elméleti ismeret és gyakorlati tapasztalat kell.

Ebben a fejezetben a virtuális munka elvének (2.25) alakjából kiindulva áttekintjük a végeselem módszer - az elmozdulás módszer – lényegesebb lépéseit és fogalmait.

$$\begin{aligned}\delta\Pi(\mathbf{u}) = &\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{0T}\delta\mathbf{G} dV + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}^T\delta\mathbf{u} dV - \\ &-\left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}\ dV + \int_{Ap} \mathbf{p}^T\delta\mathbf{u}\ dA + \int_V \mathbf{q}^T\delta\mathbf{u}\ dV\right).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ebben az elvben $\boldsymbol{\sigma}^0$ a kezdeti feszültségi állapot, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ a felületi és térfogati terhelések növekménye, $\mathbf{u}$ az elmozdulás növekmény, $\boldsymbol{\varepsilon}$ az alakváltozás növekménye, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ a nem mechanikai hatásokból következő alakváltozás, $\mathbf{G}$ az alakváltozások nemlineáris (másodfokú) része, $\mathbf{C}$ a rugalmas test anyagjellemzőinek szimmetrikus mátrixa, $\ddot{\mathbf{u}}$ a gyorsulás, és ρ a tömegsűrűség. *A kinematikailag lehetséges elmozdulások közül az lesz az adott lineáris rugalmasságtani feladat megoldása, amelyik teljesíti a virtuális munka elvét.*

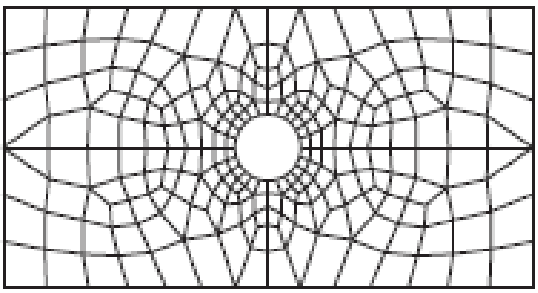
Az előző, 3. fejezetben több példa is található a *Rayleigh-Ritz* módszer alkalmazására. A módszer legfontosabb jellemzője, és hátránya, hogy a kinematikailag lehetséges, (3.16) közelítő függvénysor minden elemének az értelmezési tartománya az egész szerkezet. Bonyolultabb alakú testeknél a kinematikai peremfeltételeket eleve teljesítő interpolációs függvények megszerkesztése esetenként megoldhatatlan feladat. Ugyancsak körülményes lehet a szerkezet egészére vonatkozó határozott integrálok kiszámítása. Ezt a hátrányt küszöböli ki a végeselem eljárás, ahol a közelítő függvények értelmezési tartománya egy elem. A geometriailag egyszerű - vonal,

háromszög, négyszög, tetraéder, stb. - alakzatokon a kinematikai peremfeltételek érvényesítése és a kijelölt integrálási műveletek viszonylag egyszerűen elvégezhetőek.

A leírásban előforduló mátrixok műveletekről részletesebb leírás található az **A**. Mellékletben.

4.1 Elemek, mátrixok

A vizsgálandó szerkezet vagy test által elfoglalt V tartományt osszuk fel M számú, egyszerű alakú V_e *elemre*. Az elemek alakja függ a feladat jellegétől, például térbeli feladatnál ez lehet a tetraéder, síkbeli feladatoknál használható elemalak a háromszög, négyszög, rúdszerkezeteknél a vonalelem. Az elemek méretét az elvárt pontosság határozza meg, sűrűbb elemfelosztás mellett pontosabb numerikus eredmények várhatóak. Az elemek egy rétegben, hézagok és átfedés nélkül lefedik az egész V tartományt.



4.1 ábra. Sík lemez végeselem felosztása

A (4.1) virtuális munka elvben szereplő integrálok az egyes elemekre vonatkozó integrálok összege:

$$\int_V (...)\, dV = \sum_{e=1}^{M} \int_{Ve} (...)_e \, dV \quad . \tag{4.2}$$

Az elemek sarokpontjaiban, esetleg a belsejében is, kijelöljük a *csomópontokat*. Egy csomópont mozgását n adat, *csomóponti szabadságfok* írja le. Az n értékét az alkalmazott mechanikai modell szabja meg, például síkfeladatoknál két síkbeli elmozdulás koordinátára $n = 2$, vagy térbeli rúdszerkezetnél csomópontonként három elmozdulás és három forgás koordinátára $n = 6$. Ha egy elem csomópontjainak száma p, akkor az *elem szabadságfoka* az összes elmozdulás jellemző száma, $N = pn$.

Rendezzük el az elem i-edik ($i = 1, .. p$) csomóponti szabadságfokait a $\mathbf{\Delta}_i$ csomóponti mátrixba, melynek mérete (nx1), azaz n sor és 1 oszlop. Egy elemhez tartozó összes elmozdulás jellemző - szabadságfokok - mátrixa legyen

$$\underset{(N\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \left[\boldsymbol{\Delta}_1^{\,T},\ \ \boldsymbol{\Delta}_2^{\,T},\ \ \ldots,\ \ \boldsymbol{\Delta}_p^{\,T}\right]^T. \tag{4.3}$$

Az $\mathbf{U}^{\mathrm{e}}$ mátrix elemeinek száma megegyezik az elem szabadságfokainak számával.

4.1.1 Interpoláció

Egy elem belső pontjában az $\mathbf{u}$ elmozdulás koordinátáit az egyelőre ismeretlen $\mathbf{U}^{\mathrm{e}}$ csomóponti szabadságfokokból interpolációval határozzuk meg. Például az x irányú u_x elmozdulás interpolációja statikai vagy időben változó mozgások esetén:

$$u_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^{p} u_{xi} N_i(x,y,z)\,, \quad u_x(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{p} u_{xi}(t)\, N_i(x,y,z)\,.$$

Az N_i interpolációs függvények, szokásos elnevezéssel a *formafüggvények*, általában polinomok. Dinamikai feladatoknál a csomóponti szabadságfokok a t idő egyváltozós függvényei. A formafüggvények fokszámát a különböző mechanikai modelleknél eltérő módon, a csomóponti szabadságfokok n számától függően kell meghatározni. Ennek részleteit a következő fejezetek ismertetik. Az N_i interpolációs függvényeket az $\mathbf{N}$ interpolációs mátrixban rendezzük el és ezzel egy anyagi pont összes elmozdulásainak interpolált alakja

$$\underset{(n\times 1)}{\mathbf{u}} = \underset{(n\times N)}{\mathbf{N}}\ \underset{(N\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}}\,. \tag{4.4}$$

Az elmozdulás koordináták elemek közötti folytonosságát a kapcsolódó csomópontokhoz tartozó szabadságfokok azonossága biztosítja.

Látható, hogy a *Ritz* és a végeselem módszerek között a lényegi különbség az interpoláció megszerkesztésének módjában van. Ez jól látszik, ha összevetjük a (3.16) és a (4.4) formulákat. A *Ritz* módszer szerint a (3.16) függvénysor minden elemének az értelmezési tartománya az egész szerkezet, míg a végeselem eljárásban alkalmazott interpolációs függvények értelmezési tartománya csak egy elem.

Az egymástól lineárisan független N_i formafüggvények konkrét formája ugyan elemtípusonként változó, de a következő szabályokat minden esetben érvényesíteni kell. Ha az előírt csomóponti elmozdulások az elem (vagy az egész modell) merevtestszerű mozgását adják, akkor bármely belső pontban az alakváltozások és a feszültségek értéke legyen zérus. További követelmény, hogy az elemek csatlakozó oldalfelületei vagy élei mentén a megfelelő elmozdulás koordináták legyenek folytonosak, vagyis az elemenkénti interpoláció az egész modellre kellő mértékben folytonos eloszlást eredményezzen.

Az interpolációs függvények ismeretében az (2.4) geometriai egyenletekből ki lehet számolni az elem belső pontjaiban az alakváltozások mátrixát, valamint a virtuális elmozdulás és virtuális alakváltozás mátrixokat:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\,\mathbf{U}^e\,, & \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N}\,\delta\mathbf{U}^e\,, & \delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\,\delta\mathbf{U}^e\,, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \mathbf{U}^{eT}\mathbf{B}^T\,, & \delta\mathbf{u}^T &= \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N}^T\,, & \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{B}^T\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

ahol T a transzponálás jele. A **B** mátrix elemei az N_i interpolációs függvények parciális deriváltjai. Ezek után a (4.4) és a (4.5) felhasználásával felírhatjuk a (4.1) virtuális munka elvében szereplő integrálok egy elemre vonatkozó értékeit, amikből az egyes elemmátrixok származnak.

4.1.2 Elem mátrixok

Merevségi mátrix: A (4.1) virtuális munka elv első tagja a belső erők virtuális munkája, vagy a virtuális alakváltozási energia:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{Ve} \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\,\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV = \int_{Ve} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,dV = \\ &\delta\mathbf{U}^{eT}\int_{Ve}\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}\,dV\,\mathbf{U}^e = \delta\mathbf{U}^{eT}\underset{(N\times N)}{\mathbf{k}^e}\,\mathbf{U}^e\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ahol $\mathbf{k}^e$ jelöli az elem merevségi mátrixát. A merevségi mátrix - mivel az (2.10) *Hooke* törvényben a **C** rugalmas anyagjellemzők (2.11) mátrixa is szimmetrikus - a származtatás módjából következően szimmetrikus.

Igazolható, hogy az elem merevségi mátrix pozitív-szemidefinit. A (4.6) szerint egy lineárisan rugalmas elemben az U alakváltozási energia

$$\delta U = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}^e\,\mathbf{U}^e\,, \quad U = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}^e\,\mathbf{U}^e \geq 0\,,$$

ami sohasem lehet negatív. Az U csak akkor lesz zérus, ha a csomóponti mozgások megfelenek egy merevtest szerű mozgásnak. Minden más lehetséges mozgás esetén az elem alakváltozási energiája növekszik.

Geometriai merevségi mátrix: A szimmetrikus geometriai merevségi mátrixban megjelennek a kezdeti feszültségi állapot koordinátái.

$$\delta U_G = \int_{Ve}\boldsymbol{\sigma}^{0T}\delta\mathbf{G}\,dV = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\underset{(N\times N)}{\mathbf{k}_G^e}\,\mathbf{U}^e\,. \tag{4.7}$$

Tömegmátrix: Dinamikai feladatokban az $\mathbf{U}^e$ csomóponti szabadságfokok az idő egyváltozós függvényei. A (4.1) elvben a tehetetlenségi erők virtuális munkája:

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_{Ve}\rho\ddot{\mathbf{u}}^T\delta\mathbf{u}dV = \int_{Ve}\rho\delta\mathbf{u}^T\ddot{\mathbf{u}}dV = \\ &\delta\mathbf{U}^{eT}\int_{Ve}\rho\mathbf{N}^T\mathbf{N}\,dV\,\ddot{\mathbf{U}}^e = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\underset{(N\times N)}{\mathbf{m}^e}\,\ddot{\mathbf{U}}^e\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

A tömegmátrixnak ezt a formáját *konzisztens* tömegmátrixnak nevezik. Igazolható, hogy a fenti definíció a vizsgált szerkezet és a végeselem modell tömegének azonossága mellett a mozgási energiák azonosságát is biztosítja. Ugyanis, egy elem mozgási - kinetikai - energiája a jól ismert definíció szerint:

$$T = \frac{1}{2}\int_{Ve} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^{eT}\int_{Ve} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, dV\ \dot{\mathbf{U}}^e = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^{eT}\,\mathbf{m}^e\,\dot{\mathbf{U}}^e ,$$

ahol az elem sebesség eloszlását a (4.4) interpolációból számítottuk ki. Ebből az is belátható, hogy a tömegmátrix pozitív definit, mivel a mozgási energia nem lehet negatív.

A konzisztens tömegmátrix helyett gyakran használják a diagonál szerkezetű, úgynevezett koncentrált tömegű – *lumped* - tömegmátrixot, aminél az elem megoszló tömegét a csomópontokba koncentrálják. Ez a megközelítés csak a vizsgált szerkezet és a helyettesítő, véges szebadságfokú modell tömegének azonosságát biztosítja. A kétféle tömegmátrix használatával természetesen eltérő numerikus eredményeket kapunk, de az elemek méretének csökkentésével az eltérés is csökken. A tömegmátrix diagonál szerkezete a nagyméretű sajátérték feladatok megoldását jelentősen gyorsítja.

Tehermátrix: A (4.1) elvben a külső hatásokat tartalmazó, utolsó három tagból származtatható az elem $\mathbf{p}^e$ tehermátrixa. A (4.4) és (4.5) helyettesítésével

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}\ dV + \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\ dA + \int_V \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\ dV =$$

$$\delta\mathbf{U}^{eT}\left[\int_{Ve} \mathbf{B}^T\ \mathbf{C}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} dV + \int_{Aep} \mathbf{N}^T\ \mathbf{p}\ dA + \int_{Ve} \mathbf{N}^T\ \mathbf{q}\ dV\right] = \delta\mathbf{U}^{eT}\ \underset{(N\times 1)}{\mathbf{p}^e}\ . \tag{4.9}$$

A tehermátrix elemei a tényleges terheléssel energetikai értelemben egyenértékű csomóponti erők és nyomatékok. Ez az egyenértékűség azt jelenti, hogy a (4.4) interpolációval előállítható bármely lehetséges mozgásra a tényleges terhelés és a $\mathbf{p}^e$ csomóponti erőrendszer munkája azonos. Lineáris elmozdulás interpoláció esetén az energetikai egyenértékűség megfelel a statikai egyenértékűségnek.

4.1.3 Kinematikai peremfeltételek

A (4.1) virtuális munka elv a (4.2) szerint az egyes elemekre vonatkozó részintegrálok összegeként írható fel:

$$\delta\Pi = \sum_{e=1}^{M} \delta\mathbf{U}^{eT}\left(\ \mathbf{k}^e\mathbf{U}^e + \mathbf{k}_G^e\mathbf{U}^e + \mathbf{m}^e\ddot{\mathbf{U}}^e - \mathbf{p}^e\right) = 0\ .$$

Mivel az elemek csatlakozó csomópontjaiban az elmozdulás paraméterek (szabadságfokok) értéke azonos, az ezekhez tartozó elem mátrix elemekre az összegzést elvégezhetjük, aminek eredménye a

$$\delta\Pi\left(\mathbf{U}\right)=\delta\mathbf{U}^{T}\left[\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_{G}\right)\mathbf{U}+\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}-\mathbf{P}\right]=0 \tag{4.10}$$

alakra rendezhető. Az **U** az egész rendszer összes szabadságfokait tartalmazó oszlop mátrix, mérete a végeselem modell szabadságfoka. A **K**, $\mathbf{K}_G$, **M**, szimmetrikus rendszer mátrixok és **P** a csomóponti terhek vektora. Az összegzés végrehajtásának módját a következő fejezetek számpéldáin mutatjuk be.

Az előző fejezetekben láthattuk, hogy a virtuális munka elvének különböző változatai csak a kinematikailag lehetséges mozgásokra érvényesek. A kinematikailag lehetséges mozgások eleve teljesítik az (2.14) kinematikai peremfeltételeket. A (4.10) egyenletben az **U** akkor lesz kinematikailag lehetséges, ha az A_u felületen lévő csomópontokhoz tartozó elemei megegyeznek az előírt elmozdulásokkal. Ugyanakkor a $\delta\mathbf{U}$ virtuális elmozdulásban a hasonló pozícióban lévő elemek értéke - a (4.10) összegben az ismert csomóponti mozgásoknak megfelelő részek szorzója - zérus. Mivel a $\delta\mathbf{U}$ további elemei tetszőlegesek, a megmaradó részre a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\mathbf{U}+\mathbf{K}_{G}\mathbf{U}=\mathbf{P} \tag{4.11}$$

feltételnek kell teljesülni. Ez egy lineáris egyenletrendszer, ami, ha a szerkezet megtámasztása statikailag határozott vagy határozatlan, mindig megoldható. A statikailag határozott vagy határozatlan megtámasztás azt jelenti, hogy a geometriai kényszerekkel lekötött szabadságfokok száma azonos, vagy több, mint a szerkezet merevtest szerű mozgásának szabadságfoka. Ez biztosítja, hogy az eredetileg pozitív-szemidefinit **K** merevségi mátrix pozitív definit lesz, vagyis invertálható.

4.1.4 Támaszerők és belső erők számítása

A (4.11) egyenlet megoldása után, a most már ismert **U** rendszer mátrixból elemenként kiemeljük a (4.3) $\mathbf{U}^e$ mátrixokat, amiből a (4.5) alakváltozások, majd az elemek belső pontjaiban a (3.10) *Hooke* törvény alapján a feszültségek is számolhatóak:

$$\boldsymbol{\sigma}^{e}=\mathbf{C}\left(\mathbf{B}\,\mathbf{U}^{e}-\boldsymbol{\varepsilon}^{*}\right). \tag{4.12}$$

Ez általában közelítő megoldás, mivel a (4.4) interpoláció a belső pontok mozgását csak közelítőleg írja le. A közelítés itt azt jelenti, hogy a (4.11) egyenletrendszer pontos megoldásából kiszámított (4.12) feszültségek ugyan közelítő értékek, de - a tehetetlenségi erőkkel kiegészítve - egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Ennek magyarázata az, hogy a virtuális munka elve – aminek végső, diszkretizált formája itt a (4.11) egyenlet - egy közelítő elmozdulás mezőre pontosan teljesül. A csomópontok közötti távolságok csökkentésével, vagyis az elemek méretének csökkenté-

sével – ami elem és szabadságfok szám növelést jelent – a megoldás hibája is csökken. Természetesen, ha a (4.4) interpolációs függvényekből a pontos elmozdulás vektor előállítható, akkor a (4.11) **U** megoldása a csomópontok pontos elmozdulása lesz. Erre azonban csak egyszerűbb szerkezetek - például rácsos tartók, rúdszerkezetek - egyszerű terheléseinél lehet számítani.

A támaszerők – vagy reakció erők – azokban a csomópontokban alakulnak ki, ahol a mozgásokat az (2.14) kinematikai peremfeltételekkel előírtuk, rögzítettük. Azonban, a kinematikai feltételt átfogalmazhatjuk dinamikai feltétellé, ha egy pontba akkora erőt helyezünk, ami pontosan az ott előírt mozgást hozza létre. Ha a (4.11) **U** megoldását kiegészítjük az előírt $\tilde{\mathbf{u}}$csomóponti értékekkel, akkor az eredeti, még a kinematikai peremfeltételek miatt át nem alakított (4.11) egyenletből következő,

$$\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_G\right)\mathbf{U}+\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}=\mathbf{P} \tag{4.13}$$

teljes egyenletrendszerből, a most már teljes egészében ismert U mátrix felhasználásával kiszámolt **P** tehervektorban az eredeti külső terhelések mellett az $\tilde{\mathbf{u}}$ mozgást létrehozó csomóponti erők – támaszerők – is megjelennek.

Az előzőekben vázolt algoritmus fő lépései a következők voltak:
- a tartomány felosztása, elemek, csomópontok kijelölése, az elmozdulás interpoláció felvétele,
- elemszintű számítások, elemmátrixok meghatározása,
- összegzés, rendszer mátrixok meghatározása,
- kinematikai (mozgás) kényszerfeltételek teljesítése,
- rendszer egyenlet megoldása,
- eredmények feldolgozása, feszültségek, támaszerők számítása.

Az elemmátrixok számítását, az összegzés és megoldás technikai részleteit a különböző mechanikai modellekkel foglalkozó fejezetek számpéldáin mutatjuk be.

4.2 Végeselem analízis

A (4.10) egyenlet a kis alakváltozásokat végző, lineárisan rugalmas anyagú szerkezeteknél különböző feladattípusok megoldására alkalmas. A következő fejezetekben ezek közül a leggyakrabban használt lehetőségeket tekintjük át.

4.2.1 Lineáris statika

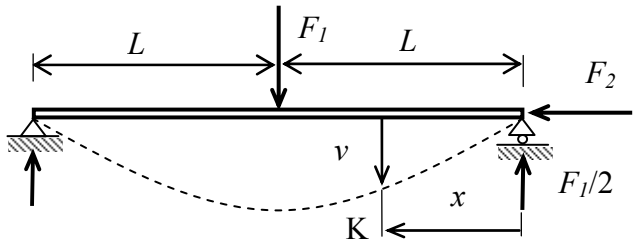
Ha a szerkezet feszültségmentes kezdeti állapotból kiindulva, lassú mozgásokat végez, akkor a végső egyensúlyi helyzetet a

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U}=\mathbf{P} \tag{4.14}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet meghatározni.

4.2.2 Másodrendű statika

A lineáris elmélet alkalmazása lényegében azt jelenti, hogy az egyensúlyi feltételeket az eredeti, terhelés előtti alakzat méretei alapján határozzuk meg. Nagyobb mértékű mozgások esetén azonban figyelembe kell venni a szerkezet geometriájának folyamatos változását is. Erre láthatunk egy egyszerű példát a 4.2. ábrán, ahol a K keresztmetszet hajlító igénybevétele az eredeti egyenes alakkal $F_1x/2$, a lehajlással is számolva $F_1x/2 + F_2v$. A két érték különbsége, a linearizálás hibája, a v lehajlás mértékétől függ.



4.2 ábra. Másodrendű hatás

A problémának közelítő, de gyakran kielégítő pontosságú megoldása a másodrendű elmélet. Először, feszültségmentes kezdeti állapotot feltételezve megoldjuk a (4.14) egyenletrendszert, meghatározzuk a (4.12) belső erőket, majd a második lépésben ezt $\boldsymbol{\sigma}^0$ kezdeti feszültségi állapotnak tekintve, kiszámítjuk a (3.7) geometriai merevségi mátrixot. A

$$\left(\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\mathrm{G}}\right)\,\mathbf{U} = \mathbf{P} \tag{4.15}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásából meghatározhatjuk a pontosított mozgásokat és a belső erőket. Az eljárást az így előálló új alakzatra, mint kezdeti állapotra megismételhetjük (harmadrendű számítás). Előfordulhat, hogy a ($\mathbf{K}$ + $\mathbf{K}_{\mathrm{G}}$) módosított merevségi mátrix szinguláris lesz és akkor a (4.15) lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása. Ez a jelenség akkor mutatkozik, ha a külső terhelés nagyobb, mint a rendszer kritikus, stabilitásvesztést okozó terhelése.

4.2.3 Kritikus terhelés

A lineáris stabilitásszámítás célja a kritikus terhelés értékének meghatározása. A kritikus terhelési szintet elérve a szerkezet egésze, vagy egyes elemei elveszíthetik további teherviselő képességüket, mozgásuk határozatlanná válik.

A jelenséget a 4.2. ábra illusztrálja. A kritikus terhelésnél a teher-mozgás függvénynek elágazási (bifurkációs pont) pontja van, ami fölött már egynél több lehetséges egyensúlyi helyzet létezhet. A kérdés tehát az, hogy egy adott terhelési szinthez egy vagy több egyensúlyi állapot tartozik. Meg kell vizsgálni, hogy egy egyensúlyi helyzetből, mint alapállapotból kiindulva a terhelések változatlan értéke mel-

lett (zérus teher növekmény) létezhet e zérustól különböző elmozdulás növekmény, pontosabban, a

$$\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_G\left(\boldsymbol{\sigma}^0\right)\right)\,\mathbf{U}=\mathbf{0} \tag{4.16}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek mikor lehet $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ megoldása. A geometriai merevségi mátrix (4.7) alakjából látható, hogy az a kezdeti feszültségek homogén, lineáris függvénye:

$$\mathbf{K}_G\left(\lambda\boldsymbol{\sigma}^0\right)=\lambda\,\mathbf{K}_G\left(\boldsymbol{\sigma}^0\right).$$

A (4.16) lineáris egyenletrendszernek csak akkor lehet $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus,

$$det\,\left[\mathbf{K}+\lambda\,\mathbf{K}_G\left(\boldsymbol{\sigma}^0\right)\right]=0\,. \tag{4.17}$$

Ez egy sajátérték feladat. A legkisebb abszolút értékű λ_1 sajátérték a kritikus terhelési paraméter, a hozzá tartozó sajátvektor pedig a stabilitásvesztési formát mutatja meg. A kritikus terhelés számítását is két lépésben kell végrehajtani. Először a (4.14) egyenlettel kiszámítjuk a **P** külső terhelésekből az egyes elemekben kialakuló belső erőket, ez lesz az alapállapot. A második lépésben, ezek ismeretében számolható a $\mathbf{K}_G$ geometriai merevség**,** majd a λ_1 sajátérték. A kritikus terhelés az eredeti külső terhelés és a λ_1 szorzata, $\mathbf{P}_{cr} = \lambda_1\mathbf{P}$.

Természetesen, bizonyos szerkezetek a kritikus terhelésnél nagyobb terheket is felvehetnek, de ennek számítására a többszörösen linearizált virtuális munka elv és az arra épülő algoritmus nem használható. Továbbá, vannak olyan stabilitási problémák is, melyeknél nincs bifurkációs pont. A stabilitási problémák alaposabb és részletesebb tanulmányozásához ajánlható *Timoshenko vagy Kollár* könyvei [3], [16].

4.2.4 Szabad lengések, sajátfrekvenciák

A terheletlen szerkezet lehetséges mozgásainak, a szabad rezgéseknek a vizsgálatához a

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U}+\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{U}}=\mathbf{0} \tag{4.18}$$

homogén, lineáris differenciálegyenlet rendszert kell megoldani. Tételezzük fel, hogy a terheletlen, lineárisan rugalmas modell csomópontjai periodikus mozgást végeznek:

$$\mathbf{U}\left(t\right)=\boldsymbol{\Phi}\,sin\left(\omega t\right),$$

ahol t jelöli az időt és $\boldsymbol{\Phi}$ a csomópontok amplitúdó mátrixa, más szóval a lengésképek. A feltételezett lengés alakot a (4.18) egyenletbe helyettesítve a

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\mathbf{\Phi}=\mathbf{0} \tag{4.19}$$

homogén lineáris egyenletet kapjuk, aminek csak akkor lehet $\mathbf{\Phi} \neq \mathbf{0}$ megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus,

$$det\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]=0\,.$$

Ez egy sajátérték feladat, aminek megoldása a rendszer szabad rezgéseinek frekvenciái (illetve azok négyzete), a sajátvektorok pedig a lengésképek. Mivel a **K** és **M** pozitív definit - feltéve, hogy az 2.1.3 fejezetben leírtak szerint a kinematikai peremfeltételek száma elegendő - és szimmetrikus mátrixok, a sajátértékek pozitív, valós számok. A lehetséges $[\omega_j, \mathbf{\Phi}_j]$ sajátfrekvencia, sajátvektor párok száma nem több mint a végeselem modell szabadságfokainak száma. A tömegmátrix diagonál szerkezete, koncentrált tömegű, „*lumped*" tömegmátrix alkalmazása, a nagyméretű sajátérték feladatok megoldását jelentősen gyorsítja.

4.2.5 Másodrendű dinamika

A statikus - időben állandó - külső terhelések módosítják a szerkezet látszólagos merevségét és ezen keresztül a szabad rezgések frekvenciáit is és a lengésképeket is. Közismert példa az egyenes húzott/nyomott rúd hajlító lengéseinek változása. A húzás növeli, a nyomás csökkenti a hajlító lengés frekvenciáit. A statikus terhelések hatását a szerkezet merevségére a geometriai merevségi mátrix fejezi ki és ezért - ha ezt a hatást is modellezni akarjuk - a (4.17) helyett a

$$det\left[\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_G\right)-\omega^2\mathbf{M}\right]=0 \tag{4.20}$$

sajátérték feladatot kell megoldani. Ha ezt összevetjük a lineáris stabilitásszámítás (4.16) alapegyenletével, látható, hogy ha a statikus terhelés eléri a kritikus értéket a $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G)$ eredő merevségi mátrix szinguláris lesz és akkor a legkisebb sajátérték $\omega = 0$.

4.2.6 Gerjesztett mozgások

Ha a szerkezetre időben változó terhelés működik, akkor a

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\,\mathbf{U}=\mathbf{P}\left(t\right) \tag{4.21}$$

lineáris differenciálegyenlet rendszert kell megoldani. A lineáris dinamikai rendszerek körében két megoldási lehetőséget érdemes megemlíteni. A modálanalízis - vagy a modális felbontás – módszere szerint a gerjesztett rendszer megoldását

$$\mathbf{U}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n} f_i\left(t\right)\mathbf{\Phi}_i$$

formában keressük, ahol $\mathbf{\Phi}_i$ a (4.19) szabad rendszer sajátvektorai. A másik, és nemlineáris rendszereknél is alkalmazható eljárás, a direkt időintegrálás módszere. Ennek lényege, hogy a t változó szerint egy véges differencia eljárást alkalmazunk. Ennek több változata (*Newmark, Wilson* θ, stb.) is ismert.

Itt érdemes megemlíteni, hogy a (4.21) mozgásegyenlet általánosabb alakja

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{P}(t),$$

ahol **D** a sebességgel arányos csilapítások mátrixa. A külső és belső csilapítások elemzése, a megoldási technikák részletesebb ismertetése meghaladja ezen jegyzet kereteit, leírásuk megtalálható többek között *Clough-Penzien* [9] vagy *Wunderlicht-Pilkey* [19] könyveiben.

5 Rúdszerkezetek végeselem modelljei

Ebben a fejezetben az úgynevezett egyméretű szerkezeti elemek modelljeit tárgyaljuk. Az egyméretű, vagy egyenes vonalelemek a csuklós végpontú és a merev végpontú rúdelemek. A csuklós végpontú egyenes elemekben csak húzó vagy nyomó igénybevételek lehetnek, ezeket használjuk a rácsos szerkezetek vizsgálatára. A merev végpontú rúdelemek nyomatéki és nyíró igénybevételek viselésére is alkalmasak. Ezeket használhatjuk síkbeli vagy térbeli keretszerkezetek modellezéséhez.

A 2.1.1 fejezetben láttuk, hogy a főtengelyek koordináta rendszerében az egyenes tengelyű rúdelemnél a tengelyirányú és a tengelyre merőleges mozgások egymástól függetlenül vizsgálhatóak. Ennek megfelelően, a virtuális munka elve is felbontható a csak az axiális mozgást tartalmazó (2.14) és a csak a tengelyre merőleges (2.15) mozgást tartalmazó részekre.

5.1 Csuklós végpontú rúdelem

A mindkét végén csuklós, egyenes rúd (rácsrúd, vagy angolul *truss element*) a legegyszerűbb szerkezeti elem. Igénybevétele tiszta húzás/nyomás, ezért rúd megnyúlása közben a végpontok, a végeselem modell csomópontjai, csak x tengely irányban mozoghatnak. Egy egyenes szerkezeti elem a tengelyirányú elmozdulásának meghatározásához a (2.14) virtuális munka elvet alkalmazzuk:

$$\delta\Pi(u) = \int_L EAu'\delta u'\,dx + \int_L \rho A\ddot{u}\,\delta u\,dx - \left(\delta W_k + \int_L EA\alpha\Delta T_0\delta u'\,dx\right) = 0\,. \quad (5.1)$$

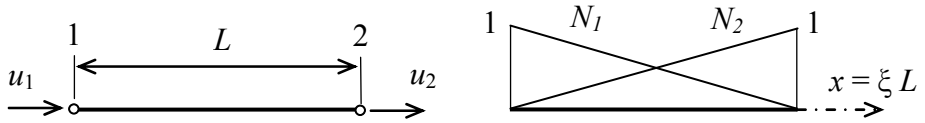
Ebben a virtuális munka elvben az u elmozdulás függvény x koordináta szerinti első deriváltja szerepel, ami meghatározza az u(x) közelítéséhez használható polinomok legalacsonyabb fokszámát. A legegyszerűbb közelítő függvény most az elsőfokú polinom. Belátható, hogy szakaszonként állandó közelítés esetén az alakváltozási energia zérus lesz.

A két végponti elmozdulásból az elem belső pontjaiban a tengelyirányú mozgást az következő lineáris interpolációval határozhatjuk meg:

$$u(x) = u_1N_1 + u_2N_3 = \underset{(1\times2)}{\mathbf{N}^T}\,\underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^e}\,, \quad N_1 = 1-\xi\,,\ N_2 = \xi\,, \quad \xi = x/L\,,$$
$$\underset{(2\times1)}{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^e} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

ahol $N_1(\xi)$, $N_2(\xi)$ a lineáris formafüggvények és $\mathbf{U}^e$ az elem szabadságfokainak (3.3) mátrixa. Most a csomópontok szabadságfoka $n = 1$, az elem összes szabadságfokainak száma pedig $N = 2$.

 © Forberger Árpád , Vörös Gábor, BME



5.1. ábra. A két szabadságfokú, csuklós rúdelem és a lineáris formafüggvények

5.1.1 Elem mátrixok

Merevségi mátrix: A tengelyirányú fajlagos nyúlás és a virtuális nyúlás a (2.3) geometriai egyenletből:

$$\varepsilon_x = u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi}\mathbf{U}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{L}\underset{(1\times 2)}{\mathbf{N}'^T}\underset{(2\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} ,$$

$$\delta\varepsilon_x = \delta u' = \frac{1}{L}\underset{(1\times 2)}{\mathbf{N}'^T}\underset{(2\times 1)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \frac{1}{L}\underset{(1\times 2)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}T}}\underset{(2\times 1)}{\mathbf{N}'} .$$

Itt a vessző a saját argumentum (vagy x, vagy ξ) szerinti deriváltat jelöli. Az (5.2) formafüggvények $\mathbf{N}'^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ deriváltjainak helyettesítésével az alakváltozási energia növekmény és az elem merevségi mátrixa

$$\delta U = \int_L EAu'\delta u' dx = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{k}^e\mathbf{U}^e , \qquad \underset{(2\times 2)}{\mathbf{k}^e} = \frac{EA}{L}\int_0^1 \underset{(2\times 1)}{\mathbf{N}'}\underset{(1\times 2)}{\mathbf{N}'^T} d\xi ,$$
$$\mathbf{k}^e = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{5.3}$$

Ez a csuklós végű rúdelem (4.6) merevségi mátrixa a rúdhoz kötött, lokális koordináta rendszerben.

Tömegmátrix: Dinamikai feladatokban a csomóponti mozgások az idő függvényében változnak. A longitudinális mozgás és a gyorsulás:

$$u(x,t) = \mathbf{N}^T\mathbf{U}^{\mathrm{e}}(t) , \quad \ddot{u} = \mathbf{N}^T\ddot{\mathbf{U}}^{\mathrm{e}} , \quad \delta u = \delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}T}\mathbf{N} .$$

Az (5.1) virtuális munka elvben a tehetetlenségi erő munkája

$$\delta T = \int_L \rho A\ddot{u}\,\delta u\, dx = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{m}^e\ddot{\mathbf{U}}^e , \quad \underset{(2\times 2)}{\mathbf{m}^e} = \rho A\int_0^1 \underset{(2\times 1)}{\mathbf{N}}\underset{(1\times 2)}{\mathbf{N}^T} L d\xi ,$$

ahol $\mathbf{m}^{\mathrm{e}}$ az elem (4.8) *konzisztens* tömegmátrixa, ami a (5.2) formafüggvények helyettesítése és integrálás után a következő alakú lesz:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \tag{5.4}$$

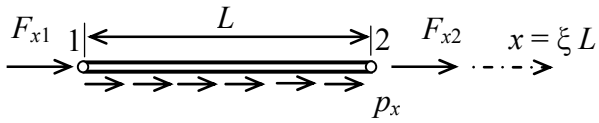
A konzisztens tömegmátrix helyett gyakran használják a diagonál szerkezetű tömegmátrixot. Ha a rúdelemet a két végpontjába koncentrált tömegponttal helyettesítjük, akkor a tömegmátrix:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehermátrix: Számítsuk ki az (5.1) elv utolsó két tagjából az elem tehermátrixát, ha arra 5.2 ábrán látható F_{x1} és F_{x2} csomóponti erők és és p_x állandó megoszló terhelés működik, továbbá a ΔT_0 hőmérsékletváltozása állandó:

$$\delta W_k + \int_L EA\alpha\Delta T_0 \delta u' dx = F_{x1}\delta u_1 + F_{x2}\delta u_2 + + \int_L p_x \delta u dx + \int_L EA\alpha\Delta T_0 \delta u' dx =$$

$$= F_{x1}\ \delta u_1 + F_{x2}\ \delta u_2 + \delta \mathbf{U}^{eT} p_x L \int_0^1 \mathbf{N} d\xi + \delta \mathbf{U}^{eT} EA\alpha\Delta T_0 \int_0^1 \mathbf{N}' d\xi = \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{p}^e .$$



5.2 ábra. Húzott rúdelem terhelései

Az elem $\mathbf{p}^e$ tehermátrixa a (5.2) formafüggvények helyettesítése és az integrálások elvégzése után:

$$\underset{(2\times1)}{\mathbf{p}^e} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} + \frac{p_x L}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + AE\alpha\Delta T_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a csomóponti erők statikailag egyenértékűek a terhelésekkel.

A csuklós végpontú elemben csak húzó/nyomó feszültség lehet. Az elem fajlagos nyúlásából az egyszerű *Hooke* törvénnyel a normál feszültség

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Eu' = E\frac{1}{L}\underset{(1\times2)}{\mathbf{N}'^T}\underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^e} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^e} = \frac{E}{L}(u_2 - u_1). \tag{5.6}$$

5.1.2 Síkbeli rácsos szerkezet

Több elemből álló, síkbeli szerkezetben egy, a 5.3 ábrán látható rúdelemet a végpontoknak az *X, Y* globális – szerkezeti – koordinátáival adhatunk meg. Az elem hossza és az irányát megadó szögfüggvények:

$$L=\sqrt{\left(X_2-X_1\right)^2+\left(Y_2-Y_1\right)^2}\ ,$$
$$s=sin\,\beta=\frac{X_2-X_1}{L}\ ,\ c=cos\,\beta=\frac{Y_2-Y_1}{L}\ . \tag{5.7}$$

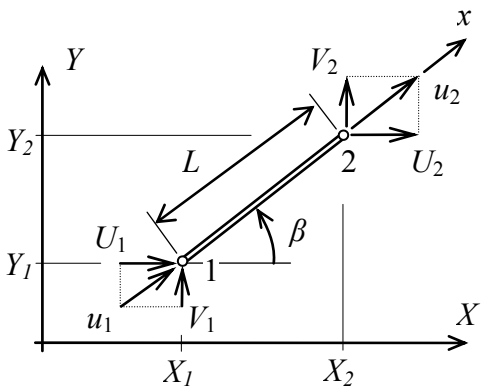
A csuklós végpontok lokális x irányú u mozgása és a globális X, Y irányú U, V mozgásainak kapcsolata a 3.3 ábrán is követhető módon:

$$\underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^e}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_1c+V_1s\\U_2c+V_2s\end{bmatrix}=\underset{(2\times4)}{\mathbf{T}}\underset{(4\times1)}{\mathbf{D}^e}\ ,\qquad \mathbf{U}^{eT}=\mathbf{D}^{eT}\mathbf{T}^T\ . \tag{5.8}$$

A $\mathbf{D}^e$ az elem globális szabadságfokainak mátrixa és $\mathbf{T}$ jelöli a lokális és globális rendszerek közötti transzformáció mátrixát:

$$\mathbf{D}^e=\left[U_1\ \ V_1\ \ U_2\ \ V_2\right]^T\ ,\qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}c & s & 0 & 0\\0 & 0 & c & s\end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

A síkbeli csuklós végű rúdelem látszólag négy szabadságfokú, de ez a négy szabadságfok, amint az az (5.8) transzformációból is látható, lényegében csak két független paramétert - u_1 és u_2 - tartalmaz.



5.3 ábra. Síkbeli csuklós végű rúdelem

Ezek után az (5.3) alakváltozási energia növekmény a globális paraméterekkel kifejezve:

$$\delta U=\delta\mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}^e\,\mathbf{U}^e=\delta\,\underset{(1\times4)}{\mathbf{D}^{e\,T}}\left(\underset{(4\times2)}{\mathbf{T}^T}\underset{(2\times2)}{\mathbf{k}^e}\underset{(2\times4)}{\mathbf{T}}\right)\underset{(4\times1)}{\mathbf{D}^e}=\delta\,\underset{(1\times4)}{\mathbf{D}^{e\,T}}\underset{(4\times4)}{\mathbf{K}^e}\underset{(4\times1)}{\mathbf{D}^e}\ ,$$

ahol $\mathbf{K}^e$ a csuklós végű rúdelem globális (síkbeli) merevségi mátrixa. Az (5.3) lokális merevség és az (5.9) transzformációs mártrix felhasználásával:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Hasonló módon számolható az elem globális tömegmátrixa

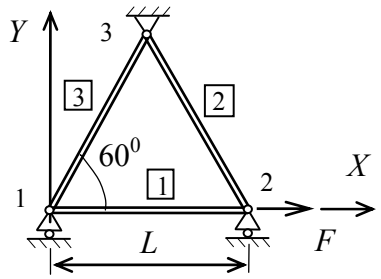
$$\mathbf{M}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{m}^e \mathbf{T}, \tag{5.11}$$

és a tehervektor transzformáltja:

$$\delta W_k = \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{p}^e = \delta \underset{(1\times4)}{\mathbf{D}^{eT}} \underset{(4\times2)}{\mathbf{T}^T} \underset{(2\times1)}{\mathbf{p}^e} = \delta \mathbf{D}^{eT} \mathbf{P}^e \ , \quad \underset{(4\times1)}{\mathbf{P}^e} = \underset{(4\times2)}{\mathbf{T}^T} \underset{(2\times1)}{\mathbf{p}^e} \ . \tag{5.12}$$

5.1.3 Példa: Síkbeli rácsos szerkezet

Határozzuk meg az 5.4 ábrán látható, három rúdból álló, síkbeli rácsos tartó csomópontjainak elmozdulásait, a rudakban keletkező feszültségeket és a reakcióerőket! Az AE merevség és az L hossz minden rúdra azonos.



5.4 ábra. Síkbeli rácsos szerkezet

A véges elem modellt a csomópontok koordinátái és a csomópontok kapcsolódását megadó, a lokális (elemenként *lok.*1 és *lok.*2) és a globális számozást összerendelő táblázatok határozzák meg:

pont	*X*	*Y*
1	0	0
2	*L*	0
3	*L/2*	*L*√3/2

elem	*lok.*1	*lok.*2
1	1	2
2	2	3
3	1	3

A modell szabadságfoka 6, csomópontonként kettő elmozdulás.

Az (5.10) globális merevségi mátrixok elemenként a következők:

1. elem: $\beta = 0^0$, $c = 1$, $s = 0$,

$$\mathbf{K}^1 = \frac{AE}{4L}\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}^1_{1,1} & \mathbf{k}^1_{1,2} \\ \hline \mathbf{k}^1_{2,1} & \mathbf{k}^1_{2,2} \end{array}\right],$$

2. elem: $\beta = 120^0$, $c = -1/2$, $s = \sqrt{3}/2$,

$$\mathbf{K}^2 = \frac{AE}{4L}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ \hline -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}^2_{1,1} & \mathbf{k}^2_{1,2} \\ \hline \mathbf{k}^2_{2,1} & \mathbf{k}^2_{2,2} \end{array}\right],$$

3. elem: $\beta = 60^0$, $c = 1/2$, $s = \sqrt{3}/2$,

$$\mathbf{K}^3 = \frac{AE}{4L}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ \hline -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}^3_{1,1} & \mathbf{k}^3_{1,2} \\ \hline \mathbf{k}^3_{2,1} & \mathbf{k}^3_{2,2} \end{array}\right].$$

A 6x6 méretű **K** rendszer mátrixban adjuk össze az elem merevségeket. A $\mathbf{K}^e$ elem mátrixokban lévő 2x2 csomóponti almátrixok helyét a rendszer mátrixban a pontok globális sorszáma határozza meg, amit a lokális és a globális csomópont számozást összerendelő táblázat mutat. Az összegzési folyamata (*kompilálás*) elemenként az alábbiak szerint követhető:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^1_{1,1} & \mathbf{k}^1_{1,2} & 0 \\ \mathbf{k}^1_{2,1} & \mathbf{k}^1_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}^2_{1,1} & \mathbf{k}^2_{1,2} \\ 0 & \mathbf{k}^2_{2,1} & \mathbf{k}^2_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}^3_{1,1} & 0 & \mathbf{k}^3_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{k}^3_{1,2} & 0 & \mathbf{k}^3_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Tehát az 1. elem almátrixai a globális mátrix 1-2, a 2. elemé a 2-3 és a 3. elemé az 1-3 sor oszlop pozicióiba kerülnek.

Hasonló módon kell összegezni az elem tehermátrixokat is. Az összegzés eredménye a rendszer merevségi és teher mátrixa:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{4L}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ \hline -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} & -3 \\ \hline -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{array}\right], \quad \mathbf{P} = F\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A kinematikai peremfeltételekkel megkötött szabadságfokok $V_1 = V_2 = U_3 = V_3 = 0$, ezért a rendszer mátrixok 2., 4., 5., és 6. sorait, oszlopait törölni kell. A még ismeretlen csomóponti mozgásokra vonatkozó (4.13) lineáris egyenletrendszer

$$\frac{AE}{4L}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix},$$

aminek megoldása, kiegészítve az előírt mozgásokkal:

$$\underset{(6x1)}{\mathbf{U}} = \frac{FL}{9AE}\left[16 \quad 0 \;\vdots\; 20 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad 0\right]^T.$$

Az **U** mátrixból kiemelhetjük az egyes elemekhez tartozó (5.9) $\mathbf{D}^e$ globális mozgásokat. Az (5.6) normál feszültségek számításához a $\mathbf{D}^e$ mozgásokat az (5.8) transzformációval vissza kell forgatni a rúdhoz kötött lokális rendszerbe:

$$\underset{(2x1)}{\mathbf{U}^e} = \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{array}\right]\underset{(4\times1)}{\mathbf{D}^e}, \qquad \sigma_{xe} = E\varepsilon_{xe} = \frac{E}{L}\left[-1 \quad 1\right]\underset{(2x1)}{\mathbf{U}^e}.$$

Például az első elemre $c = 1$, $s = 0$:

$$\mathbf{U}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{FL}{9AE} = \frac{FL}{9AE}\begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix}, \; \sigma_{x1} = \frac{F}{9A}\left[-1 \quad 1\right]\begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{4F}{9A}.$$

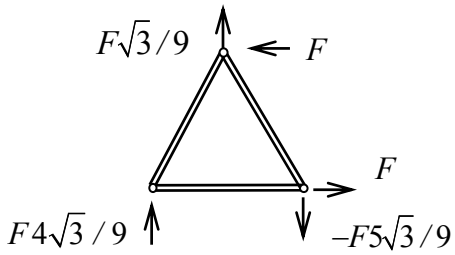
Hasonló módon a második és harmadik elemben a normál feszültség:

$$\sigma_{x2} = \frac{10}{9}\frac{F}{A}, \quad \sigma_{x3} = -\frac{8}{9}\frac{F}{A}.$$

Az egész szerkezetre ható külső erőrendszer a (5.13) egyenlet szerint az eredeti rendszer merevségének és a kinematikai peremfeltételekkel kiegészített teljes elmozdulás szorzata:

$$\mathbf{P} = \mathbf{KU} = \frac{F}{36}\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F}{9}\begin{bmatrix} 0 \\ 4\sqrt{3} \\ 9 \\ 5\sqrt{3} \\ -9 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



5.5 ábra. A teljes külső erőrendszer

Ezek a külső erők – terhelés és támaszerők együtt – láthatóak az 5.5 ábrán. Ellenőrizhetjük, hogy ez valóban egy egyensúlyi erőrendszer.

5.2 Hajlított rúdelem

Az egyenes tengelyű hajlított rúdelelm tengelyén lévő pontok csak a tengelyre merőleges irányba mozognak. Ennek megfelelően a terhelések iránya is a tengelyre merőlegesek. Mivel a keresztmetszet két főtengelyének irányába eső mozgásokra formailag hasonló egyenletek vonatkoznak, így elegendő egy komponenes, az y irányú $v(x,t)$ részletes vizsgálata. A végeselelm modell felépítésének kiinduló egyenlete a (2.15) virtuális munka elvének a tengelyirányú erők (2.24) munkájával kiegészített alakja:

$$\begin{aligned}\delta\Pi(v) &= \int_L EI_z v''\delta v''\,dx + \int_L \rho A\ddot{v}\delta v\,dx + \int_L Nv'\delta v'\,dx - \\ &- \left(\delta W_k - \int_L EI_z \alpha\Delta T_{Gy}\delta v''\,dx\right) = 0\,.\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.2.1 Elmozdulás interpoláció

A *Euler-Bernoulli* féle rúdelmélet (2.2) egyenleteiből is látható, hogy a hajlított rúdelem (gerenda, vagy angolul *beam elelement*) egy keresztmetszetében lévő anyagi pontok mozgását két paraméter határozza meg, a rúd tengelyének v lehajlása és a $\theta_z = v'$ forgás. A 5.6 ábrán a rúdelem végpontjainak – a csomópontoknak – a szabadságfoka $n = 2$, az egész elemé pedig $N = 4$. Az elemhez tartozó összes elmozdulás jellemző - szabadságfokok – mátrixa:

$$\underset{(4\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_{z1} & v_2 & \theta_{z2} \end{bmatrix}^T\,. \tag{5.14}$$

Az (5.13) elvben a v elmozdulás függvény x koordináta szerinti második deriváltja szerepel, amiből következik, hogy a legegyszerűbb közelítő polinom most legalább másodfokú. Belátható, hogy a szakaszonként lineáris közelítés esetén a hajlított elem alakváltozási energiája zérus. Egy másodfokú polinom azonban csak három

szabadon választható paramétert tartalmaz, miközben az elem szabadságfokainak száma négy, ezért a minimális polinom fokszám három lesz.

A rúdelem egy belső pontjában a $v(x)$ elmozdulást a csomóponti szabadságfokokból a következő alakú interpolációval határozhatjuk meg:

$$v(x) = v_1 N_1 + \theta_{z1} N_2 + v_2 N_3 + \theta_{z2} N_4 = \underset{(1\times4)}{\mathbf{N}^T} \underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^e} \quad , \tag{5.15}$$

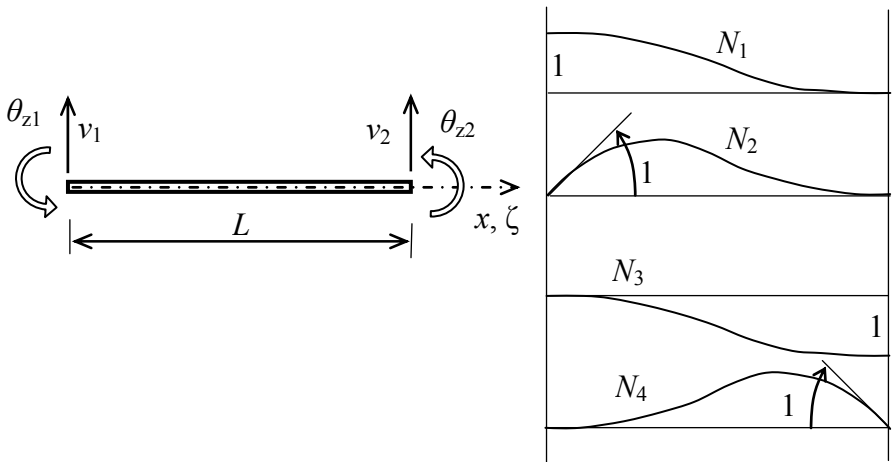
ahol az interpolációs, vagy forma függvények a harmadfokú *Hermite* polinomok:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \ , \quad & N_2 &= L\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) \ , \\ N_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \ , \quad & N_4 &= L\left(-\xi^2 + \xi^3\right) \ , \qquad \xi = x / L \ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Figyeljük meg, hogy ezek a forma függvények a (5.8) negyedrendű hajlítási alapegyenlet megoldásai, ha $p_y = 0$. Ez azt jelenti, hogy az 5.6. ábra szerinti elem alkalmazásákor a rudszerkezet azon a részein, ahol nincs a tengelyre merőleges megoszló terhelés, a lehajlásokra - az elemmérettől függetlenül - a pontos megoldást kapjuk.

A (5.16) interpolációs függvények teljesítik a 4.1.1 fejezetben a formafüggvényekre megfogalmazott feltételeket. Rövid számolással igazolható, hogy az (5.15) interpoláció a végpontokban valóban a végponti értékeket adja vissza, azaz $v(0) = v_1$, $v'(0) = \theta_{z1}$, $v(\mathrm{L}) = v_2$, $v'(L) = \theta_{z2}$. Továbbá, ha a csomópontokban egy merevtestszerű mozgásának megfelelő értékeket adunk meg, akkor a belső pontok is követik ezt a mozgást. Például, az 1 csomópont körüli α forgás esetén: $v_1 = 0,\ \theta_{z1} = \alpha,\ v_2 = \alpha L,\ \theta_{z2} = \alpha,$ és az interpolációból:

$$v(x) = \alpha N_2 + \alpha L N_3 + \alpha N_4 = \alpha L \xi = \alpha x \, .$$



5.6 ábra. A négy szabadságfokú rúdelem (gerenda) és a harmadfokú formafüggvények

5.2.2 Elem mátrixok

Az (5.15) interpoláció ismeretében kiszámíthatjuk egy elemre a (5.13) virtuális munka elvben szereplő tagokat.

Merevségi mátrix: A

$$v'' = \frac{1}{L^2}\frac{d^2\mathbf{N}^T}{d\xi^2}\mathbf{U}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{L^2}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T}\underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}}\ , \qquad \delta v'' = \frac{1}{L^2}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T}\underset{(4\times1)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \frac{1}{L^2}\underset{(1\times4)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}T}}\underset{(4\times1)}{\mathbf{N}''}\ ,$$

helyettesítésével az alakváltozási energia növekmény és az elem merevségi mátrixa:

$$\delta U = \int_L EI_z v''\delta v'' dx = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}^e\,\mathbf{U}^e, \qquad \underset{(4\times4)}{\mathbf{k}^e} = \frac{EI_z}{L^3}\int_0^1 \underset{(4\times1)}{\mathbf{N}''}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T}\,d\xi\ ,$$

ahol az **N''** mátrix elemei az (5.16) formafüggvények ξ változó szerinti második deriváltjai:

$$\mathbf{N}''^T = \left[6\left(-1+2\xi\right)\ L\left(-4+6\xi\right)\ 6\left(1-2\xi\right)\ L\left(-2+6\xi\right)\right].$$

Szorzás és integrálás után felírhatjuk az állandó keresztmetszetű elem $\mathbf{k}^e$ szimmetrikus merevségi mátrixát. Például, a mátrix 1. sor 2. eleme a következő módon számolható:

$$\left(1,2\right) = \frac{EI_z}{L^3}\int_0^1 N_1''N_2''\ d\xi = \frac{EI_z}{L^2}6\int_0^1\left(-1+2\xi\right)\left(-4+6\xi\right)d\xi = \frac{EI_z}{L^2}6\,.$$

A többi elem kiintegrálása után az elem (5.6) merevségi mátrixa:

$$\mathbf{k}^e = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Itt érdemes megjegyezni, hogy az (5.16) interpolációs függvények teljesítik a 5.1.1 fejezetben a formafüggvényekre megfogalmazott feltételeket. Rövid számolással igazolható, hogy az (5.15) interpoláció a végpontokban valóban a végponti értékeket adja vissza, azaz $v(0) = v_1$, $v'(0) = \theta_{z1}$, $v(\mathrm{L}) = v_2$, $v'(L) = \theta_{z2}$. Ha a csomópontokban egy merevtestszerű mozgásának megfelelő értékeket adunk meg, akkor a belső pontok is követik ezt a mozgást. Például, az 1 csomópont körüli kicsi α forgás esetén: $v_1 = 0$, $\theta_{z1} = \alpha$, $v_2 = \alpha L$, $\theta_{z2} = \alpha$, és az interpolációból:

$$v\left(x\right) = \alpha N_2 + \alpha L N_3 + \alpha N_4 = \alpha L\xi = \alpha x\,.$$

Továbbá, ellenőrizhető, hogy a csomópontok merevtestszerű mozgása közben a rúd alakváltozása zérus. Az előző, egy merev forgást leíró csomóponti adatokkal a (2.3) szerinti fajlagos nyúlás valóban zérus lesz:

$$\varepsilon_x = -yv'' = \frac{1}{L^2}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T}\underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} =$$

$$= \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix}6(-1+2\xi) & L(-4+6\xi) & 6(1-2\xi) & L(-2+6\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha L\\ \alpha\end{bmatrix} = 0\,.$$

<u>Geometriai merevségi mátrix</u>: Az (5.13) virtuális munka elvben az állandó rúdirányú erő munkája a

$$v' = \frac{1}{L}\frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi}\mathbf{U}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{L}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}'^T}\underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}}\,, \qquad \delta v' = \frac{1}{L}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T}\underset{(4\times1)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \frac{1}{L}\underset{(1\times4)}{\delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}T}}\underset{(4\times1)}{\mathbf{N}''}\,,$$

helyettesítésével

$$\delta U_G = \int_L N\, v'\delta v' dx = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}_G^e\,\mathbf{U}^e\,, \quad \underset{(4\times4)}{\mathbf{k}_G^e} = \frac{N}{L}\int_0^1 \underset{(4\times1)}{\mathbf{N}'}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}'^T}\,d\xi$$

alakban írható fel. A (5.16) interpoláció helyettesítése és a kijelölt integrálás elvégzése után az állandó N húzó/nyomó igénybevétellel terhelt elem (5.7) geometriai merevségi mátrixa:

$$\mathbf{k}_G^e = \frac{N}{30L}\begin{bmatrix}36 & 3L & -36 & 3L\\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2\\ -36 & -3L & 36 & -3L\\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2\end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

<u>Tömegmátrix:</u> Dinamikai feladatokban a csomóponti mozgások az idő függvényében változnak. A rúd lehajlása és gyorsulása:

$$v(x,t) = \mathbf{N}^T\mathbf{U}^{\mathrm{e}}(t)\,, \quad \ddot{v} = \mathbf{N}^T\ddot{\mathbf{U}}^{\mathrm{e}}\,, \quad \delta v = \delta\mathbf{U}^{\mathrm{e}T}\mathbf{N}\,.$$

A (4.13) virtuális munka elvben a tehetetlenségi erő munkája

$$\delta T = \int_L \rho A\ddot{v}\,\delta v\, dx = \mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{m}^e\,\ddot{\mathbf{U}}^e\,, \quad \underset{(4\times4)}{\mathbf{m}^e} = \rho A\int_0^1 \underset{(4\times1)}{\mathbf{N}}\underset{(1\times4)}{\mathbf{N}^T}\,L d\xi\,,$$

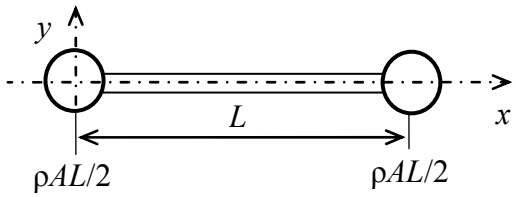
és az elem (5.8) *konzisztens* tömegmátrixa a (5.16) formafüggvények helyettesítése és integrálás után a következő alakú lesz:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Gyakran a konzisztens mátrix helyett célszerűbb a diagonál szerkezetű tömegmátrix alkalmazása. Ha a rúdelem megoszló tömegét az 4.7 ábrán látható módon a csomópontokba koncentráljuk, akkor a tömegmátrix:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Itt jól megfigyelhető a konzisztens mátrix egyik hiányossága, hiányzanakk a z tengely körüli forgásokhoz tartozó tömeg adatok, a megfelelő másodrendű tehetetlenségi nyomatékok.



5.7 ábra. Rúdelem megoszló tömegének szétosztása

Tehermátrix: Számítsuk ki a hajlított rúdelem tehervektorát, ha az 5.8. ábrán látható F_{y1}, F_{y2} csomóponti koncentrált erők és az állandó intenzitású p_y megoszló terhelés mellett a rúd hőmérséklet változása $\Delta T = \Delta T_{Gy} y$. A ΔT_{Gy} hőmérséklet változás gradiense a hossz mentén legyen állandó. Az (5.13) virtuális munka elvben az utolsó két tagból

$$\begin{aligned} &\delta W_k - \int_L EI_z \alpha \Delta T_{Gy} \delta v''\, dx = \\ &= F_{y1}\delta v_1 + F_{y2}\delta v_2 + \int_L p_y \delta v\, dx - \int_L EI_z \alpha \Delta T_{Gy} \delta v''\, dx = \\ &= F\ \delta v_1 + F_{y2}\delta v_2 + \delta \mathbf{U}^{eT}\left(\int_0^1 p_y \mathbf{N} L d\xi - \int_0^1 EI_z \alpha \Delta T_{Gy} \frac{1}{L}\mathbf{N}'' d\xi\right) = \delta \mathbf{U}^{eT}\mathbf{p}^e. \end{aligned}$$

Az elem (5.8) teher mátrixa az (5.16) formafüggvények helyettesítése és az integrálás elvégzése után:

$$\underset{(4\times1)}{\mathbf{p}^e} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ F_{y2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{p_y L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ L/6 \\ 1 \\ -L/6 \end{bmatrix} - EI_z \alpha \Delta T_{Gy} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

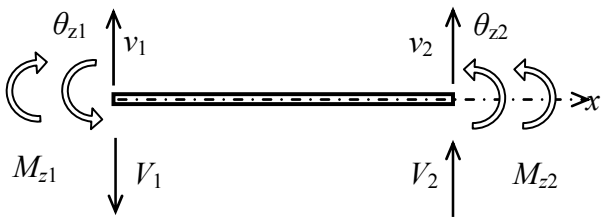
5.8 Hajlított rúdelem terhelései

5.2.3 A rúdelem igénybevételei

Az elemmátrixok kiszámítása, a (5.10) rendszer mátrixok összeállítása és a (5.11) mozgásegyenlet megoldása után ismerjük a csomóponti szabadságfokok értékét. Az eredmények kiértékelésének fontos része a (5.12) szerinti belső erők, rudaknál az igénybevételi függvények meghatározása. A hajlító igénybevételt a (2.6) a nyíró igénybevételeket a (2.7) egyensúlyi egyenletből számolhatjuk:

$$\begin{aligned} M_z &= EI_z v'' = \frac{EI_z}{L^2} \underset{(1\times4)}{\mathbf{N}''^T} \underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^e} + EI_z \alpha \Delta T_{Gy}\,, \\ V_y &= -M_z' = -\frac{EI_z}{L^2} \underset{(1\times4)}{\mathbf{N}'''^T} \underset{(4\times1)}{\mathbf{U}^e}\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Mivel az (5.15) forma függvények harmadfokú polinomok, ezekből az egyenletekből a hajlító igénybevétel elemenként lineáris, a nyíró igénybevétel pedig elemenként állandó, ami a megoszló erőkkel terhelt szakaszokon nyilván csak közelítés.



5.9 ábra. A rúdelem csomóponti igénybevételei

A csomóponti igénybevételeket kiszámíthatjuk közvetlenül az egyensúly feltételéből is. Ha az egész szerkezet egyensúlyban van, akkor annak bármilyen módon kiválasztott része, alszerkezete is egyensúlyban van, tehát arra is teljesül a virtuális munka elve. Alkalmazzuk ezt a megállapítást a 5.9 ábrán látható, egyetlen rúdelemre, ahol a csomóponti igénybevételek az elemre nézve külső koncentrált terhelések:

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

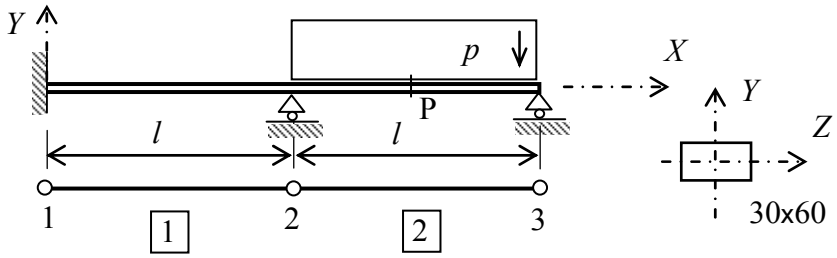
$$\mathbf{k}^e\mathbf{U}^e - \mathbf{p}^e - \begin{bmatrix} -V_{y1} \\ -M_{z1} \\ V_{y2} \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{bmatrix} -V_{y1} \\ -M_{z1} \\ V_{y2} \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{k}^e\mathbf{U}^e - \mathbf{p}^e\,, \tag{5.23}$$

ahol $\mathbf{p}^e$ az elemre ható egyéb külső terhelésekből számított (5.21) tehervektor. Az (5.22) egyenlet a terhelés jellegétől függetlenül a csomóponti igénybevételek pontos értékét adja, amiből kiindulva, az elemre ható p_y megoszló erőrendszer és ΔT_{Gy} hőmérséklet változás gradiens ismeretében meg lehet határozni a pontos igénybevételi függvényeket. Ezért célszerűbb az igénybevételi függvények meghatározásához az (5.21) egyenletek helyett az (5.22) egyenleteket használni.

5.2.4 Példa: Statikus terhelés

Az 5.10 ábrán látható, 30x60 mm tömör téglalap keresztmetszetű, statikailag kétszeresen határozatlan megtámasztású, egyenes rudat két elemre osztottuk. Határozzuk meg a csomópontok elfordulását, a második elem P középpontjában a lehajlást, a csomóponti igénybevételeket és a támaszerő rendszert.

$$l = 1\text{ m}, \quad I_z = 1{,}35\cdot 10^5\text{ mm}^4, \quad E = 2\cdot 10^5\text{ MPa}, \quad p = 1\text{ N/m}\,.$$



5.10 ábra. Statikus terhelés

A számításokat *méter* és *Newton* mértékegységekkel végezzük. A két rúdelemből álló modell összes szabadságfoka 6, csomópontonként egy elmozdulás és egy forgás:

$$\mathbf{U}^T = \left[v_1 \quad \theta_{z1} \;\vdots\; v_2 \quad \theta_{z2} \;\vdots\; v_3 \quad \theta_{z3} \right]$$

Az (5.17) merevségi mátrix mindkét elemre azonos:

$$\mathbf{k}^1 = \mathbf{k}^2 = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = 2{,}7\cdot 10^4 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Az elemek (5.21) tehermátrixai:

$$\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^2 = \frac{p_y l}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ l/6 \\ 1 \\ -l/6 \end{bmatrix} = -\frac{500}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

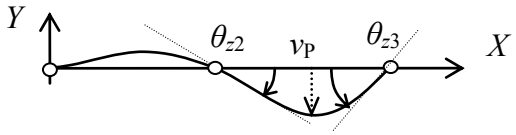
Az elem adatok összegzésével a **K** és **P** rendszer mátrixok:

$$\mathbf{K} = \frac{EI_z}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ \hdashline -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hdashline 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{P} = \frac{pl}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{l}{6} & 1 & -\frac{l}{6} \end{bmatrix}^T$$

A kinematikai peremfeltételek: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $\theta_{z1} = 0$, ezért a rendszer mátrixok 1., 2., 3. és 5. sorait, oszlopait törölni kell. Az ismeretlen csomóponti mozgásokra, forgásokra vonatkozó (5.14) lineáris egyenletrendszer és a megoldása:

$$2{,}7\cdot 10^4\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix} = -\frac{500}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \theta_{z2} = -0{,}6614\cdot 10^{-3}\ rad \\ \theta_{z3} = +1{,}1023\cdot 10^{-3}\ rad \end{array}$$



5.11 ábra. Tartó deformált alakja

A teljes megoldás, kiegészítve az előírt mozgásokkal:

$$\underset{(6x1)}{\mathbf{U}} = 10^{-3}\left[0 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad -0{,}6614 \;\vdots\; 0 \quad 1{,}1023\right]^T.$$

A második elem P középpontjának elmozdulását az (5.15) interpolációból számíthatjuk ki. A P pontban $\xi_P = 0{,}5$ és a 2. elem lokális 1 és 2 végpontjai a rendszer 2 és 3 jelű csomópontjai:

$$v_P = \theta_{z1}N_2(\xi_P) + \theta_{z2}N_4(\xi_P) = (-0{,}661 - 1{,}102)\cdot 10^{-3}/8 = -0{,}221\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

A pontos érték v_P = -0,318 mm, a hiba 30 % körüli. Ugyanakkor a csomóponti forgásokra kiszámított értékek pontosak.

A csomóponti igénybevételeket elemenként, az (5.22) egyenletekből számoljuk:

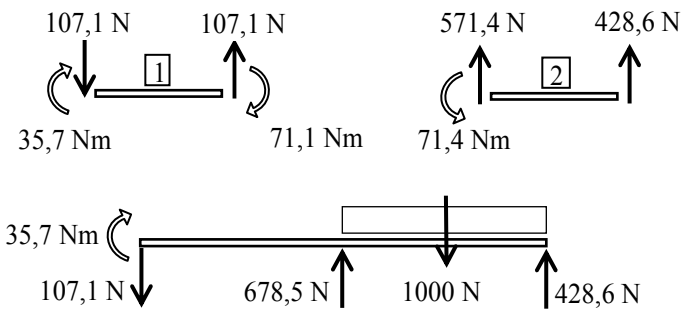
$$\begin{bmatrix} -V_{y1} \\ -M_{z1} \\ V_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \mathbf{k}^1\mathbf{U}^1 - \mathbf{p}^1$$

$$= 27 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,6614 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -107,1 \\ -35,7 \\ 107,1 \\ -71,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -V_{y2} \\ -M_{z2} \\ V_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = \mathbf{k}^2\mathbf{U}^2 - \mathbf{p}^2$$

$$= 27 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,6614 \\ 0 \\ 1,1023 \end{bmatrix} + \frac{500}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 571,4 \\ 71,4 \\ 428,6 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Az 5.12 ábra mutatja az elem végpontok igénybevételeit és az ezekből számított csomóponti terheket és támaszerőket. Itt ellenőrizhető, hogy az statikai egyensúlyi egyenletek az elemekre is és az egész rendszerre is pontosan teljesülnek.

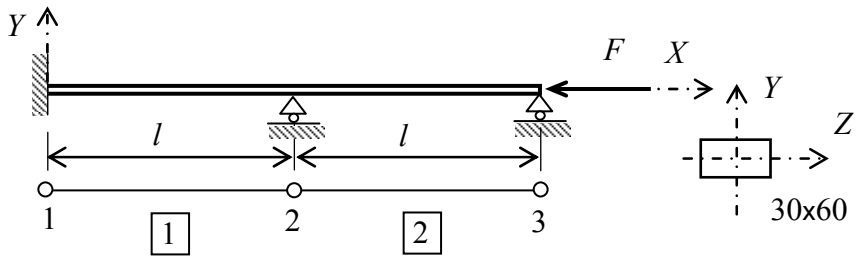


5.12 ábra. Elemek végponti terhelése és a támaszerők

5.2.5 Példa: Kritikus terhelés

Számítsuk ki az 5.13 ábrán látható, statikailag kétszeresen határozatlan megtámasztású, egyenes rúd (*Euler* féle) kritikus nyomó terhelését.

$$l = 1\ \text{m},\quad A = 1800\ \text{mm}^2\ ,\quad I_z = 1{,}35\cdot 10^5\ \text{mm}^4,\quad E = 2\cdot 10^5\ \text{MPa}\ .$$



4.13 ábra. Nyomott rúd kritikus terhelése

Az 5.13 ábra szerinti tartó mérete, anyaga, és az elemfelosztás ugyanaz, mint az előző feladatban, ezért a rendszer 6x6 méretű **K** merevségi mátrixa is ugyanaz lesz.

Mindkét elemben a húzó igénybevétel $N = -F$, ezért az (5.18) geometriai merevségi mátrixok is azonosak:

$$\mathbf{k}_G^1 = \mathbf{k}_G^2 = -\frac{F}{30l}\begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}\ .$$

A már ismert eljárással összegzett 6x6 méretű rendszer geometriai merevségi mátrix:

$$\mathbf{K}_G = -\frac{F}{30l}\begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 & 0 & 0 \\ -36 & -3l & 72 & 0 & -36 & 3 \\ 3l & -l^2 & 0 & 8l^2 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & -36 & -3l & 36 & 3l \\ 0 & 0 & 3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}\ .$$

A kinematikai peremfeltételek: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $\theta_{z1} = 0$, ezért most a **K** és $\mathbf{K}_G$ mátrixok 1., 2., 3. és 5. sorait, oszlopait kell törölni. A megmaradó (5.16) homogén és lineáris egyenletrendszer

$$\left\{\frac{EI_z}{l^3}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{F}{30l}\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ ,$$

aminek csak akkor lehet zérustól eltérő - nem triviális – megoldása, ha az együttható mátrix determinánsa zérus. Látható, hogy a kritikus terhelés meghatározása egy sajátérték feladat megoldásához vezetett. A két sajátérték a

$$det\begin{bmatrix} 8(1-q) & (2+q) \\ (2+q) & 4(1-q) \end{bmatrix} = 0\ , \qquad q = \frac{Fl^2}{30EI_z}\ .$$

determináns kifejtése után előálló másodfokú egyenlet – karakterisztikus egyenlet – két megoldása. Esetünkben csak a legkisebb abszolút értékű gyöknek van jelentősége, amivel a kritikus nyomó (*Euler*) erő értéke:

$$q_{min} = 0{,}5493\ , \quad F_{cr} = 30 q_{min} \frac{EI_z}{l^2} = 444{,}9 \cdot 10^3 \text{ N}\ ,$$

A q_{min} sajátértékhez tartozó sajátvektor megadja a rúd a kihajlott alakját:

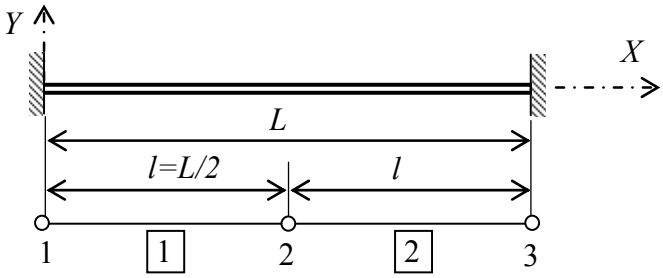
$$\begin{bmatrix} 8(1-q_{min}) & (2+q_{min}) \\ (2+q_{min}) & 4(1-q_{min}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix} = 0\ , \quad \theta_{z2} / \theta_{z3} = -0{,}707$$

A pontos eredmény F_{cr} = 344,3 10^3 N, a hiba 30% körüli, ami az elemszám növelésével csökkenthető. Látható, hogy a pontos érték kisebb, mint a véges elemből kiszámított eredmény, ami arra utal, hogy a közelítő, kevesebb elemből álló modell mindig merevebb. A szabadságfok szám növelésével a modell merevsége is csökken. Hasonló jelenséget tapasztalhatunk a következő, dinamika feladat megoldása során is.

5.2.6 Példa: Szabad lengések

Határozzuk meg az 5.14 ábrán látható, mindkét végén rögzített, állandó keresztmetszetű tengely hajlító lengésének sajátfrekvenciáit és lengésképeit!

$$L = 2 \text{ m}, \quad A = 1800 \text{ mm}^2, \quad I_z = 1{,}35 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$
$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}\ , \quad \rho = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Ns}^2/\text{mm}^4.$$



4.14. ábra. Szabad lengések

A tartó mérete és elemfelosztása ugyanaz, mint az előző két feladatban, ezért a rendszer 6x6 méretű **K** merevségi mátrixa is ugyanaz.

Az (5.19) konzisztens tömegmátrix mindkét elemre azonos:

$$\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^2 = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix},$$

és a már többször használt eljárással összegzett rendszer tömeg mátrix:

$$\mathbf{M}=\frac{\rho Al}{420}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ \hline 54 & -13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ \hline 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{array}\right].$$

A kinematikai peremfeltételek: $v_1 = v_3 = 0$, $\theta_{z1} = \theta_{z3} = 0$, ezért most a **K** és **M** mátrixok 1., 2., 5. és 6. sorait, oszlopait kell törölni. A frekvenciák és a lengésképek a (3.19) sajátérték feladat megoldásai:

$$\left[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right]\mathbf{\Phi}=0\,,\quad \left[\frac{EI_z}{l^3}\begin{bmatrix}24 & 0\\ 0 & 8l^2\end{bmatrix}-\omega^2\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}312 & 0\\ 0 & 8l^2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_2\\ \theta_{z2}\end{bmatrix}=0\,.$$

A végeselem modell most két szabadságfokú, ezért a közelítő mozgásegyenletből legfeljebb kettő sajátértéket, illetve sajátfrekvenciát lehet kiszámítani. A

$$det\begin{bmatrix}24(1-13q) & 0\\ 0 & 8l^2(1-q)\end{bmatrix}=0\,,\quad q=\omega^2\frac{\rho Al^4}{420EI_z}$$

determináns kifejtésével előálló másodfokú egyenlet q_1, q_2 megoldásaival az első két frekvencia közelítő értékei:

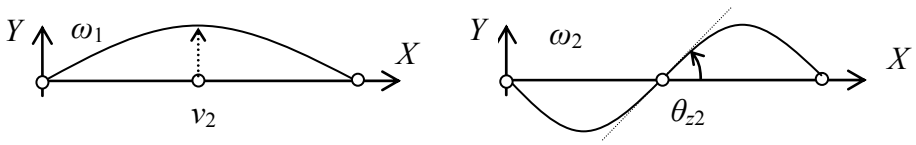
$$q_1=\frac{1}{13},\qquad \omega_1=\sqrt{q_1 420}\sqrt{\frac{EI_z}{l^4\rho A}}=245{,}94\ \mathrm{s}^{-1},\ \omega_1=39{,}14\ \mathrm{Hz}\,,$$

$$q_2=1\,,\qquad \omega_2=\sqrt{q_2 420}\sqrt{\frac{EI_z}{l^4\rho A}}=887{,}39\ \mathrm{s}^{-1},\ \omega_2=141{,}2\ \mathrm{Hz}\,.$$

A pontos értékek: ω_1 = 38,51 Hz és ω_2 = 106,0 Hz. A lengésképek a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$q_1:\ \ v_2=1\,,\ \theta_{z2}=0\,,\qquad q_2:\ \ v_2=0\,,\ \theta_{z2}=1\,,$$

ezek láthatóak az 5.15 ábrán.



5.15 ábra. Az 1. és 2. lengésképek

Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a koncentrált tömegű – lumped – tömegmátrix felhasználásával! Az (5.20) elem tömegmátrixok és a rendszer tömegmátrix:

$$\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^2 = \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho A l}{2}\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A rendszer tömegmátrix diagonál szerkezetű, csak a főátlójában, ott is csak a transzlációs szabadságfokoknak megfelelő pozícióban vannak zérustól különböző értékek. A kinematikai peremfeltételeknek megfelelő részek törlése után megmaradó

$$\left[\frac{EI_z}{l^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8l^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = 0$$

sajátérték feladatnak most csak egy megoldása van:

$$q_1 = 1/12\,, \quad \omega_1 = \sqrt{q_1 420}\sqrt{\frac{EI_z}{l^4 \rho A}} = 256{,}17\ \mathrm{s}^{-1}\,, \ \omega_1 = 40{,}77\ \mathrm{Hz}\,.$$

és az is pontatlanabb, mint a konzisztens mátrixszal kiszámolt közelítés. Az ehhez tartozó lengéskép:

$$q_1\colon \ v_2 = 1\,,\ \theta_{z2} = 0\ .$$

Az elemszám növelésével diagonál tömegmátrix alkalmazásából adódó hiba csökken, viszont a sajátérték feladat megoldását a tömegmátrix diagonál egyszerű szerkezete leegyszerűsíti, gyorsítja.

Néhány általánosítható tapasztalat:

- A frekvenciák pontos értékei kisebbek, mint a közelítő frekvenciák, ami az előző feladatnál tapasztaltakhoz hasonlóan arra utal, hogy a kisebb szabadságfok számú modell mindig merevebb.

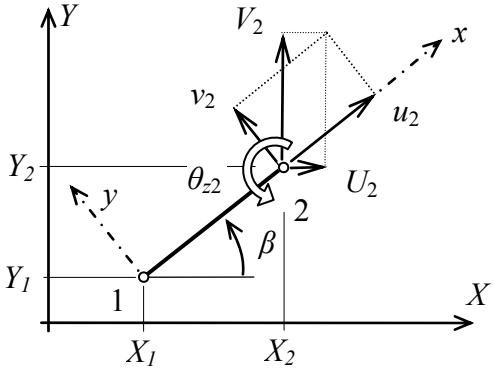
- A második frekvencia hibája nagyobb, mint az elsőé. Ez is általános jelenség, a sajátértékek indexszámával a numerikus hiba is növekszik.

- A kiszámítható sajátfrekvenciák – lengésképek száma nem több, - esetleg kevesebb - mint a rendszer szabadságfokainak száma.

5.2.7 Síkbeli rúdszerkezet

Síkban a 5.16 ábra szerinti rúdelem lokális koordináta rendszerében egy csomópontnak három szabadságfoka van, $n = 3$, a rúd tengely irányú u, az arra merőleges v elmozdulások és a síkra merőleges tengely körüli θ_z forgás. A két csomópontos rúdelem hat szabadságfokú, $N = 6$. A szabadságfokok mátrixa:

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} \underset{(3\times1)}{\Delta_1} \\ \underset{(3\times1)}{\Delta_2} \end{bmatrix} = \left[u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \;\vdots\; u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2} \right]^T \quad . \tag{5.24}$$



5.16 ábra. Síkbeli rúdelem transzformációja

Az elem lokális x, y koordináta rendszerében az egyes elem mátrixok a csuklós végpontú húzott és a hajlított elem mátrixainak összege lesz.

Merevségi mátrix: A csomóponti mozgások (5.23) sorrendjének megfelelően a (5.3) és a (5.17) merevségek összegzésével az eredő merevség:

$$\mathbf{k}^e = E \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ \hline -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2L^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} a = A / L \,, \\ b = I_z / L^3 \,. \end{array} \tag{5.25}$$

Tömegmátrix: Hasonló módon lehet megszerkeszteni az (5.4) és az (5.19) konzisztens tömegmátrixok összegét:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho A L}{420} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ \hline 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{array} \right] . \tag{5.26}$$

Geometriai merevségi mátrix: A csuklós végű elemnél a geometriai merevség nem értelmezhető. A hajlított elem (5.18) mátrixa, a megfelelő helyeken zérus elemekkel kiegészítve :

$$\mathbf{k}_G^e = \frac{N}{30L}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{array}\right] . \tag{5.27}$$

<u>Tehermátrix</u>: Az 5.2 és az 5.8 ábrákon látható csomóponti koncentrált és állandó megoszló terhelések, valamint a hossz mentén állandó $\alpha\Delta T$ hőtágulás eredő elem tehermátrixa a (5.5) és (5.21) összegzésével:

$$\mathbf{p}^e = \left[\begin{array}{c} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ 0 \end{array}\right] + \frac{L}{2}\left[\begin{array}{c} p_x \\ p_y \\ p_y L/6 \\ \hline p_x \\ p_y \\ -p_y L/6 \end{array}\right] + \alpha\Delta T_0 AE\left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] - \alpha\Delta T_{Gy} EI_z\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] . \tag{5.28}$$

A lokális rendszerben felírt elem mátrixokat át kell forgatni a szerkezeti, vagy globális rendszerbe. A 5.16 ábrán a β irányszöggel megadott helyzetű egyenes elemnél a csomópontok lokális x, y és a globális X, Y irányú mozgásainak kapcsolata:

$$\underset{(3\times1)}{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Uc + Vs \\ -Us + Vc \\ \theta_z \end{bmatrix} , \qquad \begin{array}{l} s = sin\,\beta \ , \\ c = cos\,\beta \ . \end{array}$$

A síkra merőleges tengely körüli θ_z forgás mindkét rendszerben ugyanaz. Az elem L hossza és az irányát megadó szögfüggvények most is az (5.7) szerint számíthatók. Az elem lokális és globális szabadságfokainak kapcsolatát a

$$\mathbf{U}^e = \mathbf{T}\mathbf{D}^e \ , \quad \mathbf{U}^{eT} = \mathbf{D}^{eT}\mathbf{T}^T \ , \tag{5.29}$$

transzformáció adja meg, ahol $\mathbf{D}^e$ az elem globális szabadságfokainak mátrixa és $\mathbf{T}$ a két rendszer közötti transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} , \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{D}^e = \left[U_1 \ V_1 \ \theta_{z1} \ U_2 \ V_2 \ \theta_{z1}\right]^T , \\ s = sin\,\beta \ , \\ c = cos\,\beta \ . \end{array} \tag{5.30}$$

Az elemben a (5.6) virtuális alakváltozási energia a lokális és a globális paraméterekkel kifejezve:

$$\delta U = \delta \mathbf{U}^{eT}\,\mathbf{k}^e\,\mathbf{U}^e = \delta\,\underset{(1\times 6)}{\mathbf{D}^{e\,T}}\left(\underset{(6\times 6)}{\mathbf{T}^T}\,\underset{(6\times 6)}{\mathbf{k}^e}\,\underset{(6\times 6)}{\mathbf{T}}\right)\underset{(6\times 1)}{\mathbf{D}^e} = \delta\,\underset{(1\times 6)}{\mathbf{D}^{e\,T}}\,\underset{(6\times 6)}{\mathbf{K}^e}\,\underset{(6\times 1)}{\mathbf{D}^e},$$

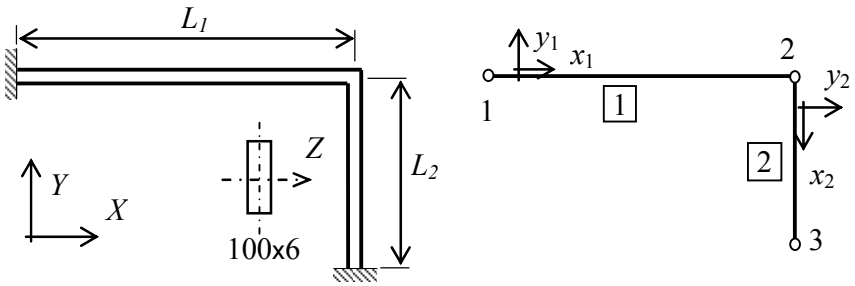
ahol $\mathbf{K}^e$ a rúdelem globális (síkbeli) merevségi mátrixa. Hasonló módon transzformálható az elem tömege, geometriai merevsége és tehermátrixa. Összefoglalva a transzformációs formulák a következők:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{k}^e\mathbf{T}\,,\quad \mathbf{M}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{m}^e\mathbf{T}\,,\quad \mathbf{K}_G^e = \mathbf{T}^T\mathbf{k}_G^e\mathbf{T}\,,\quad \mathbf{P}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{p}^e \quad . \tag{5.31}$$

5.2.8 Példa: Keret hőterhelése

Az 5.17 ábra szerinti, állandó keresztmetszetű síkkeret hőmérséklete egyenletesen megnövekszik. Számítsuk ki a sarokpont mozgását és a keret igénybevételeit!

$$L_1 = 2\text{ m},\quad L_2 = 1\text{ m},\quad A = 1800\text{ mm}^2\,,\quad I_z = 1{,}35\cdot 10^5\text{ mm}^4,$$
$$E = 2\cdot 10^5\text{ MPa}\,,\qquad \alpha = 1{,}2\cdot 10^5\,/\,\text{C}^0\,,\qquad \Delta T_0 = 10\text{ C}^0\,.$$



5.17 ábra Keretszerkezet hőterhelése

A két rúdelemből álló modell összes szabadságfoka 9, csomópontonként két elmozdulás és egy forgás a globális X, Y rendszerben. Ezek sorrendje:

$$\left[U_1 \quad V_1 \quad \theta_{z1} \;\vdots\; U_2 \quad V_2 \quad \theta_{z2} \;\vdots\; U_3 \quad V_3 \quad \theta_{z3}\right]$$

Az 1. elem (5.24) lokális és (5.30) globális merevségi mátrixai és a tehervektorok is megegyeznek, mivel az irányszög $\beta = 0$, és az (5.29) $\mathbf{T}$ transzformáció egységmátrix:

$$a = A\,/\,L_1 = 0{,}3\text{ mm}\,,\quad b = I_z\,/\,L_1^3 = 6{,}25\cdot 10^{-5}\text{ mm}\,,\quad A\alpha\Delta T = 0{,}072\text{ mm}^2$$

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{k}^1 = E\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0{,}3 & 0 & 0 & -0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 7{,}5\cdot 10^{-4} & 0{,}75 & 0 & -7{,}5\cdot 10^{-4} & 0{,}75 \\
0 & 0{,}75 & 1000 & 0 & -0{,}75 & 500 \\
\hline
-0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\
0 & -7{,}5\cdot 10^{-4} & -0{,}75 & 0 & 7{,}5\cdot 10^{-4} & -0{,}75 \\
0 & 0{,}75 & 500 & 0 & -0{,}75 & 1000
\end{array}\right]$$

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{p}^1 = E\ 0{,}072\left[-1 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 1 \quad 0 \quad 0\right]$$

A 2. elemnél az X és x_2 irányok közötti szög β = -π/2, c = 0, s = -1. Az (5.24) lokális merevség és az (5.29) transzformáció mátrixai:

$$a = A / L_2 = 0{,}6 \text{ mm}, \qquad b = I_z / L_2^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mm},$$

$$\mathbf{k}^2 = E \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}6 & 0 & 0 & -0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot 10^{-3} & 3 & 0 & -6\cdot 10^{-3} & 3 \\ 0 & 3 & 2\cdot 10^{3} & 0 & -3 & 10^{3} \\ \hline -0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -6\cdot 10^{-3} & -3 & 0 & 6\cdot 10^{-3} & -3 \\ 0 & 3 & 10^{3} & 0 & -3 & 2\cdot 10^{3} \end{array}\right], \quad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

és a 2. elem (5.30) globális merevsége:

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^1 \mathbf{T} = E \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6\cdot 10^{-3} & 0 & 3 & 6\cdot 10^{-3} & 0 & 3 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}75 & 0 & -0{,}6 & 0 \\ 3 & 0{,}75 & 2000 & -3 & 0 & 1000 \\ \hline 6\cdot 10^{-3} & 0 & -3 & 6\cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 3 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 2000 \end{array}\right].$$

A 2. elem lokális és globális tehervektorai:

$$\mathbf{p}^2 = E\ 0{,}072\left[-1 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 1 \quad 0 \quad 0\right]$$

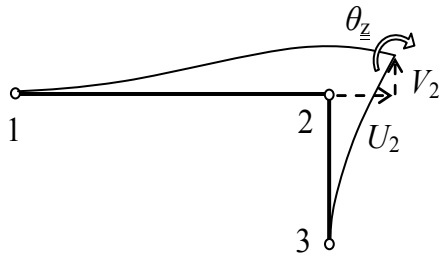
$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{T}^T \mathbf{p}^2 = E\ 0{,}072\left[0 \quad 1 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad -1 \quad 0\right]$$

A globális rendszerbe transzformált elemi mátrixokkal a már ismert módon összeállíthatjuk a rendszer mátrixokat. A $V_1 = U_1 = V_3 = U_3 = 0$ kinematikai peremfeltételeknek megfelelő sorok – oszlopok törlése után megmaradó lineáris egyenletrendszer és megoldása a következő:

$$\begin{bmatrix} 0{,}306 & 0 & 3 \\ 0 & 0{,}60075 & 0 \\ 3 & 0 & 3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = 0{,}072 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = 0{,}2373 \text{ mm}, \quad \mathrm{V}_2 = 1{,}1959 \text{ mm}, \quad \theta_{z2} = -2{,}373 \cdot 10^{-4}$$

A keret deformált alakját mutatja az 5.18 ábra.



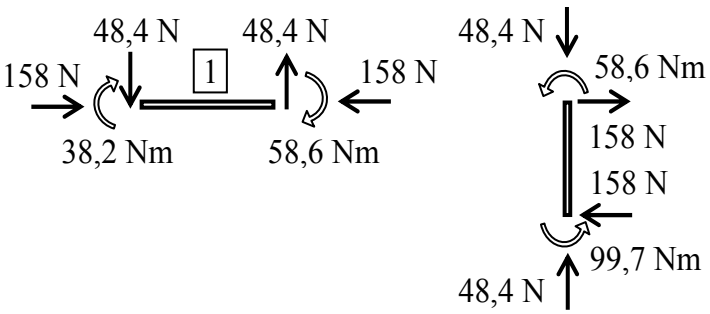
5.18 ábra. Keret mozgása

A csomópontokra ható erőket az elemek egyensúlyának (5.22) feltételéből határozhatjuk meg, de előtte a csomóponti mozgásokat vissza kell forgatni az elemek lokális rendszerébe. A csomóponti igénybevételek elemenként:

$$\mathbf{U}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2373 \\ 1,1959 \\ -2,373\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -N_1 \\ -V_{y1} \\ -M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \mathbf{k}^1\mathbf{U}^1 - \mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 158 \\ 48,4 \\ -38200 \\ -158 \\ 48,4 \\ -58600 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} 1,1959 \\ -0,2373 \\ -2,373\cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -N_1 \\ -V_{y1} \\ -M_{z1} \\ N_2 \\ V_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \mathbf{k}^2\mathbf{U}^2 - \mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} 48,4 \\ 158 \\ -58600 \\ -48,4 \\ -158 \\ 99700 \end{bmatrix}.$$

Az elemek végponti igénybevételei láthatóak az 5.19 ábrán.



5.19. Keret csomóponti igénybevételei

5.3 A *Timoshenko* rúdelem

A 3.1. fejezetben, a (3.6) egyenletekből látható, hogy az *Euler-Bernoulli* elmélet nem veszi figyelembe a nyírási alakváltozásokat. Ez annak a feltételezésnek a következménye, ami szerint a keresztmetszet síkja mindig merőleges a rúd görbült tengelyére. A *Timoshenko* elmélet ezt a megkötést feloldja, és bár korlátozottan, de a (5.26) egyenletek szerint számol a nyíró feszültségeknek a mozgásra gyakorolt hatásával.

A síkbeli hajlított *Timoshenko* rúdelem egy keresztmetszetének mozgását a 3.13 ábrán látható módon két független paraméter határozza meg, a v lehajlás és a θ_z forgás. Az L hosszúságú elem egy belső pontjában ezeket független mozgás paramétereket a csomóponti

$$\underset{(4\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_{z1} & v_2 & \theta_{z2} \end{bmatrix}^T$$

szabadságfokokkal a következő formában interpoláljuk:

$$\begin{bmatrix} v(\xi) \\ \theta_z(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{U}^e \quad , \quad \xi = x / L \, ,$$

ahol az interpolációs függvények:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)}{1+B_y}\left(1+B_y+\xi-2\xi^2\right) , \quad N_2 = L\frac{(1-\xi)}{1+B_y}\xi\left(1+\frac{B_y}{2}-\xi\right) , \\ N_3 &= \frac{\xi}{1+B_y}\left(B_y+3\xi-2\xi^2\right) , \quad N_4 = L\frac{(\xi-1)}{1+B_y}\xi\left(\frac{B_y}{2}+\xi\right) , \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{6}{L}\frac{\xi(\xi-1)}{1+B_y} , \quad N_6 = \frac{(1-\xi)}{1+B_y}\left(1+B_y-3\xi\right) , \\ N_7 &= \frac{6}{L}\frac{\xi(1-\xi)}{1+B_y} , \quad N_8 = \frac{\xi}{1+B_y}\left(B_y-2+3\xi\right) , \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$B_y = \frac{12}{L^2}\frac{EI_z}{GA_s} \quad .$$

Az itt szereplő A_s keresztmetszeti jellemző a nyíró terület, ennek értelmezését és jelentőségét a 3.2.2 fejezet ismertette.

Az *Euler-Bernoulli* rúdelemnél használt (5.16) harmadfokú interpolációs, vagy forma függvények a hajlított rúdelem (3.8) szerinti, $EI_z v'''' = 0$ homogén, negyedrendű alapegyenletnek az egységnyi végpont mozgásokkal vagy forgásokal, mint

peremfeltételekkel meghatározott megoldásai. Ezt az eljárást itt is alkalmazva, az (5.31) interpolációs függvények a *Timoshenko* rúdelem (3.27) homogén ($p_y = 0$) egyenleteinek megoldásai.

A továbbiakban, a már ismert módon, az interpolációs függvényeket behelyettesítve a (2.28) alakváltozási energia növekménybe,

$$\delta U = \int_L EI_z \theta_z' \delta\theta_z' dx + \int_L GA\left(v' - \theta_z\right)\delta\left(v' - \theta_z\right)\, dx = \delta \mathbf{U}^{eT}\, \mathbf{k}^e\, \mathbf{U}^e,$$

felírhatjuk a *Timoshenko* rúdelem merevségi mátrixát:

$$\mathbf{k}^e = \frac{EI_z}{L^3\left(1+B_y\right)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & \left(4+B_y\right)L^2 & -6L & \left(2-B_y\right)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & \left(2-B_y\right)L^2 & -6L & \left(4+B_y\right)L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Ha a nyírás hatását elhagyjuk, azaz $B_y = 0$, akkor ez megegyezik a (5.17) merevségi mátrixal.

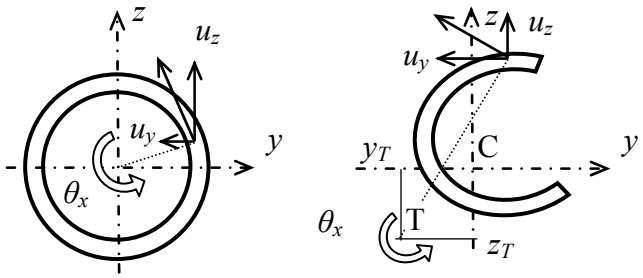
A további elemmátrixok származtatása az *Euler-Bernoulli* rúdelemnél már bemutatott módon történik. Ennek további részletei megtalálhatók *Przemieniecki* [5] könyvében.

5.4 A *St'Venant* féle csavarási modell

Térbeli rúdelemek lehetséges igénybevételei a húzás, a két főtengely körüli hajlítás-nyírás és a csavarás, amelyek hatása egy egyenes elemre egymástól függetlenül vizsgálható.

A *St'Venant* féle, vagy szabad csavarási modell alapvető feltételezése, hogy a rúd keresztmetszetében csak csúsztató feszültségek jönnek létre. A szabad jelző itt arra utal, hogy ebben a modellben a keresztmetszet tengely irányú mozgását, a csavarási vetemedést semmi sem gátolja. Csavaráskor a keresztmetszeti jellemzők között, a C geometriai középpont mellett, megjelenik még két másik nevezetes pont, a *csavaró középpont* és a *nyíró középpont*. Tiszta csavarás során a keresztmetszet forgásának pólusa a csavaró középpont. A nyíró középpont pedig az a pont, amin átmenő *y-z* síkbeli nyíró erő hatására – irányától függetlenül – a rúd igénybevétele nyírás és hajlítás, vagyis nincs csavarás. Igazolható, hogy ez a két pont, amit az 5.20. ábrán a T jelöl, egybeesik. (*Muttnyánszki* [11])

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



5.20. ábra. Csavart rúd elmozdulásai

A kör keresztmetszetű rúd tiszta csavarásakor, feltéve hogy a θ_x elcsavarodási szög kicsi, az elmozdulás koordináták a (3.29) alapján a következők (5.20 ábra):

$$u_x = 0\,, \quad u_y = -\theta_x z\,, \quad u_z = \theta_x y\ . \tag{5.35}$$

A (2.4) geometriai egyenletekkel a zérustól különböző alakváltozások:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\theta_x{}' z\,, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta_x{}' y\ ,$$

és a Hooke törvény felhasználásával a csúsztató feszültségek:

$$\tau_{xy} = -G\theta_x{}' z\,, \qquad \tau_{xz} = G\theta_x{}' y\ .$$

A rúdelem egy keresztmetszetét terhelő M_x csavaró igénybevétel, a külső és belső erők statikai egyenértékűségéből:

$$M_x = \int_A \left(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\right) dA = G\theta_x{}' \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA = G\theta_x{}' J\ .$$

A J csavarási másodrendű nyomaték kör keresztmetszetnél megegyezik a poláris másodrendű nyomatékkal, $J = I_p = I_y + I_z$. Nem kör alakú keresztmetszetekre a J keresztmetszeti jellemzőt a 2.3 fejezetben bemutatott *St'Venant* féle csavarási feladat megoldásából, a (2.36) szerint kell kiszámítani.

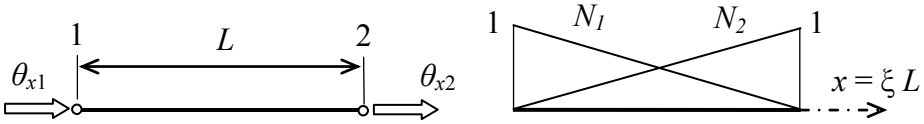
A virtuális munka (2.25) elvében a belső erők virtuális munkája:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_L \int_A G\left(\gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\delta\gamma_{xz}\right) dA\ dx = \\ &= \int_L G\left(I_y + I_z\right)\theta_x{}'\delta\theta_x{}' dx = \int_L GJ\theta_x{}'\delta\theta_x{}' dx = \delta\frac{1}{2}\int_L GJ\theta_x{}'^2 dx\ . \end{aligned} \tag{5.36}$$

A tehetetlenségi erők virtuális munkájának számításakor figyelembe kell venni, hogy a forgó mozgás pólusa az 5.20 ábra szerinti T csavaró/nyíró középpont:

$$u_y = -\theta_x\left(z - z_T\right)\,, \quad u_z = \theta_x\left(y - y_T\right)\ ,$$

$$\delta T = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV = \int_L \left(\int_A \rho \left(\ddot{u}_y \delta u_y + \ddot{u}_z \delta u_z \right) dA \right) dx =$$
$$= \int_L \rho \ddot{\theta}_x \delta \theta_x \left(\int_A \left[\left(y - y_T \right)^2 + \left(z - z_T \right)^2 \right] dA \right) dx = \qquad (5.37)$$
$$= \int_L \rho I_{pT} \ddot{\theta}_x \ \delta \theta_x \ dx \ .$$



5.21 ábra. A két szabadságfokú csavart rúdelem és a lineáris formafüggvények

Tiszta csavaráskor a keresztmetszetek csak forognak a rúd x tengelye körül. A rúdelem végein lévő csomópontok szabadságfoka n = 1, a két csomópontú egyenes elem szabadságfoka N = 2, és az elem szabadságfokok mátrixa:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \theta_{z1} & \theta_{z2} \end{bmatrix}^T \ . \qquad (5.38)$$

A két csomóponti értékből az elem belső pontjaiban a θ_x elcsavarodást a következő lineáris interpolációval határozhatjuk meg:

$$\theta(x) = \theta_{x1} N_1 + \theta_{x2} N_2 = \underset{(1\times2)}{\mathbf{N}^T} \underset{(2\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} \ , \qquad (5.39)$$

ahol N_1 és N_2 a csuklós végpontú elemnél már használt (5.2) lineáris formafüggvények. Mivel (5.3) és (5.34) energia kifejezések is alakra hasonlóak, a továbbiakban az elem mátrixok származtatása is ugyanúgy történik, mint a húzott rudelem esetén.

A (5.37) interpoláció szerint a θ_x elcsavarodás lineáris függvény, ami pontosan megfelel a *St'Venant* féle, vagy szabad csavarási modell alapvető feltételezésének, ami szerint $d\theta_x/dx$ = q = állandó.

<u>Merevségi mátrix:</u> A lineáris (5.2) formafüggvények $\mathbf{N}'^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ deriváltjainak helyettesítésével a (5.34) alakváltozási energia növekmény és az elem merevségi mátrixa

$$\delta U = \int_L GJ \theta_x' \delta \theta_x' dx = \delta \mathbf{U}^{\mathrm{eT}} \mathbf{k}^{\mathrm{e}} \mathbf{U}^{\mathrm{e}}, \qquad \underset{(2\times2)}{\mathbf{k}^{\mathrm{e}}} = \frac{GJ}{L} \int_0^1 \underset{(2\times1)}{\mathbf{N}'} \underset{(1\times2)}{\mathbf{N}'^{\mathrm{T}}} \ d\xi \ ,$$
$$\mathbf{k}^e = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (5.40)$$

Ez az egyenes, csak csavarásra igénybevett rúdelem (5.6) merevségi mátrixa a rúd lokális koordináta rendszerben.

Tömegmátrix: Dinamikai feladatoknál az elcsavarodás és a szöggyorsulás:

$$\theta_x(x,t) = \mathbf{N}^T \mathbf{U}^e(t) \ , \quad \ddot{\theta}_x = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{U}}^e \ , \quad \delta\theta_x = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N} \, .$$

és a (5.35) tehetetlenségi erők munkájából a konzisztens tömegmátrix:

$$\delta T = \int_L \rho I_{pT} \ddot{\theta}_x \, \delta\theta_x \, dx = \delta\mathbf{U}^{eT} \, \mathbf{m}^e \, \ddot{\mathbf{U}}^e \ , \quad I_{pT} = I_x + I_y + A\left(y_T^2 + z_T^2\right) \ ,$$
$$\mathbf{m}^e = \rho \frac{I_{pT} L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \, . \tag{5.41}$$

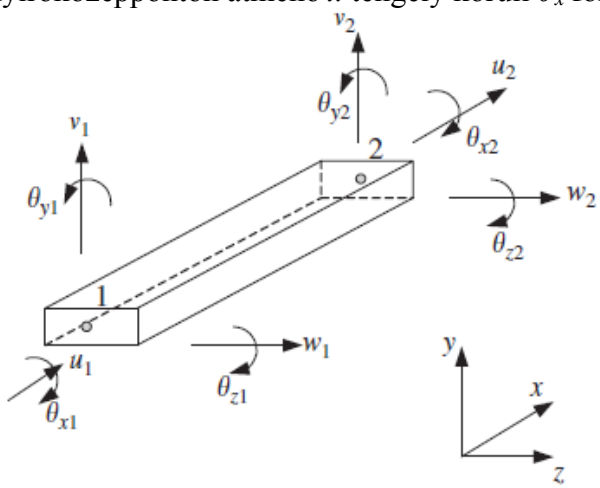
A konzisztens tömegmátrix helyett gyakran használják a diagonál szerkezetű tömegmátrixot:

$$\mathbf{m}^e = \frac{\rho I_p L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \, .$$

5.5 Térbeli keretszerkezet,

Térbeli rúdelemek lehetséges igénybevételei a húzás, a két főtengely körüli hajlítás-nyírás és a csavarás. A rúdelem lokális koordináta rendszerében (a 4.22. ábra szerint x a rúd tengelye, y és z a keresztmetszet **C** középponti főtengelyei) nézve a szabadságfokok és igénybevételek kapcsolata a következő:

- N húzás: x tengely irányú u elmozdulás,
- M_y hajlítás, V_z nyírás: z tengely irányú w elmozdulás és θ_y forgás,
- M_z hajlítás, V_y nyírás: y tengely irányú v elmozdulás és θ_z forgás,
- M_x csavarás: a T nyíróközépponton átmenő x tengely körüli θ_x forgás.



5.22 ábra. Térbeli rúdelem lokális szabadságfokai

Ebből következik, hogy a rúdelelem végein lévő csomópontoknak hat szabadságfoka van, n = 6, a két csomópontos rúdelem szabadságfokainak száma N = 12. Az elem szabadságfokainak mátrixa:

$$\underset{(12\times 1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} \underset{(6\times 1)}{\Delta_1} \\ \underset{(6\times 1)}{\Delta_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta_i = \left[u_i \quad v_i \quad w_i \;\middle|\; \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \right]^T, \; i = 1, 2 \,. \tag{5.42}$$

Az elem 12x12 méretű merevségi mátrixa a rúd lokális rendszerében az előzőekben részletezett (4.3) 2x2 méretű húzott elem, kétszer a (4.17) 4x4 méretű hajlított elem (az *y-x* és a *z-x* síkokban történő mozgásokból) és a (5.38) 2x2 méretű csavart elem merevségeiből, a (5.40) szabadságfok sorrendnek megfelelően rakható össze:

$$\underset{(12\times 12)}{\mathbf{k}^e} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{12}^T & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.43}$$

ahol a 6x6 méretű almátrixok a következők:

$$\underset{(6\times 6)}{\mathbf{k}_{11}} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix},$$

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

$$\underset{(6\times6)}{\mathbf{k}_{22}} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix},$$

$$\underset{(6\times6)}{\mathbf{k}_{12}} = \begin{bmatrix} -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}.$$

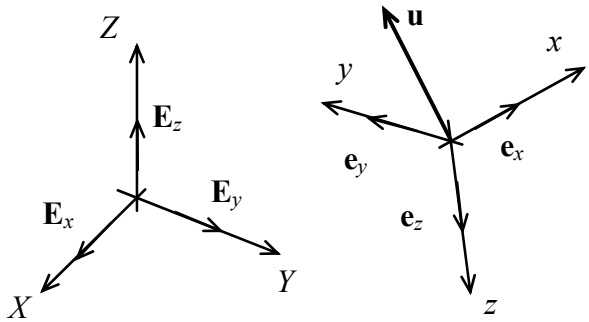
Hasonló módon kell eljárni a tömeg, a geometriai merevség és a teher mátrixok esetén is.

5.5.1 Transzformációk

A következő lépés az elem mátrixok átforgatása a globális X, Y, Z, vagy szerkezeti koordináta rendszerbe. A rúdelem tengelye lokális x, a keresztmetszet főtengelyei pedig a lokális y és z tengelyek. *A* két koordináta rendszer közötti forgatási transzformáció elvileg ugyanolyan, mint amit már a síkbeli keretszerkezetnél a (5.30) egyenletek kapcsán részleteztünk.

A 5.23 ábrán berajzoltuk a globális és lokális koordináta tengelyek irányába mutató $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, $\mathbf{E}_z$ és $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ egységvektorokat. A lokális egységvektorok koordinátái a globális rendszerben legyenek

$$\mathbf{e}_x = l_x\mathbf{E}_x + m_x\mathbf{E}_y + n_x\mathbf{E}_z\ ,\quad \mathbf{e}_y = l_y\mathbf{E}_x + m_y\mathbf{E}_y + n_z\mathbf{E}_z\ ,$$
$$\mathbf{e}_z = l_z\mathbf{E}_x + m_z\mathbf{E}_y + n_z\mathbf{E}_z\ .$$



5.23 ábra. Lokális és globális koordináta rendszerek

Egy **u** (elmozdulás vagy forgás) vektor mindkét rendszerben felírható:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z = U\mathbf{E}_x + V\mathbf{E}_y + W\mathbf{E}_z .$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal, az eredmény a lokális és globális vektorkoordináták kapcsolata

$$u = Ul_x + Vm_x + Wn_x \ , \ \ v = Ul_y + Vm_y + Wn_y \ , \ \ w = Ul_z + Vm_z + Wn_z \ ,$$

vagy ugyanez mátrix szorzat formájában:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3 \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} , \quad \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} .$$

Legyen $\mathbf{D}^e$ az elem globális szabadságfokainak mátrixa és **T** a két rendszer közötti transzformáció. Az elem lokális és globális szabadságfokainak - a csomóponti elmozdulás és forgás vektorok - kapcsolata:

$$\underset{(12\times1)}{\mathbf{U}}{}^{e} = \underset{(12\times12)}{\mathbf{T}} \underset{(12\times1)}{\mathbf{D}}{}^{e} \ , \qquad \underset{(1\times12)}{\mathbf{U}^{eT}} = \underset{(1\times12)}{\mathbf{D}^{eT}} \underset{(12\times12)}{\mathbf{T}^{T}}$$

ahol **T** a két rendszer közötti transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} . \tag{5.44}$$

Az elemmátrixok transzformációs formulái, az (5.30) egyenletek felírásánál követett gondolatmenet szerint a következők lesznek:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{k}^e\mathbf{T} \ , \ \ \mathbf{M}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{m}^e\mathbf{T} \ , \ \ \mathbf{K}_G^e = \mathbf{T}^T\mathbf{k}_G^e\mathbf{T} \ , \ \ \mathbf{P}^e = \mathbf{T}^T\mathbf{p}^e \quad . \tag{5.45}$$

Ebben a fejezetben részletesen bemutatott rúdelem jellemzőinek számításai az *Euler-Bernoulli* rúdelméleten alapulnak, ami elsősorban hosszú rudakra alkalmazható. Vastag rudaknál, - ha a keresztmetszeti méret és a hossz viszonya nagyobb, mint $\approx 0{,}1$ - a nyírási alakváltozások hatása már jelentős lehet, amint azt a 2.1.2 fejezet példájának eredménye is mutatta. Ilyenkor a *Timoshenko* elmélet alapján kiszámított, és a 4.3 fejezetben röviden leírt, elem mátrixokat kell használni. A számítások menete a két elméletben hasonló. A közismert végeselem programrendszerek szinte kivétel nélkül a *Timoshenko* féle vastag rúdelemet használják.

6 Síkfeladatok

Egy rugalmasságtani feladat megoldása során, amint azt a 2.1.5 fejezetben részletesen bemutattuk, a legáltalánosabb esetben 15 egyenletből álló rendszert kell kezelni. A mérnöki mechanikai számításokban nagy jelentősége van azoknak az egyszerűsítő feltételezéseknek, amelyekkel jelentős mértékben tudjuk csökkenteni a feladatban szereplő ismeretlenek számát. A mechanikai modell kialakítása során ezeket az egyszerűsítéseket a szerkezet mérete, alakja és a terhelés módja indokolja. Az előző fejezetekben láthattuk, hogy az egydimenziós (1D) rúdmodell akkor alkalmazható, ha a keresztmetszeti és a hosszirányú méretek aránya ezt indokolja. Rudak esetében feltételeztük, hogy a mechanikai jellemzők - elmozdulások, feszültségek - a keresztmetszeti koordináták (y és z másodrendű nyomatéki főtengelyek) egyszerű, általában lineáris függvényei.

A mechanikai modellek másik nagy csoportját alkotják a kétdimenziós (2D) feladatok, ahol feltételezzük, hogy egy koordináta - legyen ez a z - irányában a mechanikai jellemzők egyszerű, többnyire állandó vagy lineáris függvények szerint változnak. A legismertebb kétméretű modellek a síkfeladatok és a síklemez és görbült héjszerkezetek.

A rugalmasságtan térbeli, háromméretű (3D) feladatát három egyszerű mechanikai modell alkalmazásával lehet síkbeli, kétméretű feladatra redukálni. Ezek a síkfeszültségi állapot, sík alakváltozási állapot és forgásszimmetrikus problémák.

6.1 Síkfeszültségi állapot

Síkfeszültségi állapot alakulhat ki egy sík középfelületű, vékony testben, ha a külső terhelések eredője is a középfelület síkjában van és az alakváltozás során a test középfelülete sík marad, nem görbül. A továbbiakban a középfelület legyen az 6.1 ábra szerinti x, y koordináta sík. Mivel a test t vastagsága kicsi, a z irányú feszültségek is kicsik, jó közelítéssel zérusértékűek. A nem zérus feszültségek mátrixa

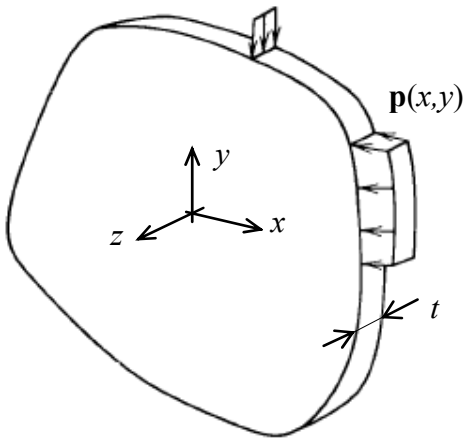
$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

A feszültségek a t vastagság mentén nem változnak, értékük állandó, és nincs hajlítás. Ezért gyakran nevezik a hajlítás mentes síkfeszültségi állapotot *membrán feszültségi állapotnak*.

Az síkbeli alakváltozási koordináták a középfelület $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ elmozdulásaiból - kis alakváltozások esetén - az (2.4) összefüggések szerint a következők lesznek:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \tag{6.2}$$

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



6.1 ábra. Síkfeszültségi állapot

Síkfeszültségi állapot esetén a síkra merőleges irányú ε_z fajlagos nyúlás nem zérus, de értéke a $\sigma_z = 0$ feltételből kiszámítható. A (2.10) általános *Hooke* törvényből

$$\sigma_z = 0 = c_2\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right) + c_2\left(\varepsilon_y - \varepsilon_y^*\right) + c_1\left(\varepsilon_z - \varepsilon_z^*\right) ,$$

majd az (1.11) c_1, c_2 anyagjellemzők helyettesítése után:

$$\varepsilon_z - \varepsilon_z^* = -\frac{c_2}{c_1}\left[\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right) + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_y^*\right)\right] = -\frac{\nu}{1-\nu}\left[\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right) + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_y^*\right)\right]. \quad (6.3)$$

A nem közvetlen mechanikai hatások következtében kialakuló alakváltozások minden irányban azonos hőtágulási tulajdonság esetén

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon_y^* = \varepsilon_z^* = \alpha \Delta T_0 ,$$

ahol α a lineáris hőtágulási együttható és $\Delta T_0(x,y)$ a testnek a vastagsága mentén állandó hőmérsékletváltozása. Ebben az esetben a z irányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_z = -\frac{c_2}{c_1}\left[\left(\varepsilon_x - \varepsilon_x^*\right) + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_y^*\right)\right] = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha \Delta T_0 .$$

A (6.1) és (6.2) síkbeli feszültségek és alakváltozások kapcsolata a (2.10) általános *Hooke* törvényből a (6.3) helyettesítésével a következő mátrix egyenlet formájában írható fel:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^* ,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y - \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy} - \gamma_{xy}^* \end{bmatrix} . \quad (6.4)$$

A (6.1) feszültségkomponensekre vonatkozó (2.8) egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x = 0 \ , \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y = 0 \ , \tag{6.5}$$

ahol q_x és q_y a térfogati erőhatás koordinátái.

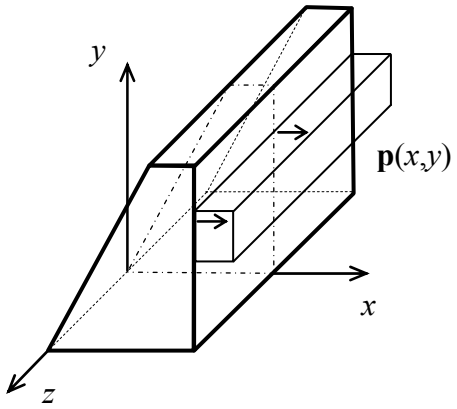
Megjegyzés: A szakirodalomban gyakran használják az *általánosított síkfeszültségi állapot* megnevezést is, amikor a síkfeszültségi állapot feltételezései nem pontosan, hanem csak a t vastagság menti átlagokra érvényesek:

$$\int_t \sigma_z dz = \int_t \tau_{xz} dz = \int_t \tau_{yz} dz = 0 \ .$$

Ebben az esetben a síkfeszültségi állapotra vonatkozó egyenletek és eredmények változatlan formában érvényesek, de azok a vastagság menti átlagokra (átlagos feszültségek, terhelések és átlagos elmozdulások) vonatkoznak.

6.2 Sík alakváltozási állapot

Síkbeli alakváltozási állapot alakul ki egy z tengelyű hengeres testben, ha a középfelület síkjával párhuzamos terhelések hatására a z irányú méretek nem változnak.



6.2. Sík alakváltozási állapot

A nem zérus alakváltozások mátrixa

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} . \tag{6.6}$$

Síkbeli alakváltozási állapot esetén a középsíkra merőleges irányú σ_z fajlagos nyúlás nem zérus, de értéke a $\varepsilon_z = 0$ feltételből kiszámítható. Az (2.12) általános *Hooke* törvényből:

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z\right) + \varepsilon_z^* \ ,$$
$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - E\varepsilon_z^* \ . \tag{6.7}$$

A (6.5) síkbeli alakváltozások és a (6.1) síkbeli feszültségek kapcsolata az (2.10) általános *Hooke* törvényből a harmadik sor és oszlop elhagyásával a következő mátrix egyenlet formájában írható fel:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*\right) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^* \ ,$$
$$\mathbf{C} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \ d_1 = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \ , \ d_2 = \frac{\nu}{(1-2\nu)} \ . \tag{6.8}$$

A síkfeszültségi és a sík alakváltozási állapot egyenletei között csak az anyagtörvény (6.4), (6.8) **C** mátrixában mutatkozik eltérés. A további egyenletek változatlan formában érvényesek mindkét modellre. A síkbeli (6.6) alakváltozási koordináták és a középfelület pontjainak $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ elmozdulásai közötti kapcsolatot a (6.2) összefüggések, a síkbeli feszültség koordinátákra vonatkozó egyensúlyi feltételt pedig a (6.5) egyenletek írják le.

6.3 Síkfeladatok végeselem modelljei

Az előzőekben röviden bemutatott két síkmodell közös jellemzője, hogy a $z = 0$ középfelületen lévő pontok mozgását az $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ elmozdulás koordináták (dinamikai feladatokban $u_x(x,y,t)$, $u_y(x,y,t)$ elmozdulások) adják meg. Ezek ismeretében a test bármely pontjában meghatározhatjuk a további alakváltozási és feszültség jellemzőket. A végeselem modell a test középfelületéhez kötött, az elemek egyszerű síkbeli alakzatok, háromszögek vagy négyszögek. A továbbiakban csak három egyszerű, de igenfontos elemtípust vizsgálunk részletesebben: a lineáris háromszög, a lineáris négyszög és az izoparamtrikus négyszög elemeket. A három elemtípus kapcsán áttekinthetjük azokat a fontos alapelveket és módszereket, amelyek a bonyolultabb, másodfokú vagy magasabb fokszámú elemeknél is alkalmaznak.

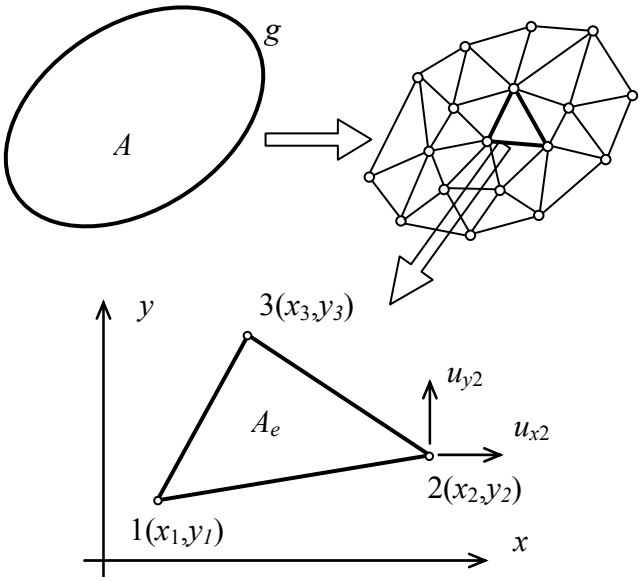
A különböző elemtípusokra vonatkozó összefüggéseket és elem mátrixokat a virtuális munka elvének (2.25)

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \rho\ddot{\mathbf{u}}^T\delta\mathbf{u} dV -$$
$$-\left(\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}\ dV + \int_{Ap} \mathbf{p}^T\delta\mathbf{u}\ dA + \int_V \mathbf{q}^T\delta\mathbf{u}\ dV\right) \tag{6.9}$$

alakjából kiindulva írjuk fel, ahol **u** az elmozdulás, **p** és **q** a felületi és térfogati terhelések, **ε** az alakváltozás, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ a nem mechanikai hatásokból következő alakváltozás, **C** a rugalmas test anyagjellemzőinek szimmetrikus mátrixa, **ü** a gyorsulás, és ρ a tömegsűrűség. A virtuális munka elve szerint *a kinematikailag lehetséges elmozdulások közül az lesz az adott lineáris rugalmasságtani feladat megoldása, amelyik teljesíti a virtuális munka elvét.*

6.3.1 Lineáris háromszögelem

A lineáris háromszögelem a végeselem módszer első és legegyszerűbb elemtípusa, amit *Turner* és szerzőtársai publikáltak [1] még 1956-ban. Háromszögekből álló hálózattal szinte bármilyen alakzatot jól le lehet fedni és a görbe határvonalakon az elemméret csökkentésével elfogadható szintre lehet csökkenteni a geometria hibát. Egy elemhálózat és egy elem látható a 6.3 ábrán. A csomópontok a háromszög sarokpontjai. A hálózatban egy csomóponthoz tetszőleges számú elem sarokpont csatlakozhat.



6.3 ábra. Lineáris háromszögelem

A 6.3 ábrán látható elem egy csomópontjának szabadságfoka $n = 2$, a két elmozdulás koordináta (u_x és u_y), és egy elem szabadságfoka a három csomópontban az elmozdulások száma, $N = 6$. A csomópontok számozása mindig az óramutató járásával ellentétes. Az elemek alakja elvileg tetszőleges, de célszerű, ha egyik szög sem tompaszög. Egy elemhez tartozó összes elmozdulás jellemző - a szabadságfokok - mátrixa legyen

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_1 \\ \mathbf{\Delta}_2 \\ \mathbf{\Delta}_3 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times1)_i}{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{bmatrix}, \; i = 1, 2, 3. \tag{6.10}$$

A háromszögelem egy belső pontjában az elmozdulás koordinátákat az egyelőre ismeretlen $\mathbf{U}^{\mathrm{e}}$ csomóponti szabadságfokokból a következő interpolációval határozzuk meg:

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_{xi} N_i(x,y), \quad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_{yi}(t) N_i(x,y),$$

vagy ugyanez a (3.4) mátrix szorzat formájában felírva:

$$\underset{(2\times1)}{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \underset{(2\times6)}{\mathbf{N}} \underset{(6\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}}, \quad \underset{(2\times6)}{\mathbf{N}} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array}\right]. \tag{6.11}$$

Az N_i interpolációs, vagy formafüggvények az x és y koordináták lineáris függvényei:

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad i = 1, 2, 3.$$

Az interpolációs függvényekben lévő kilenc együtthatót a sarokponti értékekből határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} &N_1(x_1,y_1) = 1, \; N_1(x_2,y_2) = 0, \; N_1(x_3,y_3) = 0, \\ &N_2(x_1,y_1) = 0, \; N_2(x_2,y_2) = 1, \; N_2(x_3,y_3) = 0, \\ &N_3(x_1,y_1) = 0, \; N_3(x_2,y_2) = 0, \; N_1(x_3,y_3) = 1. \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer megoldása után a három formafüggvény együtthatóit kifejezhetjük az elem sarokpontjainak koordinátáival:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A_e}\left[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right], \\ N_2 &= \frac{1}{2A_e}\left[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right], \\ N_3 &= \frac{1}{2A_e}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_3)y\right], \\ 2A_e &= (x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1. \end{aligned} \tag{6.12}$$

ahol A_e a háromszög területe. Ezek a lineáris interpolációs függvények láthatóak az 6.4 ábrán. A formafüggvények értéke zérus a csomópontokban, kivéve azt az egyet,

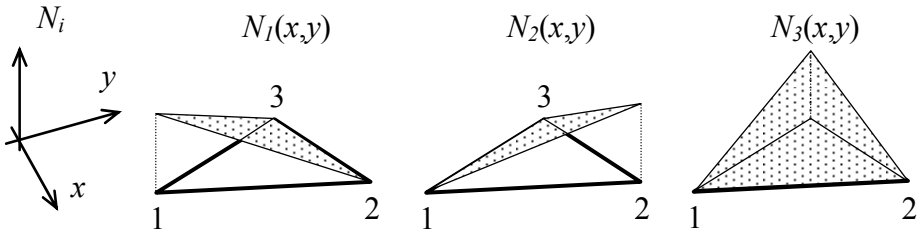
aminek a sorszáma megegyezik a függvény sorszámával, ezt nevezik „*delta függvény*” tulajdonságnak:

$$N_i\left(x_j, y_j\right) = 0 \text{ ha } i \neq j, \text{ és } N_i\left(x_i, y_i\right) = 1 . \tag{6.13}$$

Az (6.12) interpolációs függvények teljesítik a 3.1.1 fejezetben megfogalmazott feltételeket. Belátható, hogy ha a csomópontokban egy merevtestszerű mozgásának megfelelő értékeket adunk meg, akkor a belső pontok is követik ezt a mozgást. Például, az x irányú d eltolódás esetén $u_{x1} = u_{x2} = u_{x3} = d$ és az (6.11) alakú interpolációból egy belső pont x irányú mozgása:

$$u_x\left(x, y\right) = d\sum_{i=1}^{3} N_i\left(x, y\right) = d \ , \qquad \sum_{i=1}^{3} N_i\left(x, y\right) = 1 .$$

Rövid számolással igazolható, hogy hasonló eredményre jutunk más jellegű merevtest mozgás vagy forgás estén is.



6.4 ábra. A lineáris interpolációs függvények

6.3.1.1 Területkoordináták

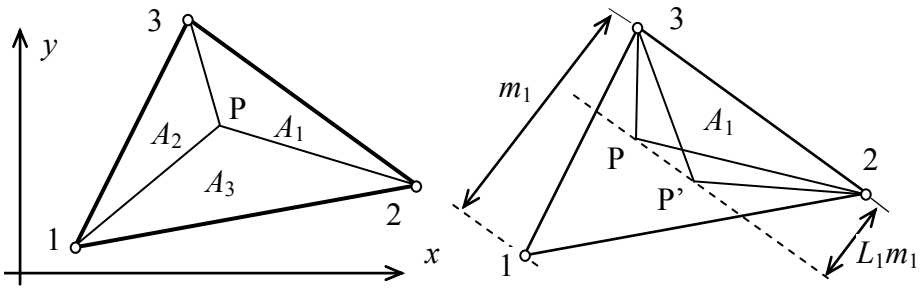
Az interpolációs függvények megszerkesztésének egy másik lehetősége a háromszög területkoordináták alkalmazása. Az 5.5 ábra jelöléseivel, egy belső P pont területkoordinátái a rész-háromszögek és az egész háromszög területének arányai:

$$L_1 = \frac{A_1}{A_e} \ , \quad L_2 = \frac{A_2}{A_e}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A_e} . \tag{6.14}$$

A síkban egy pont helyzetét két koordináta határozza meg, ezért a három területkoordináta nyilván nem lehet független:

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1}{A_e} + \frac{A_2}{A_e} + \frac{A_3}{A_e} = 1 .$$

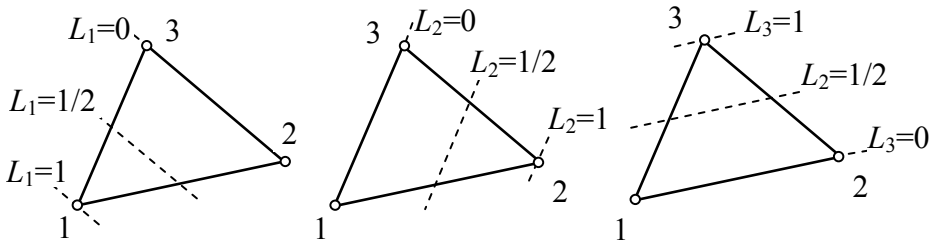
A hároszögkoordináták egyik fontos tulajdonsága látható az 6.5 ábrán. Az 1 csomóponttal szemben lévő 2-3 oldallal párhuzamos egyenesen lévő P és P’ pontok L_1 koordinátája azonos, a 2-3 oldaltól mért merőleges távolságuk $L_1 m_1$. Az L_1 = *állandó* koordináta vonalak a 2-3 oldallal párhuzamos egyenesek.



6.5 ábra. Háromszög területkoordináták.

Hasonló megállapítások vonatkoznak az L_2 és L_3 koordinátákra. Ezeket a koordináta vonalakat mutatja az 6.6 ábra. Ha a P pont egybeesik valamelyik csomóponttal, akkor a megfelelő területkoordináta egységnyi, a többi zérus, például a 2 pontban $L_1 = 0$, $L_2 = 1$, $L_3 = 0$. A háromszög középpontjának területkoordinátái: $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$. Látható, hogy a terület koordináták teljesítik a formafüggvényektől elvárt (6.13) „*delta függvény*" tulajdonságot. Ez alapján, és a 6.4 és 6.6 ábra összehasonlításával belátható, hogy az (5.12) lineáris interpolációs függvények megegyeznek a területkoordinátákkal:

$$N_1 = L_1 \ , \quad N_2 = L_2 \ , \quad N_3 = L_3 \, . \tag{6.15}$$



6.6 ábra. Területkoordináta vonalak.

A területkoordináták használatának előnyei igazán a magasabb fokszámú interpolációs függvények megszerkesztése során jelentkeznek.

6.3.1.2 Elemmátrixok

Az interpolációs függvények meghatározása után kiszámíthatjuk a 6.1 virtuális munka elvben szereplő mennyiségeket. A (6.2) alakváltozások

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \ , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3} u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \ ,$$

$$\gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(u_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y} + u_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) ,$$

ami a (6.12) interpoláció helyettesítése után átrendezhető a (6.5) mátrix szorzat formájába:

$$\underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underset{(3\times6)}{\mathbf{B}} \; \underset{(6\times1)}{\mathbf{U}}{}^{e} ,$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A_e} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_3 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_3 & y_1 - y_2 \end{array} \right] . \tag{6.16}$$

Látható, hogy az alakváltozások elemenként állandóak, ezért nevezik ezt az elemtípust „*constant strain triangle*”, vagy CST elemnek is.

Most azt is ellenőrizhetjük, hogy a csomópontok merevtestszerű mozgása közben nincs alakváltozás. Például az 1 csomópont körüli kicsi α forgás esetén az 5.3 ábra adatival a csomóponti mozgások

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{U}}{}^{e} = \alpha \left[0 \quad 0 \;\vdots\; (y_1 - y_2) \quad (x_2 - x_1) \;\vdots\; (y_1 - y_3) \quad (x_3 - x_1) \right]^T ,$$

és az ε_x fajlagos nyúlás az (6.13) szorzatból:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A_e} \left[(y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \right] = 0 ,$$

Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ többi elemére is zérus adódik.

A (2.10) *Hooke* törvény alapján az elemenként állandó (6.1) feszültségek:

$$\underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^{e} = \underset{(3\times3)}{\mathbf{C}} \left(\underset{(3x6)}{\mathbf{B}} \; \underset{(6\times1)}{\mathbf{U}^e} - \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}^*} \right) . \tag{6.17}$$

Az előzőek alapján a virtuális elmozdulás és a virtuális alakváltozás:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\delta\mathbf{U}^e , \qquad \delta\mathbf{u}^T = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N}^T ,$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\delta\mathbf{U}^e , \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{B}^T .$$

<u>Merevségi mátrix:</u> A (6.9) első tagja a virtuális alakváltozási energia,

$$\delta U = \int_{Ve} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\,\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV = \int_{Ve} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,dV =$$

$$\delta\mathbf{U}^{eT} \int_{Ve} \mathbf{B}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}\,dV\;\mathbf{U}^e = \delta\mathbf{U}^{eT}\,\underset{(6\times6)}{\mathbf{k}^e}\,\mathbf{U}^e ,$$

ahol $\mathbf{k}^e$ jelöli az elem (3.6) merevségi mátrixát. Mivel a (6.16) **B** mátrix elemei és az elem *t* vastagsága is állandó, az integrálás eredménye:

$$\underset{(6\times6)}{\mathbf{k}^e} = \int_{Ve} \mathbf{B}^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}\;dV = \underset{(6\times3)}{\mathbf{B}^T}\,\underset{(3\times3)}{\mathbf{C}}\,\underset{(3\times6)}{\mathbf{B}}\,tA_e , \tag{6.18}$$

ahol a **C** mátrix a (6.4) vagy a (6.8) szerinti. A merevségi mátrix a lineáris háromszögelem esetén pontosan kiszámítható.

Tömegmátrix: Dinamikai feladatokban az $\mathbf{U}^e$ csomóponti mozgások az idő függvényében változnak. Az (5.9) elvben a tehetetlenségi erők virtuális munkája:

$$\delta T = \int_{Ve} \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} dV = \int_{Ve} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV =$$

$$\delta \mathbf{U}^{eT} \int_{Ve} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, dV\ \ddot{\mathbf{U}}^e = \delta \mathbf{U}^{eT} \underset{(6\times6)}{\mathbf{m}^e}\ \ddot{\mathbf{U}}^e\ ,$$

ahol $\mathbf{m}^e$ az elem (3.8) konzisztens tömegmátrixa:

$$\underset{(6\times6)}{\mathbf{m}^e} = \int_{Ve} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, dV = \frac{\rho t A_e}{12} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]. \tag{6.19}$$

A konzisztens mátrix helyett gyakran célszerűbb a diagonál szerkezetű -*lumped* - tömegmátrix alkalmazása. Ha a tA_e térfogatú háromszögelem tömegét szétosztjuk a csomópontokba, akkor a tömegmátrix:

$$\underset{(6\times6)}{\mathbf{m}^e} = \frac{\rho t A_e}{3} \underset{(6\times6)}{\mathbf{E}}\ , \tag{6.20}$$

ahol **E** az egységmátrix.

Tehermátrix: A (6.9) elv utolsó három tagjából számolható az elem $\mathbf{p}^e$ tehermátrixa:

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{C}\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}\ dV + \int_{Ap} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u}\ dA + \int_V \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u}\ dV =$$

$$\delta \mathbf{U}^{eT} \left[\int_{Ve} \mathbf{B}^T\ \mathbf{C}\ \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} dV + \int_{Aep} \mathbf{N}^T\ \mathbf{p}\ dA + \int_{Ve} \mathbf{N}^T\ \mathbf{q}\ dV \right] = \delta \mathbf{U}^{eT} \underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e}\ .$$

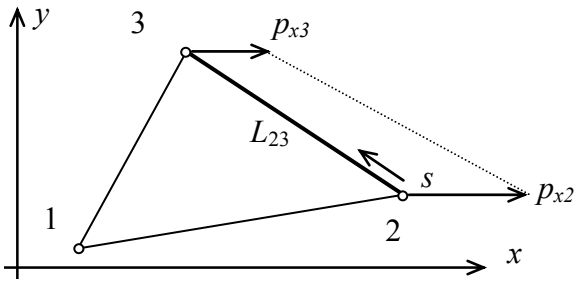
Az első integrál a hőmérséklet változásából származó teher mátrix, aminek eredménye egyszerűen felírható, ha az csak állandó mennyiségeket tartalmaz:

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e} = \int_{Ve} \underset{(6\times3)}{\mathbf{B}^T}\ \underset{(3\times3)}{\mathbf{C}}\ \underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}}\ dV = tA_e \underset{(6\times3)}{\mathbf{B}^T}\ \underset{(3\times3)}{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \alpha \Delta T_0 \\ \alpha \Delta T_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol ΔT_0 jelöli az elemenként állandó hőmérsékletváltozást és anyagjellemzők C mátrixa a síkfeszültségi vagy a síkalakváltozási modelltől függően a (6.4) vagy a (6.8) szerinti Az elemenként állandó q_x, q_y térfogati erőhatásból származó teher-mátrix:

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e} = \int_{Ve} \underset{(6\times2)}{\mathbf{N}}^T \underset{(2\times1)}{\mathbf{q}}\, dV = \frac{tA_e}{3}\left[q_x \quad q_y \mid q_x \quad q_y \mid q_x \quad q_y\right]^T .$$

Az állandó térfogati erő három azonos nagyságú csomóponti erőt eredményez.



6.7 ábra. Lineárisan változó peremterhelés

A p_x, p_y felületi megoszló terhelésből csak akkor származik elemterhelés, ha a háromszög valamelyik oldaléle az egész modell külső és terhelt felületén van. Most legyen ez az elem 2-3 oldala, amint azt az 6.7 ábra is mutatja. Az oldal hossza L_{23} és x irányú, lineárisan változó megoszló erőrendszer terhelési. A 2-3 vonal mentén az x irányú mozgás is és a terhelés is az s ívhossz koordináta lineáris függvénye:

$$u = u_2\xi + u_3\left(1-\xi\right) , \quad p_x = p_{x2}\xi + p_{x3}\left(1-\xi\right) , \quad \xi = \frac{s}{L_{23}} .$$

A tL_{23} felületen megoszló erőrendszer virtuális munkája:

$$\delta W_k = \int_0^{L_{23}} \delta u\, p_x t ds = \delta u_2 \int_0^1 \xi\left(p_{x2}\xi + p_{x3}\left(1-\xi\right)\right) tL_{23} d\xi +$$

$$+ \delta u_3 \int_0^1 \left(1-\xi\right)\left(p_{x2}\xi + p_{x3}\left(1-\xi\right)\right) tL_{23} d\xi =$$

$$= \delta u_2\left(p_{x2}/3 + p_{x3}/6\right) L_{23}t + \delta u_3\left(p_{x2}/6 + p_{x3}/3\right) L_{23}t .$$

Definíció szerint az elem tehermátrixa:

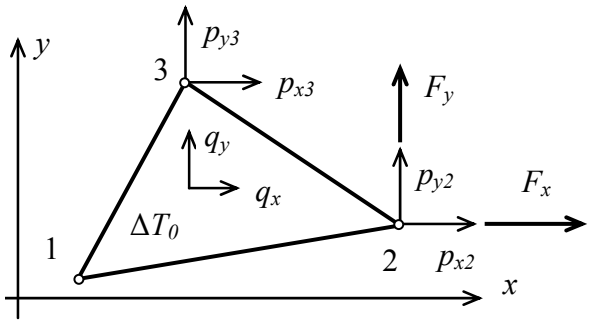
$$\delta W_k = \delta \mathbf{U}^{eT} \underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e}$$

$$\mathbf{p}^e = \frac{L_{23}t}{6}\left[0 \quad 0 \mid \left(2p_{x2} + p_{x3}\right) \quad 0 \mid \left(p_{x2} + 2p_{x3}\right) \quad 0\right]^T .$$

Hasonló módon lehet kiszámítani a további terhelésekből származó elem mátrixokat. Ha a 2-3 oldal mentén a p_x megoszló terhelés állandó, akkor

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e} = \frac{tL_{23}}{2}\left[0 \quad 0 \;\vdots\; p_x \quad 0 \;\vdots\; p_x \quad 0\right]^T .$$

A csomóponti erők statikailag egyenértékűek a megoszló erőrendszerrel.



6.8 ábra. Elemterhelések.

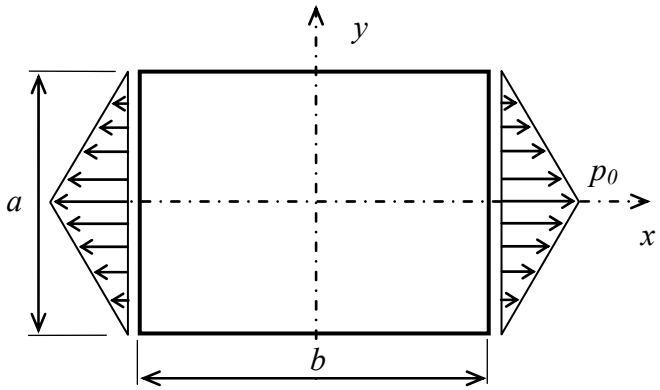
Összefoglalva, a 6.8 ábra szerinti, A_e területű háromszögelem tehermátrixa, ahol az állandó térfogati erők és hőmérsékletváltozás mellett az L_{23} hosszúságú 2-3 oldal mentén változó megoszló terhelések és a 2 csomópontban egy koncentrált erő működik:

$$\underset{(6\times1)}{\mathbf{p}^e} = tA_e \underset{(6\times3)}{\mathbf{B}^T} \underset{(3\times3)}{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \alpha\Delta T_0 \\ \alpha\Delta T_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{tA_e}{3}\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_x \\ q_y \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \frac{tL_{23}}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2p_{x2}+p_{x3} \\ 2p_{y2}+p_{y3} \\ p_{x2}+2p_{x3} \\ p_{y2}+2p_{y3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (6.21)$$

6.3.2 Példa: Sík lemez peremterhelése

A síkfeladatok megoldási módszereinek részleteit tekintsük át a következő, egyszerű feladat kapcsán. A 6.9 ábra szerinti téglalap alakú, állandó t vastagságú síklemezt a két szélén lineárisan változó, megoszló erőrendszer terheli. A vékony lemezre teljesülnek a síkfeszültségi állapot feltételei.

$t = 1$ mm , $a = 10$ mm, $b = 20$ mm , $E = 9600$ MPa, $\nu = 0{,}2$, $p_0 = 120$ MPa.

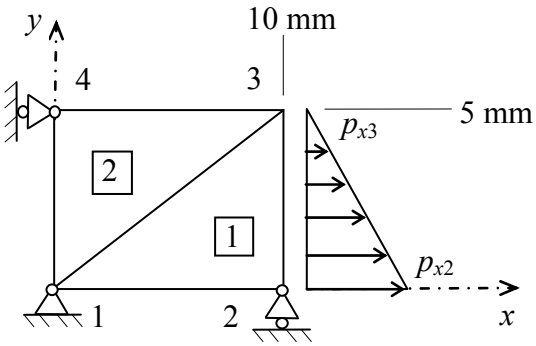


6.9 ábra. Sík lemez változó terheléssel

Mivel a szerkezet is és a terhelés is szimmetrikus, elegendő a lemez 6.10 ábrán látható negyed részét vizsgálni. A szimmetria tengelyek mentén olyan kinematikai kényszereket kell elhelyezni, amelyek biztosítják a szimmetrikus alakváltozásokat, pótolják az elhagyott részek hatását. A terhelés során a szimmetria tengelyek egyenesek és szimmetria tengelyek maradnak. A megmaradó egynegyed részt osszuk fel két lineáris háromszög elemre. A számítási modell csomópontjainak száma 4, az összes szabadságfokok száma pedig 8.

Az elemszintű számításokban a csomópontok lokális sorszámozása 1, 2 és 3. A lokális és a modellben alkalmazott globális csomópontszámozást az alábbi táblázat rendeli egymáshoz:

elem	*lok.1*	*lok.2*	*lok.3*
1	1	2	3
2	1	3	4



6.10 ábra. Végeselem modell.

Az anyagjellemzők (6.4) mátrixa

$$\mathbf{C}=\frac{\mathrm{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}=10^4\begin{bmatrix}1 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}4\end{bmatrix}.$$

Az 1 elem területe A_1 = 25 mm^2, csomópontjainak koordinátái (a továbbiakban alkalmazott mértékegységek mm, N, MPa)

$$x_1=0,\ y_1=0,\ x_2=10,\ y_2=0,\ x_3=10,\ y_3=5,$$

és a (6.16) alakváltozási mátrix:

$$\mathbf{B}^1=\frac{1}{2A_e}\left[\begin{array}{cc|cc|cc}y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0\\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_3\\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_3 & y_1-y_2\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{50}\left[\begin{array}{cc|cc|cc}-5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 10\\ 0 & -5 & -10 & 5 & 10 & 0\end{array}\right].$$

A (6.18) merevségi mátrix:

$$\underset{(3\times3)}{\mathbf{C}}\ \underset{((3\times6))}{\mathbf{B}^1}=200\left[\begin{array}{cc|cc|cc}-5 & 0 & 5 & -2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1 & -10 & 0 & 10\\ 0 & -2 & -4 & 2 & 4 & 0\end{array}\right],$$

$$\mathbf{k}^1=\mathbf{B}^{1T}\mathbf{C}\mathbf{B}^1A_1\ t=$$

$$=100\left[\begin{array}{cc|cc|cc}25 & 0 & -25 & 10 & 0 & -10\\ 0 & 10 & 20 & -10 & -20 & 0\\ \hline -25 & 20 & 65 & -30 & -40 & 10\\ 10 & -10 & -30 & 110 & 20 & -10\\ \hline 0 & -20 & -40 & 20 & 40 & 0\\ -10 & 0 & 10 & -10 & 0 & 100\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{k}^1_{1,1} & \mathbf{k}^1_{1,2} & \mathbf{k}^1_{1,3}\\ \mathbf{k}^1_{2,1} & \mathbf{k}^1_{2,2} & \mathbf{k}^1_{2,3}\\ \mathbf{k}^1_{3,1} & \mathbf{k}^1_{3,2} & \mathbf{k}^1_{3,3}\end{bmatrix}.$$

Az elem (6.21) tehervektora: L_{23} = 5 mm és p_{x2} = 120 N/mm, p_{x3} = 0:

$$\underset{(6\text{x}1)}{\mathbf{p}^1}=\frac{L_{23}}{6}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \hline 2p_{x2}+p_{x3}\\ 0\\ \hline p_{x2}+2p_{x3}\\ 0\end{bmatrix}=100\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \hline 2\\ 0\\ \hline 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}^1_1\\ \mathbf{p}^1_2\\ \mathbf{p}^1_3\end{bmatrix}.$$

Megjegyzés: A különböző programrendszereknél figyelni kell arra, hogy mi a p megoszló terhelés értelmezése. Egyes esetekben ez a t vastagságú peremfelületen megoszló erőrendszer, míg más rendszerekben a középfelületen lévő peremgörbe mentén megoszló erőrendszerként használják.

A 2 elem területe $A_2 = 25\ \text{mm}^2$, csomópontjainak koordinátái (az 1, 2 és 3 a lokális csomópontok!)

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ x_2 = 10,\ y_2 = 5,\ x_3 = 0,\ y_3 = 5,$$

és az (6.16) alakváltozási mátrix

$$\underset{(3\text{x}6)}{\mathbf{B}^2} = \frac{1}{50}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 0 & 5 & 10 & -5 \end{array}\right].$$

A 2 elem merevségi mátrixa:

$$\mathbf{CB}^2 = 200\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -2 & 5 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{B}^{2T}\mathbf{CB}^2 A_2 t =$$

$$= 100\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 40 & 0 & 0 & -20 & -40 & 20 \\ 0 & 100 & -10 & 0 & 10 & -100 \\ \hline 0 & -10 & 25 & 0 & -25 & 10 \\ -20 & 0 & 0 & 10 & 20 & -10 \\ \hline -40 & 10 & -25 & 20 & 65 & -30 \\ 20 & -100 & 10 & -10 & -30 & 110 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^2_{1,1} & \mathbf{k}^2_{1,3} & \mathbf{k}^2_{1,4} \\ \mathbf{k}^2_{3,1} & \mathbf{k}^2_{2,3} & \mathbf{k}^2_{3,4} \\ \mathbf{k}^2_{4,1} & \mathbf{k}^2_{4,3} & \mathbf{k}^2_{4,4} \end{bmatrix}.$$

A 2. elemre nem működik külső terhelés, a $\mathbf{p}^2$ tehervektor zérus.

A következő lépés a (3.10) rendszer mátrixok összeállítása. Az elem merevségi mátrixok almátrixainak indexei - a globális csomópont számok - megmutatják az adott almátrix helyét a rendszer merevségi mátrixban.

$$\underset{(8\text{x}8)}{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^1_{1,1} + \mathbf{k}^2_{1,1} & \mathbf{k}^1_{1,2} & \mathbf{k}^1_{1,3} + \mathbf{k}^2_{1,3} & \mathbf{k}^2_{1,4} \\ & \mathbf{k}^1_{2,2} & \mathbf{k}^1_{2,3} & 0 \\ \textit{szimm.} & & \mathbf{k}^1_{3,3} + \mathbf{k}^2_{3,3} & \mathbf{k}^2_{3,4} \\ & & & \mathbf{k}^2_{4,4} \end{bmatrix} =$$

$$= 100\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 65 & 0 & -25 & 10 & 0 & -30 & -40 & 20 \\ & 110 & 20 & -10 & -30 & 0 & 10 & -100 \\ \hline & & \mathbf{65} & -30 & \mathbf{-40} & \mathbf{10} & 0 & \mathbf{0} \\ & & & 110 & 20 & -100 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \mathbf{65} & \mathbf{0} & -25 & \mathbf{10} \\ & & & & & \mathbf{110} & 20 & \mathbf{-10} \\ \hline & & & & & & 65 & -30 \\ & & & & & & & \mathbf{110} \end{array}\right].$$

A rendszer összegzett tehermátrixa:

$$\underset{(8x1)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^1 \\ \mathbf{p}_2^1 \\ \mathbf{p}_3^1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = 100\left[0 \quad 0 \;\vdots\; 2 \quad 0 \;\vdots\; 1 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad 0\right]^T .$$

Az 5.10 ábra szerint a kinematikai peremfeltételek a következők: $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = 0$, ezért a rendszer mátrixok 1., 2., 4. és 7. sorait, oszlopait törölni kell. Ezek után a megmaradó négy, még ismeretlen mozgásra vonatkozó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 65 & -40 & 10 & 0 \\ -40 & 65 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 110 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Az egyenletrendszer megoldását kiegészítve az előbb felsorolt előírt mozgásokkal, felírhatjuk az egész modell csomóponti elmozdulásainak mátrixát:

$$\underset{(8x1)}{\mathbf{U}} = 10^{-3}\left[0 \quad 0 \;\vdots\; 67{,}3 \quad 0 \;\vdots\; 57{,}7 \quad -6{,}65 \;\vdots\; 0 \quad -5{,}85\right]^T \text{ (mm)} .$$

A csomóponti mozgások ismeretében felírhatjuk az $\mathbf{U}^1$ és $\mathbf{U}^2$ elemmozgás mátrixokat, majd a (6.17) felhasználásával ki lehet számolni az egyes elemekben a feszültségeket.

Az 1 elemre a három feszültség koordináta számított értékei:

$$\underset{(3x1)}{\boldsymbol{\sigma}^1} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underset{(3x3)}{\mathbf{C}}\,\underset{(3x6)}{\mathbf{B}^1}\,\underset{(6x1)}{\mathbf{U}^1} =$$

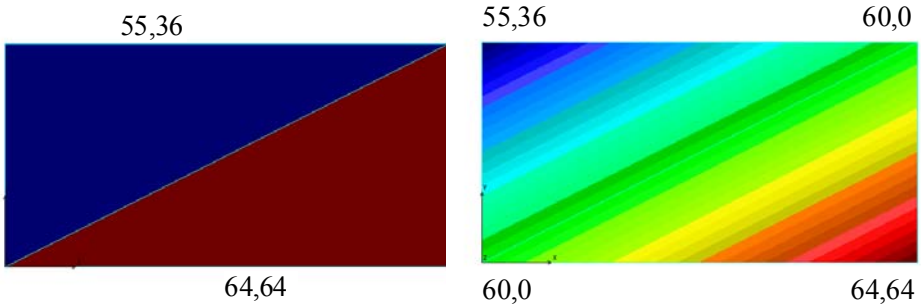
$$= 200\begin{bmatrix} -5 & 0 & \vdots & 5 & -2 & \vdots & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \vdots & 1 & -10 & \vdots & 0 & 10 \\ 0 & -2 & \vdots & -4 & 2 & \vdots & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 67{,}3 \\ 0 \\ 57{,}7 \\ -6{,}65 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 64{,}64 \\ 0{,}16 \\ -7{,}68 \end{bmatrix} \text{ (MPa)} .$$

Hasonló módon a 2 elemre:

$$\underset{(3x1)}{\boldsymbol{\sigma}^2} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underset{(3x3)}{\mathbf{C}} \underset{(3x6)}{\mathbf{B}^2} \underset{(6x1)}{\mathbf{U}^2} =$$

$$= 200 \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -2 & 5 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & -1 & 10 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 57,7 \\ -6,65 \\ 0 \\ -5,85 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 55,36 \\ -0,16 \\ -0.32 \end{bmatrix} \text{(MPa)}.$$

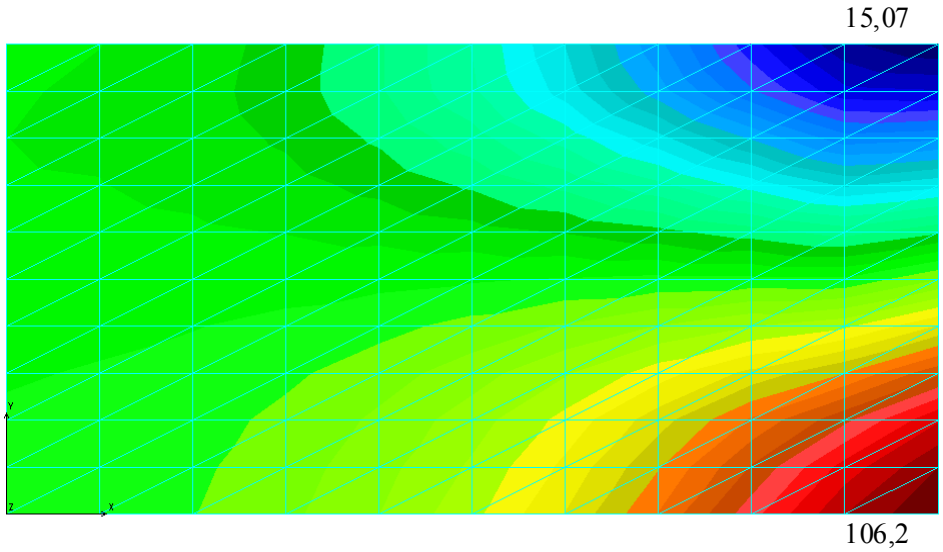
A kiszámított feszültségek elemenként állandóak, ami most igen erős közelítés. A feszültség eloszlás *simítására* és a folytonosság látszólagos helyreállítására több eljárás is ismert, ezek közül a legegyszerűbb módszer a csomóponti átlagolás. Ennek eredményét mutatja a 6.11. ábra.



6.11 ábra A σ_x feszültség számított és simított eloszlásai (MPa)

A megoldás pontosságát az elemszám növelésével növelhetjük. A 6.12 ábrán látható a σ_x feszültség eloszlást egyenletes, 10x10 elemszámú hálózat alkalmazása esetén.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME



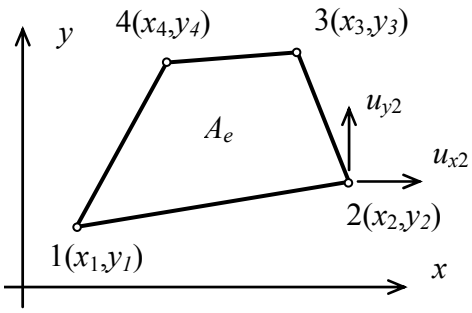
6.12 ábra. A σ_x feszültség simított eloszlása (MPa)

A számítási hiba mértékét jól jellemzi az (1.15) dinamikai peremfeltétel - a peremterhelés - adott és számított értékeinek eltérése. A 6.10 ábrán a 2 csomópontban a külső terhelés adott értéke p_0 = 120 MPa, ugyanitt a 6.12 ábra szerint a számított σ_x = 106,2 MPa, a hiba több, mint 10%. A mozgások hibája általában ennél kisebb. Az elmozdulás módszer jellemzője, hogy az elmozdulások hibája mindig kisebb, mint az ezekből számolt belső erők, feszültségek, reakcióerők hibája. A százalékos hibamértékek eltérése közelítőleg egy nagyságrend, vagyis 1% elmozdulás hiba esetén a feszültségek várható hibájának nagyságrendje 10% körüli.

6.3.3 Lineáris négyszög elem

Az egyszerű, lineáris háromszögelem hátránya, - amint azt az előzőekben láttuk - hogy a feszültség eloszlásokat elemenként állandó értékekkel közelíti. Ez, különösen a feszültségkoncentrációk környezetében igen sok és kicsi elem alkalmazását igényli. A közelítő függvények fokszámának növelése az elem szabadságfok növelését jelenti, ami együtt jár az elem csomópont számának növelésével.

A háromszög alak mellett a másik lehetséges egyszerű elemforma a négyszög. A szabályos, derékszögű négyszög, bár kezelése és leírása igen egyszerű, a bonyolultabb, görbe vonalakkal határolt tartományok pontatlan lefedése miatt gyakorlatilag nem alkalmazható.



6.13 ábra. A lineáris négyszög elem

A 6.13 ábrán látható a négy csomópontos általános négyszög alakú elem. Egy csomópont szabadságfoka n = 2, az elem összes szabadságfokainak száma a négy csomópontban az elmozdulások száma, N = 8. A szabálytalan alak következtében most már nem olyan egyszerű a formafüggvények felírása és az elem tartományára vonatkozó integrálási műveletek elvégzése. Ezen segít a konform leképezés technikájának alkalmazása.

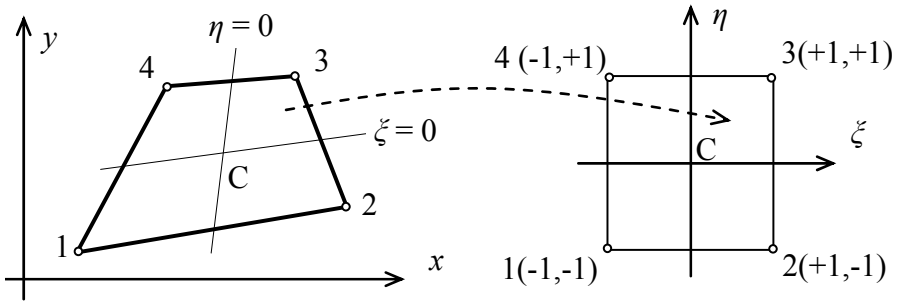
6.3.3.1 A konform leképezés

A 6.14 ábrán látható egy négyszög elem a globális x, y koordináta rendszerben és egy szabályos négyzet, az *alapelem* a ξ, η rendszerben. Az alapelem sarokpontjainak koordinátái a ±1 dimenziótlan egység. A két alakzat közötti kapcsolat - a *leképezés* - konform, ha az egyértékű, továbbá, ha a belső pont belső pont marad, az egyenes oldalon lévő pont az egyenes oldalon marad és a körüljárás nem változik. A feltételeket teljesítő, legegyszerűbb, lineáris kapcsolat a két koordináta rendszer között:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i \ , \quad y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i \ , \tag{6.22}$$

ahol az N_i függvények a bilineáris *Lagrange* polinomok:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \ , \quad N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4 \ , \\ N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)/4 \ , \quad N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4 \ . \end{aligned} \tag{6.23}$$



6.14 ábra. Koordináta leképezése

A leképzés megszerkesztése után, az elemmátrixok meghatározásához két további részfeladat végrehajtását kell tisztázni, a deriváltak és az elem területére vonatkozó integrálok kiszámításának módszerét.

Egy kétváltozós f függvényt - a (6.23) leképzés felhasználásával - felírhatunk az x, y vagy a ξ, η koordinátákkal is, $f(x,y)$ vagy $f(\xi,\eta)$ formában. A különböző koordináták szerinti parciális deriváltak kapcsolata a jól ismert láncszabály felhasználásával:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\,,$$

vagy ugyanez mátrix szorzat formájában:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\underset{(2\times 2)}{\mathbf{J}}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}\,,$$

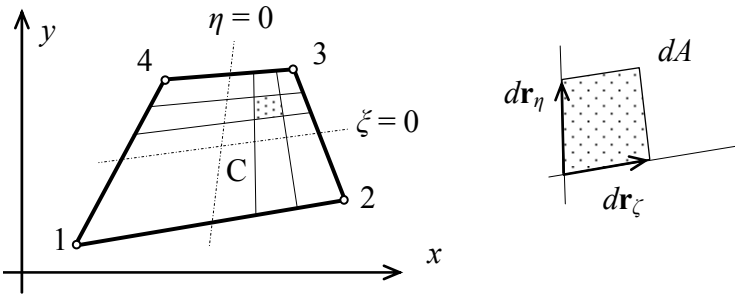
$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\,. \tag{6.24}$$

A **J** a leképezés *Jakobi* mátrixa. Ha a leképezés konform, akkor a *Jakobi* mátrix invertálható, és a deriváltok inverz kapcsolata egyértelműen meghatározható:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\end{bmatrix}\,, \qquad \mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{J}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

A J jelöli a **J** mátrix determinánsát. A *Jakobi* mátrix elemei a (6.22) leképezés és a (6.23) interpoláció ismeretében számolhatóak, például az első sor elemei a következők:

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \ , \quad J_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad .$$



6.15 ábra. Felületelem.

Az x, y síkon értelmezett integrálok kiszámításához először meg kell határozni az elem alakjához illeszkedő dA felületelemet. A 6.15 ábra jelöléseivel, a ξ és η = állandó koordináta vonalakkal lehatárolt felületelem dA területe a

$$d\mathbf{r}_\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} d\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T d\xi \ , \quad d\mathbf{r}_\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T d\eta$$

vektorok vektoriális szorzatának abszolút értéke:

$$dA = \left| d\mathbf{r}_\xi \times d\mathbf{r}_\eta \right| = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta = J d\xi d\eta \ ,$$

ahol J jelöli a (6.24) **J** *Jakobi* mátrix determinánsát. Ha a leképezés konform, akkor $J > 0$. Ezek után egy kétváltozós, a ξ és η koordinátákkal adott f függvény integrálja az elem A_e területén:

$$\int_{A_e} f \ dA = \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} f \ J d\xi d\eta \ . \tag{6.26}$$

6.3.3.2 Elemmátrixok

A 6.13 ábrán látható négyszög elem egy csomópontjának szabadságfoka n = 2, a két elmozdulás koordináta (u_x és u_y), és egy elem szabadságfoka a négy csomópontban az elmozdulások száma, N = 8. A csomópontok számozása mindig az

óramutató járásával ellentétes. Egy elemhez tartozó összes elmozdulás jellemző, az elem szabadságfokok mátrixa:

$$\underset{(8\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_1 \\ \mathbf{\Delta}_2 \\ \mathbf{\Delta}_3 \\ \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{(2\times1)_i}{\mathbf{\Delta}} = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{bmatrix}, \; i = 1, 2, 3, 4. \tag{6.27}$$

Az elem egy belső pontjában az elmozdulás koordinátákat a csomóponti mozgásokból az (5.23) bilineáris interpolációval határozhatjuk meg:

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_{xi} N_i(x,y), \quad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_{yi}(t) N_i(x,y),$$

vagy ugyanez a (3.4) mátrix szorzat formájában felírva:

$$\begin{aligned} \underset{(2\times1)}{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \underset{(2\times8)}{\mathbf{N}} \, \underset{(8\times1)}{\mathbf{U}^{\mathrm{e}}}, \\ \underset{(2\times8)}{\mathbf{N}} &= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Megjegyzés: Azokat az elemeket, melyeknél a geometriát (a 6.14 ábra szerinti leképezést) és a fizikai változókat (most az u_x, u_y elmozdulásokat) ugyanazokkal az interpolációs függvényekkel közelítjük, *izoparametrikus* elemeknek nevezzük. Ha a geometria és a fizikai változók interpolációinak fokszáma eltérő, akkor az elem *superparametrikus*, vagy *subparametrikus*.

A (6.23) formafüggvények teljesítik a (6.13) „*delta függvény*” követelményt, mivel értékük zérus a csomópontokban, kivéve azt az egyet, aminek a sorszáma megegyezik a függvény sorszámával. Továbbá teljesítik a 3.1.1 fejezetben megfogalmazott feltételt is, ami szerint a merevtest szerű mozgást végző elemnek nincsen alakváltozása. Egyszerűen ellenőrizhető, ha a csomópontokban egy merevtestszerű mozgásának megfelelő értékeket adunk meg, akkor a belső pontok is követik ezt a mozgást. Például, az y irányú d mértékű eltolódás esetén $u_{y\mathrm{i}} = d$ és az (6.28) interpolációból egy belső pont y irányú mozgása:

$$u_y(x,y) = d\sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) = d, \qquad \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) = 1.$$

Igazolható, hogy hasonló eredményre jutunk más jellegű merevtest mozgás vagy forgás estén is.

Az (6.28) elmozdulás interpoláció meghatározása után kiszámíthatjuk az (6.1) virtuális munka elvben szereplő mennyiségeket. A (6.2) alakváltozások

$$\underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{bmatrix},$$

ami a (6.25) láncszabály felhasználásával átrendezhető a szokásos (3.5) mátrix szorzat alakra:

$$\underset{(3\times1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial \xi \\ \partial u_x / \partial \eta \\ \partial u_y / \partial \xi \\ \partial u_y / \partial \eta \end{bmatrix} = \underset{(3\times8)}{\mathbf{B}_e} \underset{(8\times1)}{\mathbf{U}^e}. \quad (6.29)$$

Látható, hogy a **B** alakváltozási mátrixban a *Jacobi* mátrix elemei is megjelennek.

<u>Merevségi mátrix:</u> Az (5.9) első tagja a virtuális alakváltozási energia,

$$\delta U = \int_{Ve} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\, \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \delta \mathbf{U}^{eT} \int_{Ve} \mathbf{B}^T\, \mathbf{C}\, \mathbf{B}\, dV\, \mathbf{U}^e = \delta \mathbf{U}^{eT} \underset{(8\times8)}{\mathbf{k}^e}\, \mathbf{U}^e\ ,$$

ahol $\mathbf{k}^e$ jelöli az elem (3.6) merevségi mátrixát:

$$\underset{(8\times8)}{\mathbf{k}^e} = \int_{Ve} \mathbf{B}^T\, \mathbf{C}\, \mathbf{B}\, dV = \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \underset{(8\times3)}{\mathbf{B}^T}\, \underset{(3\times3)}{\mathbf{C}}\, \underset{(3\times8)}{\mathbf{B}}\, t\, J d\xi d\eta\,, \quad (6.30)$$

ahol t az elem vastagsága és a **C** mátrix a (6.4) vagy a (6.8) szerinti. Az elem $V_e = tA_e$ tartományára vonatkozó integrál átalakításánál felhasználtuk az (5.26) formulát.

<u>Tömegmátrix:</u> A (6.9) elvben a tehetetlenségi erők virtuális munkája:

$$\delta T = \int_{Ve} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV = \delta \mathbf{U}^{eT} \int_{Ve} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, dV\, \ddot{\mathbf{U}}^e = \delta \mathbf{U}^{eT} \underset{(8\times8)}{\mathbf{m}^e}\, \ddot{\mathbf{U}}^e\ ,$$

ahol $\mathbf{m}^e$ az elem (3.8) konzisztens tömegmátrixa:

$$\underset{(8\times8)}{\mathbf{m}^e} = \int_{Ve} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, dV = \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \rho\, \underset{(8\times2)}{\mathbf{N}^T}\, \underset{(2\times8)}{\mathbf{N}}\, t\, J d\xi d\eta\,. \quad (6.31)$$

A (6.30) és (6.31) elem integrálok kiszámítása csak közelítő, numerikus eljárással lehetséges. Ugyanis, a (6.29) **B** alakváltozási mátrix elemei tört függvények, ami zárt alakban nem integrálható.

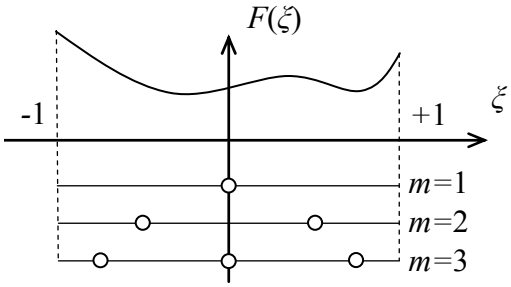
6.3.3.3 Numerikus integrálás

Az izoparametrikus elemek mátrixainak kiintegrálásához leggyakrabban a *Gauss* féle eljárást (vagy *Gauss - Legendre* quadratura) alkalmazzák.

A *Gauss*-szabály szerint egy egyváltozós függvény integráljának közelítő értéke:

$$I = \int_{-1}^{1} F(\xi)\,d\xi \cong \sum_{i=1}^{m} W_i F(\xi_i), \tag{6.32}$$

ahol ξ_i a mintavételi - vagy *Gauss* pontok - pontok koordinátái *és* W_i a súlyozó faktor. A pontok m számának növelésével a számítás pontossága is növekszik. Ha az F függvény polinom, akkor m pont alkalmazásával kiszámíthatjuk a $p = 2m$-1 fokszámú polinom integráljának pontos értékét. A pontok és súlyozó faktorok értékeit mutatja az 6.16 ábra. További pontokra vonatkozó adatok megtalálhatók a [20], [21] könyvekben.



m	ξ_i	W_i
1	0	2
2	$+1/\sqrt{3}$	1
	$-1/\sqrt{3}$	1
3	$-\sqrt{3/5}$	$5/9$
	0	$8/9$
	$+\sqrt{3/5}$	$5/9$

6.16 ábra. Egydimenziós *Gauss* integrálási séma

A kétváltozós függvény kettős integrálját az (6.32) szabály ismételt alkalmazásával írhatjuk fel:

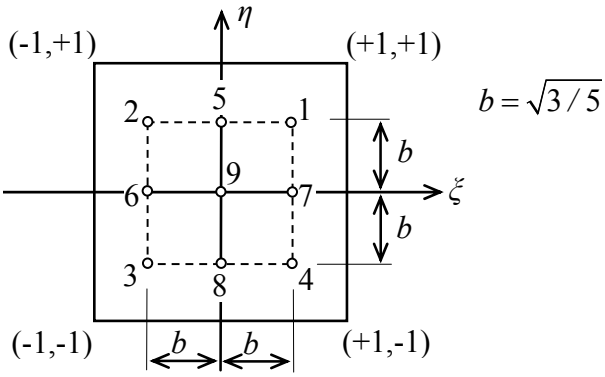
$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} W_i W_j F(\xi_i,\eta_j).$$

Például, az egy *Gauss* pontos integrál

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \cong 4F(0,0),$$

vagy a 6.17 ábra szerinti, 3x3 *Gauss* pont alkalmazásával az integrál közelítő értéke:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F d\xi d\eta \cong \frac{25}{81}(F_1+F_2+F_3+F_4)+\frac{40}{81}(F_5+F_6+F_7+F_8)+\frac{64}{81}F_9.$$



6.17 ábra. A 3x3 *Gauss* integrálási séma

Az ismert végeselem programrendszerek többsége a 2x2 integrálási sémát alkalmazza.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \cong \left(F(b,b)+F(b,-b)+F(-b,-b)+F(-b,+b)\right) ,$$

$$b = 1/\sqrt{3} .$$

A módszer alkalmazásával számítsuk ki például az

$$I = \int_{1}^{3} \frac{1}{\mathrm{x}}\, d\mathrm{x}$$

integrál közelítő értkét. A pontos eredmény ismert, I = ln(3) = 1,098612. Mivel a *Gauss* kvadratúrák határai –1 és +1, vezessünk be egy új változót: ζ = *x*-2, ezzel a kiszámítandó integrál új alakja:

$$I = \int_{1}^{3} \frac{1}{\mathrm{x}}\, d\mathrm{x} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2+\zeta}\, d\zeta .$$

Alkalmazzuk az egy, kettő és három pontos *Gauss* szabályt:

$$I_1 = 2\frac{1}{2} = 1{,}00 , \quad I_2 = 1\frac{1}{2-1/\sqrt{3}} + 1\frac{1}{2+1/\sqrt{3}} = \frac{12}{11} = 1{,}090909 ,$$

$$I_3 = \frac{5}{9}\frac{1}{2-\sqrt{3/5}} + \frac{8}{9}\frac{1}{2} + \frac{5}{9}\frac{1}{2+\sqrt{3/5}} = \frac{168}{153} = 1{,}098039 .$$

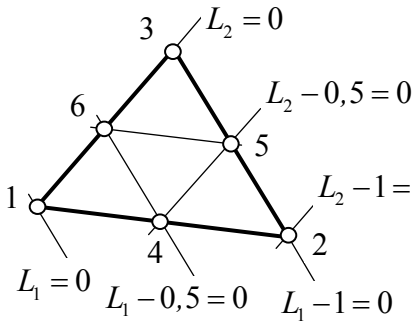
A számítás hibája egyre kisebb, rendre 9,9%, 0,7%, és 0,052%.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

6.4 Magasabbrendű elemek

A közelítő függvények fokszámának növelése az elem szabadságfok növelését jelenti, ami együtt jár a csomópontok számának növelésével.

6.4.1 Háromszög elemek

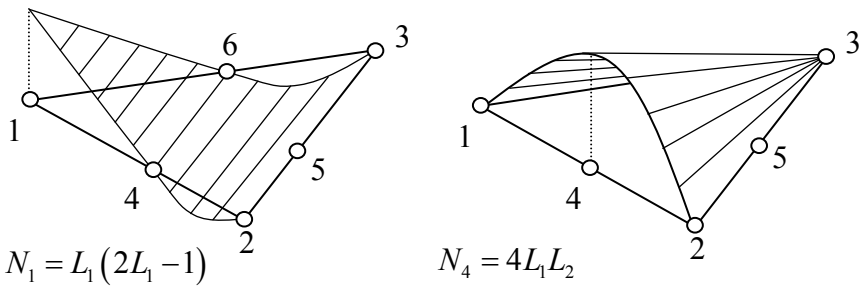


6.18 ábra. Másodfokú háromszögelem.

A 6.18 ábra szerinti háromszög elemnek hat csomópontja van, a három csúcspont és a három oldalfelező pont. A legfontosabb lépés az interpolációs, vagy formafüggvények megszerkesztése. Ehhez felhasználjuk a „*delta függvény*” tulajdonságot, ami szerint egy formafüggvény értéke minden csomópontban zérus, kivéve azt az egyet, aminek a sorszáma megegyezik a függvény sorszámával. Háromszög alakú tartományon másod - és a magasabb fokú - függvényeket legegyszerűbben az 6.5 ábrán bemutatott (6.14) terület koordinátákkal lehet felírni. A felírás menetét az 6.19 ábra mutatja, ahol az N_1 függvény a 4-6 és a 2-5-3 pontokon átmenő egyenesek egyenleteinek szorzata. Hasonló módon, az oldalfelező ponthoz tartozó N_4 az 1-3 és 2-3 oldalak egyenleteinek szorzata.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= L_1\left(2L_1 - 1\right) , \quad N_4 = 4L_1L_2 , \\
N_2 &= L_2\left(2L_2 - 1\right) , \quad N_5 = 4L_2L_3 , \\
N_3 &= L_3\left(2L_3 - 1\right) , \quad N_6 = 4L_3L_1 .
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Mivel az L_i háromszög koordináták az x, y térkoordináták lineáris függvényei, a fenti formafüggvények másodfokú polinomok. Ellenőrizhető, hogy a formafüggvények összege egy, ami a merevtest mozgás pontos leírásának feltétele.



6.19 ábra. Másodfokú háromszögelem interpolációs függvényei

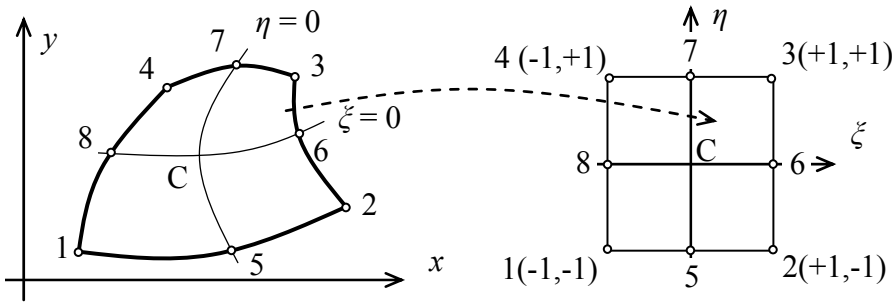
A 12 szabadságfokú háromszögelem egy belső pontjában az elmozdulás koordinátákat a csomóponti szabadságfokokból a következő interpolációval határozzuk meg:

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{6} u_{xi} N_i(x,y), \quad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{6} u_{yi}(t) N_i(x,y).$$

A továbbiakban az alakváltozások, belső erők, a virtuális munka tételének tagjai és az elemmátrixok felírása a már bemutatott műveletekkel határozható meg.

6.4.2 Négyszög elemek

A 6.20 ábrán látható négyszög elemet görbe vonalak határolják.



6.20 ábra. Másodfokú izoparametrikus elem

A formafüggvények felírásánál a háromszög elemnél már bevált eljárást követjük, az alapelem síkjában a normál alakú egyenes egyenleteket alkalmazzuk. Ismételten felhasználjuk a „*delta függvény*” tulajdonságot, ami szerint egy formafüggvény értéke minden csomópontban zérus, kivéve azt az egyet, aminek a sorszáma megegyezik a függvény sorszámával, ahol viszont az értéke egységnyi.

A másodfokú elemeknél két különböző formafüggvény rendszert lehet megszerkeszteni. A *Lagrange* elem kilenc csomópontos, és a formafüggvények felírásának menetét az 6.21.a ábra mutatja, ahol az N_1 függvény az 5-9-7, 2-6-3, 6-9-8 és 3-7-4 csomópontokon átmenő egyenesek egyenleteinek szorzata. Hasonló módon, az oldalfelező ponthoz tartozó N_5 formafüggvény az 1-8-4, 2-6-3, 6-9-8 és 3-7-4 cso-

mópontokon átmenő egyenesek egyenleteinek szorzata. A kilencedik formafüggvény az alapelem négy oldalát leíró egyenletek szorzata. Végül, a *Lagrange* elem mind a kilenc formafüggvénye a következő:

$$\begin{aligned}
&N_1 = \xi(\xi-1)\eta(\eta-1)/4\,, \quad N_5 = (\xi+1)(\xi-1)\eta(\eta-1)/2,\\
&N_2 = \xi(\xi+1)\eta(\eta-1)/4, \quad N_6 = \xi(\xi+1)(1+\eta)(\eta-1)/2,\\
&N_3 = \xi(\xi+1)\eta(\eta+1)/4, \quad N_7 = (\xi+1)(\xi-1)\eta(\eta+1)/2,\\
&N_4 = \xi(\xi-1)\eta(\eta+1)/4, \quad N_8 = \xi(\xi-1)(\eta+1)(\eta-1)/2,\\
&\qquad\qquad N_9 = (\xi+1)(\xi-1)(\eta+1)(\eta-1).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

A *Lagrange* elem hátránya, hogy a csomópontok között szerepel a kilencedik, belső pont, amelyik az egész modell (3.10) alakú egyenletrendszerének összeállítása során nem csatlakozik további elemek csomópontjaihoz.

Belső csomópont nélküli másodfokú elem az úgynevezett *Serendipity* elem. A formafüggvények megszerkesztésének módszerét mutatja az 5.21 ábra, ahol az átlók egyenleteit is felhasználjuk. Például az N_1 függvény az 2-6-3, 3-7-4 és az 5-8 csomópontokon átmenő egyenesek egyenleteinek szorzata, az oldalfelező ponthoz tartozó N_5 formafüggvény az 1-8-4, 2-6-3 és 3-7-4 csomópontokon átmenő egyenesek egyenleteinek szorzata lesz.

$$\begin{aligned}
&N_1 = (\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta+1)/4, \quad N_5 = (\xi-1)(\xi+1)(\eta-1)/2,\\
&N_2 = (\xi+1)(\eta-1)(\xi-\eta-1)/4, \quad N_6 = (\xi+1)(\eta+1)(\eta-1)/2,\\
&N_3 = (\xi+1)(\eta+1)(\xi+\eta-1)/4, \quad N_7 = (\xi+1)(\xi-1)(\eta+1)/2,\\
&N_4 = (\xi-1)(\eta+1)(\xi-\eta+1)/4, \quad N_8 = (\xi-1)(\eta+1)(\eta-1)/2.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

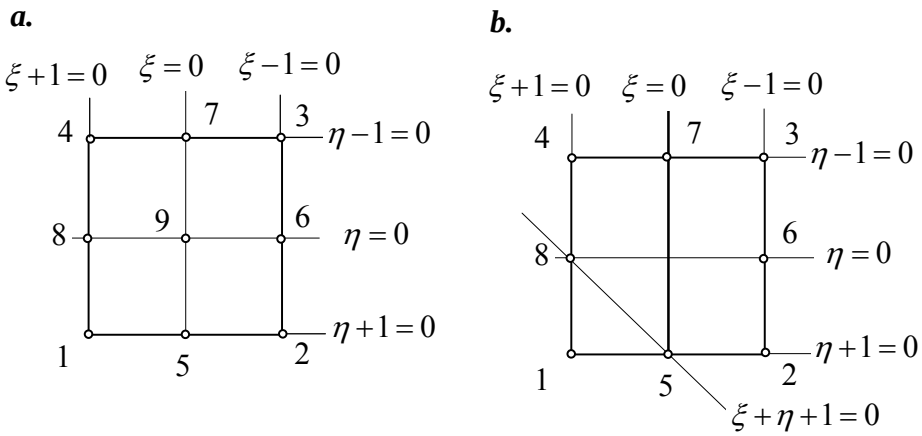
Az izoparametrikus formalizmusnak megfelelően, a geometriát is és az elmozdulásokat is ugyanazzal a függvényrendszerrel közelítjük. Ennek megfelelően az 6.20 ábrán látható elem oldalai másodfokú görbék és a konform leképezés - az elem és a ξ, η síkon értelmezett alapelem kapcsolata - a következő:

$$x = \sum_{i=1}^{p} N_i(\xi,\eta)\,x_i\ , \quad y = \sum_{i=1}^{p} N_i(\xi,\eta)\,y_i\ , \tag{6.34}$$

ahol p az elem csomópontjainak száma, p = 8 vagy 9. Az elmozdulásokra vonatkozó

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{p} u_{xi} N_i(x,y)\,, \quad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{p} u_{yi}(t)\,N_i(x,y)\,.$$

interpoláció felírása után az alakváltozások, belső erők, a virtuális munka tételének tagjai és az elemmátrixok a már bemutatott műveletekkel ismételt alkalmazásával határozhatóak meg.



6.21 ábra. Másodfokú *Lagrange* és *Serendipity* elemek.

Az itt bemutatott technikával további elemek és formafüggvény rendszereket lehet megszerkeszteni. Azonban, a gyakorlatban használatos végeselem programrendszerek csak kivételes esetekben alkalmaznak másodfokúnál magasabb rendű elemeket.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

7 A. Függelék, Mátrixszámítás

A *mátrix* skalár mennyiségek sorokba és oszlopokba rendezett halmaza. Az m sorból és n oszlopból álló mátrix:

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ha szükséges, akkor egy összefüggésben a mátrix mxn méretét a szimbólum alá írva adhatjuk meg. A mátrix egy a_{ij} elemének pozicióját az indexek jelölik, itt az i a sor és j az oszlop sorszáma. Ha a mátrix csak egy oszlopból áll, akkor azt oszlop vektornak, röviden vektornak nevezzük.

<u>Definíciók:</u>

- A *kvadratikus* mátrixban a sorok és oszlopok száma megegyezik, $m = n$.

- Egy **A** mátrixban a sorok és oszlopok felcserélésével a mátrix $\mathbf{A}^T$ *transzponáltját* kapjuk. Az mxn méretű mátrix transzponáltjának mérete nxm. Egy oszlop mátrix transzponáltja egy sormátrix lesz, és fordítva.

- Az **A** kvadratikus mátrix *szimmetrikus*, ha az egyenlő a saját transzponáltjával, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, vagy $a_{ij} = a_{ji}$.

- Az **A** kvadratikus mátrix a*szimmetrikus*, azaz ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, vagy $a_{ij} = -a_{ji}$.

- A *diagonál* mátrix olyan kvadratikus mátrix, amelynek csak a főátlójában lehetnek zérustól különböző értékek, $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$.

- Az *egységmátrix* olyan diagonál mátrix, amelynek a főátlójában minden elem egységnyi, $a_{ij} = 1$, ha $i = j$.

$$\underset{(n\times n)}{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- A *zérus mátrix* minden eleme zérus, $a_{ij} = 0$.

- Az **A** kvadratikus mátrix *inverze* az $\mathbf{A}^{-1}$ kvadratikus mátrix, amelyre teljesül az alábbi összefüggés:

$$\underset{(n\times n)}{\mathbf{A}}\,\underset{(n\times n)}{\mathbf{A}^{-1}} = \underset{(n\times n)}{\mathbf{A}^{-1}}\,\underset{(n\times n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n\times n)}{\mathbf{I}}. \tag{A.1}$$

- A kvadratikus mátrix *ortogonális*, ha inverze egyenlő a transzponáltjával:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}. \tag{A.2}$$

- Az **A** kvadratikus mátrix *pozitív szemidefinit*, ha bármely **X** vektorral való szorzatára

$$\underset{(1\times n)}{\mathbf{X}}^T \underset{(n\times n)}{\mathbf{A}} \underset{(n\times 1)}{\mathbf{X}} \geq 0\,, \tag{A.3}$$

és *pozitív definit*, ha a fenti szorzat nagyobb, mint zérus.

Algebrai műveletek:

Csak azonos méretű mátrixok adhatók össze, vagy vonhatók ki egymásból:

$$\underset{(m\times m)}{\mathbf{C}} = \underset{(m\times m)}{\mathbf{A}} \pm \underset{(m\times m)}{\mathbf{B}}\,, \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\,.$$

Két mátrix összegének transzponáltja a transzpnált mátrixok összege:

$$\left(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}\right)^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T\,.$$

Skalár szám és mátrix szorozata egy mátrix, melynek elemei az eredeti mátrix elemek és a skalár szám szorzata:

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{C}} = \lambda \underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}\,, \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}\,.$$

Két mátrix csak akkor szorozható egymással, ha az első helyen álló mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával:

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{C}} = \underset{(m\times p)}{\mathbf{A}} \underset{(p\times n)}{\mathbf{B}}\,, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\,. \tag{A.4}$$

A c_{ij} szorzat elem egyenlő az **A** mátrix i sorában és a **B** mátrix j oszlopában lévő elemek szorzat összegével. Ez az úgynevezett sor-oszlop szorzási szabály. Például:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 11 & -14 \end{bmatrix}.$$

A mátrix szorzózényezők sorrendje nem cserélhető fel, a szorzás művelete a mátrixok körében nem *kommutativ*.

Egy sor- és egy oszlopvektor szorzata egy (1x1) méretű mátrix, vagyis egy skalár szám:

$$\underset{(1\times 1)}{\mathbf{C}} = \underset{(1\times p)}{\mathbf{A}} \underset{(p\times 1)}{\mathbf{B}} = c\,,$$

ugyanakkor egy oszlopvektor és egy sorvektor szorzata egy mátrix:

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{C}} = \underset{(m\times 1)}{\mathbf{B}}\,\underset{(1\times n)}{\mathbf{A}}\,.$$

Több tényezős szorzatban a műveleti sorrend felcserélhető, ezért a zárójelet nem is kell használni:

$$\left(\underset{(m\times k)}{\mathbf{A}}\,\underset{(k\times p)}{\mathbf{B}}\right)\underset{(p\times n)}{\mathbf{C}} = \underset{(m\times k)}{\mathbf{A}}\left(\underset{(k\times p)}{\mathbf{B}}\,\underset{(p\times n)}{\mathbf{C}}\right) = \underset{(m\times k)}{\mathbf{A}}\,\underset{(k\times p)}{\mathbf{B}}\,\underset{(p\times n)}{\mathbf{C}}\,. \tag{A.5}$$

Az előzőek alapján egyszerűen igazolhatóak a következő azonosságok:

- Minden kvadratikus mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right), \tag{A.6}$$

- Az **A** mátrix és az **I** egységmátrix szorzat az **A** mátrix:

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}\,\underset{(n\times n)}{\mathbf{I}} = \underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}\,. \tag{A.7}$$

- Szorzatok transzponáltjára vonatkozik a következő két azonosság:

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{C}} = \left(\underset{(m\times k)}{\mathbf{A}}\,\underset{(k\times n)}{\mathbf{B}}\right)^T = \underset{(n\times k)}{\mathbf{B}^T}\,\underset{(k\times m)}{\mathbf{A}^T}\,, \qquad c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}\right)^T = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}\,, \tag{A.8}$$

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{C}} = \left(\underset{(m\times k)}{\mathbf{A}}\,\underset{(k\times n)}{\mathbf{B}^T}\right)^T = \underset{(n\times k)}{\mathbf{B}}\,\underset{(k\times m)}{\mathbf{A}^T}\,, \qquad c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ik}\right)^T = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{jk}\,. \tag{A.9}$$

Ez az eredmény többtényezős szorzatra is kiterjeszthető:

$$\left(\underset{(m\times p)}{\mathbf{A}}\,\underset{(p\times t)}{\mathbf{B}}\,\underset{(t\times n)}{\mathbf{C}}\right)^T = \underset{(n\times t)}{\mathbf{C}^T}\,\underset{(t\times p)}{\mathbf{B}^T}\,\underset{(p\times m)}{\mathbf{A}^T}\,.$$

IRODALOMJEGYZÉK

1. Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J.: *Stiffness and deflection analysis of complex structures*. Journal of Aeronautical Sciences, Vol.23, pp.805–23. 1956.

2. Washizu, K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Pr. Oxford, 1956.

3. Timoshenko, S.P., Gere, J.M.: *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, 1961.

4. Ponomarjov, S.D.: *Szilárdsági számítások a gépészetben*. 2. kötet, Műszaki Könyvkiadó, 1964

5. Przemieniecki J.S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1968.

6. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*. 3rd edition, McGraw-Hall, New York, 1970.

7. Kósa András: *Variációszámítás.* Tankönyvkiadó, 2. kiadás, 1973.

8. Ludvig Győző: *Gépek dinamikája*. Műszaki Könyvkiadó, 1973.

9. Clough, R.W., Penzien, J.: *Dynamics of Structures*. McGrawHill, Inc.1975.

10. Elter Pálné, Vörös Gábor: *Alkalmazott Mechanika I.* Tankönyvkiadó J4-951, 1980.

11. Muttnyánszky Ádám: *Szilárdságtan.* Műszaki Könyvkiadó, (1981)

12. Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.

13. Béda Gyula, Kozák Imre, Verhás József: *Kontinuummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, 1986.

13. Bojtár Imre, Vörös Gábor: *A végeselem-módszer alkalmazása lemez- és héjszerkezetekre*. Műszaki Könyvkiadó, 1986, Budapest.

15. Bojtár Imre, Molnár György, Nagy Tamás: *A végeselem-módszer alkalmazása síkbeli feladatokra*. Műszaki Könyvkiadó, 1988.

16. Kollár Lajos: *A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*. Akadémiai Kiadó, 1991.

17. Csizmadia Béla, Nándori Ernő: *Szilárdságtan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.

18. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*. 5th edition, Butterworth-Heinemann, 2000.

 © Forberger Árpád, Vörös Gábor, BME

19. Wunderlicht, W., Pilkey, W.D.: *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press, 2nd edition, 2002.

20. Rao, S.S.: *The finite element Method in Engineering*. Elsevier, 2004.

21. Hutton, D.V.: *Fundamentals of Finite Element Analysis*. Mc Graw Hill, 2004.

22. FemDesign, http://www.fem-design.com