2011. március 28.

Deriválás és integrálás

Petz Dénes

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Feltételezzük, hogy az olvasó ismeri már az analízis alapjait (sorozatokat és sorokat valós és komplex számokra, egyváltozós függvények folytonosságát és az ún. Riemann-integrálját, stb.). A lineáris algebra alapjait is kell ismerni. A *Függelék* összefoglalja a metrikus tér és lineáris leképezés témákat.

A jegyzet leginkább matematikus BSc és MSc hallgatóknak ajánlható. Előfordulnak bizonyítás nélküli tételek, de számos példa megtalálható a jegyzetben.

Henri Leon Lebesgue (1875-1941) az 1900-as évek elején dolgozta ki az integrálelméletet. Riesz Frigyes azoknak az elsőknek volt egyike, „akik az új integrálfogalom mélységét és nagy horderejét felismerték”.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **5**
1.1. Integrálok intervallumon . . . 5
1.2. Görbék . . . 12
1.3. Feladatok . . . 13

2. Deriválás **17**
2.1. Derivált és iránymenti derivált . . . 17
2.2. Implicit függvények . . . 24
2.3. Másodrendű derivált . . . 25
2.4. Szélsőérték problémák . . . 28
2.5. Feladatok . . . 30

3. Integrálok a síkon és a térben **33**
3.1. Görbementi integrál . . . 33
3.2. Integrálok a síkon . . . 35
3.2.1. Területi integrál . . . 35
3.2.2. Green-féle tételek . . . 40
3.3. Integrálok három dimenzióban . . . 42
3.3.1. Felület és felszin . . . 42
3.3.2. Felszini integrálok . . . 44
3.3.3. Divergencia és rotáció . . . 45
3.3.4. A Laplace-operátor és Green-formulák . . . 47
3.4. Feladatok . . . 51

4. Mérték és integrál **53**
4.1. Mérhető terek és mérhető függvények . . . 53
4.2. Mértéktér . . . 55
4.3. Konvergenciák . . . 57

4.4. Lépcsős függvények . . . 60
4.5. Integrál . . . 61
4.6. Abszolut folytonosság és szingularitás . . . 66
4.7. Szorzatmérték . . . 68
4.8. L^p-terek . . . 70
4.9. Feladatok . . . 71

5. Mérték topológikus téren **75**
5.1. Lokálisan kompakt terek . . . 75
5.2. Előjeles mértékek . . . 82
5.3. Operátor értékű mértékek . . . 87
5.4. Haar-mérték . . . 90
5.5. Feladatok . . . 96

6. Fourier-transzformáció **99**
6.1. Duális csoport . . . 99
6.2. Konvolució . . . 101
6.3. Fourier-transzformáció . . . 103
6.4. Feladatok . . . 111

Függelék **113**
Metrikus és topologikus terek . . . 113
Feladatok . . . 122
Lineáris operátorok . . . 127

Irodalomjegyzék **130**

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Integrálok intervallumon

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon. Az intervallumot felosztjuk részintervallumokra, egy π **felosztás** valamilyen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ osztópontok felvételét jelenti. A $\pi = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ felosztás átmérője a részintervallumok hosszának maximuma:

$$\delta(\pi) := \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\} .$$

Ha egy felosztás osztópontjaihoz újabbakat veszünk, akkor a felosztás finomítását kapjuk.

A π felosztáshoz tartozó **integrálközelítő-összeg** értelmezése a következő:

$$s_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}) .$$

Rögzített π felosztásra f változtatása lineáris funkcionált ad:

(i) $s_\pi(f_1) + s_\pi(f_2) = s_\pi(f_1 + f_2)$,

(ii) $s_\pi(\lambda f) = \lambda s_\pi(f)$.

Továbbá

(iii) ha $f \geq 0$, akkor $s_\pi(f) \geq 0$,

(iv) $s_\pi(|f_1 + f_2|) \leq s_\pi(|f_1|) + s_\pi(|f_2|)$.

1. lemma: *Tételezzük fel, hogy $\delta(\pi) < \eta$ és $|x - x'| < \eta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Legyen π' a π felosztás finomítása. Ekkor*

$$|s_{\pi'}(f) - s_\pi(f)| \leq \varepsilon .$$

Bizonyítás: Az $s_{\pi'}(f)$ közelítő összeget bontsuk a π felosztás $[t_0,t_1],\dots,[t_{n-1},t_n]$ intervallumainak megfelelő részösszegekre

$$s_{\pi'}(f)=\sum_{k=1}^{n}s_{\pi'(k)}(f)\,,\qquad s_{\pi'(k)}(f)=\sum_{l}(t'_l-t'_{l-1})f(t'_{l-1})\,,$$

ahol $t_{k-1}=t'_0<t'_1\ldots<t'_{n(k)}=t_k$. Ekkor

$$\begin{aligned}|s_{\pi'(k)}-(t_k-t_{k-1})f(t_{k-1})| &= \left|\sum_l(t'_l-t'_{l-1})f(t'_{l-1})-\sum_l(t'_l-t'_{l-1})f(t_{k-1})\right|\leq\\ &\leq \sum_l(t'_l-t'_{l-1})|f(t'_{l-1})-f(t_{k-1})|\leq\\ &\leq \sum_l(t'_l-t'_{l-1})\varepsilon=(t_k-t_{k-1})\varepsilon\,,\end{aligned}$$

és k-ra összegezve

$$\begin{aligned}|s_{\pi'}(f)-s_{\pi}(f)| &\leq \sum_k|s_{\pi'(k)}(f)-(t_k-t_{k-1})f(t_{k-1})|\leq\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\varepsilon=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

□

2. lemma: *Ha $\delta(\pi(n))\to 0$, akkor $s_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon>0$ adva. f egyenletes folytonossága alapján válasszunk olyan $\eta>0$-t, hogy $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ teljesüljön $|x-x'|<\eta$ esetén, és válasszuk N-et úgy, hogy $n\geq N$-re $\delta(\pi_n)<\eta$! Legyen $n,m\geq N$, és alkalmazzuk az előző lemmát π_n és π_m felosztások közös π' finomítására. Ekkor

$$|s_{\pi(n)}-s_{\pi'}(f)|<\varepsilon,\qquad |s_{\pi(m)}(f)-s_{\pi'}(f)|<\varepsilon\,,$$

tehát

$$|s_{\pi(n)}(f)-s_{\pi(m)}(f)|\leq 2\varepsilon\,.$$

□

Ezek után az $\int_a^b f(x)\,dx$ az integrált értelmezhetjük az $s_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat határértékeként. Maga a határérték természetesen nem függ attól, hogy milyen felosztás sorozatot választunk. Az integrálközelítő összegek (i)–(iv) tulajdonságai öröklődnek erre az integrálra, amit **Riemann-integrálnak** is szoktak nevezni.

Érdemes megjegyezni, hogy $\int_a^b f(x)\,dx$ értelmezését úgy is felfoghatjuk, mint az f függvénynek szakaszonként konstans függvényekkel való közelítését. Legyen $a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$ és

$$g(x)=c_i\qquad\text{ha}\qquad x\in[t_i,t_{i+1})\qquad(i=0,1,\dots,n-1).$$

Ekkor g egy szakaszonként állandó függvény, aminek integrálját a

$$\int_a^b g(x)\,dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i)$$

formulával értelmezhetjük. A folytonos f függvényhez keresünk szakaszonként állandó függvényeknek egy olyan g_n sorozatát, ami **egyenletesen konvergál** f-hez,

$$\sup\{|f(x) - g_n(x)| : a \leq x \leq b\} \to 0$$

és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx.$$

A következő eredmény az analízis egyik alaptétele, később számos általánositása is tárgyalásra kerül.

1. tétel: (Newton-Leibniz-formula) *Legyen* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény és* $f := F'$. *Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás: Legyen

$$g(z) := \int_a^z f(x)\,dx.$$

Ekkor

$$g(z+\varepsilon) - g(z) = \int_z^{z+\varepsilon} f(x)\,dx = \varepsilon f(t)$$

valamely $z < t < z + \varepsilon$ számra. Az $\varepsilon \to 0$ határérték azt adja, hogy $g'(z) = f(z)$. □

1. példa: Az $[a,b]$ intervallumot gondoljuk egy fémdarabnak, amelynek tömegsűrűségét az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény adja meg. A közelítő tömegét egy felosztással kaphatjuk meg. Ha a felosztás $(t_0, t_1, \dots, t_n)$, akkor a közelítő tömeg

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}).$$

Ha a felosztast finomítjuk, akkor a határérték

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Tehát ez a fémdarab tömege.

Most számoljuk ki a tömegközéppontot. Legyen $a < z < b$ a tömegközéppont, amire egy egyenletet fogunk felírni. Ha $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ az $[a, z]$ intervallum felosztása és $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ a $[z, b]$ intervallumé, akkor

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})f(t_{k-1})(z - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})f(u_{k-1})(u_{k-1} - z)$$

egy közelítő egyenlet, amelynek határértéke

$$\int_a^z f(x)(z-x)\,dx = \int_z^b f(x)(x-z)\,dx.$$

Ezt átrendezve az egyszerű

$$\int_a^b xf(x)\,dx = z\int_a^b f(x)\,dx$$

egyenletet kapjuk, amiből z adódik. □

2. példa: Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok merőlegesek, ha

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0.$$

Ennek analógiájára a folytonos $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényeket merőlegesnek mondhatjuk, ha

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Páldaként kiszámoljuk, hogy $\cos nx$ és $\cos mx$ merőlegesek a $[0, \pi]$ intervallumon, ha n és m különböző természetes számok. A

$$2\cos\alpha\,\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

formulát felhasználva

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos nx\,\cos mx\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)x + \cos(n-m)x\,dx \\ &= \left[\frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\right]_0^\pi = 0,\end{aligned}$$

ami a merőlegeseség, vagy ortogonalítás, lásd a Függeléket. □

3. példa: Legyen $x > 0$. A

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{1.1}$$

integrált vizsgáljuk. Mivel végtelen intervallumon van, a korábbi definició nem tartalmazza az esetet. Ráadásul, ha $x < 1$, akkor az integrandus nem is korlátos, viszont mindenütt pozitív. Ezért

$$\int_0^\infty = \lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^n .$$

Ha $a \in \mathbb{R}$ elég nagy, akkor

$$t^{x-1} \le e^{t/2} \qquad t > a \quad \text{esetén.}$$

Ezért

$$\int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_a^b e^{-t/2}\, dt \le 2e^{-a/2}.$$

Ez azt mutatja, hogy

$$\int_a^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt < +\infty.$$

Továbbá

$$\int_\varepsilon^a t^{x-1} e^{-t}\, dt \le \int_\varepsilon^a t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}(a^x - \varepsilon^x) \le \frac{a^x}{x}$$

mutatja, hogy

$$\int_0^a t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

is véges, tehát a $[0, \infty)$ intervallumon is véges az integrál.

Parciálisan integrálva

$$\int_\varepsilon^n t^{x-1} e^{-t}\, dt = \left[x^{-1} t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^n + \int_\varepsilon^n x^{-1} t^x e^{-t}\, dt.$$

Ha $n \to \infty$ és $\varepsilon \to 0$, akkor a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

formulához jutunk.

Mivel

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1,$$

az előző rekurzió azt adja, hogy $\Gamma(n+1) = n!$, ha $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ez mutatja, hogy a $\Gamma(x)$ **gamma-függvény** a faktoriális általánosítása. □

4. példa: A gamma-függvény egy pozitív függvény integrálásával volt értelmezve. Az $1/x$ függvény ugyancsak pozitív egy pozitív intervallumon.

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^n = \log n$$

Ebből adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = +\infty, \tag{1.3}$$

azt mondjuk, hogy az

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

integrál nem létezik, azaz $1/x$ nem integrálható a $[1,\infty)$ intervallumon.

Az előjelet váltó f függvény integrálható, ha $|f|$ integrálható. Ezzel kapcsolatban nézzük az

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

integrált. (Az integrandus folytonos.) Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = +\infty$$

(1.3) alapján, $\sin x/x$ nem integrálható. Ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx$$

véges. Valóban, ha

$$a_i := \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{i=0}^\infty a_i$$

és ez az összeg véges, mert $|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \ldots$ és az előjel váltakozó. Ez egy lényeges példa. □

A fenti lemmák gondolatmenete nagymértékben általánosítható. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ függvény és

$$s_\pi^g(f) = \sum_{k=1}^n [g(t_k) - g(t_{k-1})] f(t_{k-1})\,. \tag{1.4}$$

Az 1. lemma bizonyítása minimális módosítással működik, és az

$$|s_{\pi'}^g(f) - s_\pi^g(f)| \leq \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \varepsilon$$

eredményt adja. Ha a g függvény olyan, hogy létezik egy $C > 0$, amelyre

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \le C$$

bármilyen π felosztásra, akkor $\delta(\pi(n)) \to 0$ esetén $s^g_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat, és határértékét

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

formában jelöljük és **Riemann–Stieltjes-integrálnak** nevezzük. Ha g teljesíti a fenti feltételt, akkor korlátos változásúnak nevezik, és

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| : \pi \right\}$$

g **teljes változása**.

További általánosításra van lehetőség, ha adott a számegyenes részintervallumain értelmezett és értékeit egy X Banach-térben felvevő ν függvény, és a

$$s^\nu_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} \nu([t_{k-1}, t_k)) f(t_{k-1}) \tag{1.5}$$

definícióból indulunk ki. Az 1. lemma bizonyításának zavartalan működéséhez szükséges a

$$\nu([t_{k-1}, t_k)) = \sum_l \nu([t'_{l-1}, t'_l))$$

feltétel. Ez teljesül, ha megköveteljük, hogy

$$\nu([a, b)) + \nu([b, c)) = \nu([a, c))\,. \tag{1.6}$$

Természetesen a korlátos változáshoz hasonló feltétel is kell:

$$\sup \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \|\nu([t_{k-1}, t_k))\| : \pi \Big\} < +\infty\,. \tag{1.7}$$

Ha tehát a ν, úgynevezett vektorértékű, halmazfüggvényre teljesül az (1.6) additivitás és a (1.7)-gyel kifejezett teljes változása véges, akkor beszélhetünk az

$$\int_0^1 f(x)\, d\nu(x) \tag{1.8}$$

vektorértékű mérték szerinti integrálról. Valóban, ha $\pi(n)$ olyan felosztássorozat, amelyre $\delta(\pi(n)) \to 0$, akkor $s^\nu_{\pi(n)}(f)$ Cauchy-sorozat az X Banach-térben, és határértéke az integrál. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a (1.8) integrál **normában konvergens**. A legegyszerűbb esetben az X Banach-tér $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. Ekkor ν-t **előjeles mértéknek**, illetve **komplex mértéknek** szokás nevezni.

1.2. Görbék

Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos függvény, akkor azt **görbének** nevezhetjük $\mathbb{R}^n$-ben. $\gamma(a)$ a görbe kezdőpontja és $\gamma(b)$ a végpontja. A $\gamma(t)$ pont $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ alakban írható. $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$ számértékű függvények, ezek adják meg a görbét. Ha ezek a függvények folytonosa differenciálhatók, akkor a görbét **simának** mondjuk. Általában sima görbékkel foglalkozunk.

Vegyük az $[a,b]$ intervallum egy $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ felosztását. A $\gamma(t_i)$ és $\gamma(t_{i+1})$ pontokat összekötjük egy egyenes szakasszal, a szakaszok hosszának összege a görbe közelítő ívhossza. A fenti szakasz hossza a Pitagorasz tétel szerint

$$\left(\sum_j (\gamma_j(t_{i+1}) - \gamma_j(t_i))^2\right)^{1/2} = \left(\sum_j \gamma_j'(c_{ji})^2 (t_{i+1} - t_i)^2\right)^{1/2},$$

ahol a Lagrange-féle középérték tételt is felhasználtuk, $t_i \le c_{ji} \le t_{i+1}$. A szakasok hosszának összege

$$\sum_i \left(\sum_j \gamma_j'(c_{ji})^2\right)^{1/2} (t_{i+1} - t_i),$$

ami a felosztást finomítva a

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(t)^2\right)^{1/2} dt \tag{1.9}$$

integrálhoz tart. Ez a görbe ívhossza.

5. példa: Az $[a,b]$ intervallum értelmezett $f(x)$ (számértékű függvény grafikonja olyan görbe, amelynek paraméterezése $t \mapsto (t, f(t))$. Ezért a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)}\, dt\,.$$

□

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe és $g : [a,b] \to [a,b]$ egy bijektív folytonosan differenciálható függvény. Ekkor $\gamma \circ g$ is egy görbe, (képterében) ugyanaz csak más paraméterezéssel. Ennek hossza

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(g(t))^2 g'(t)^2\right)^{1/2} dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(g(t))^2\right)^{1/2} |g'(t)|\, dt.$$

Az $s = g(t)$ változó csere a $ds = |g'(t)|\, dt$ transzformálást adja, így az ívhossz független a paraméterezéstől.

6. példa: Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe, amelynek tömegsűrűségét a $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ görbén értelmezett függvény adja meg. A görbe tömegének kiszámolása az

$$\sum_i f(\gamma(t_i))h(t_i, t_{i+1})$$

közelítésen alapul, ahol $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása és $h(t_i, t_{i+1})$ a görbedarab hossza. Ez a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt \tag{1.10}$$

integrálhoz vezet. □

A (1.10) integrált az f függvény görbe menti **ívhossz szerinti integráljának** nevezzük.

7. példa: Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe, amelynek tömegsűrűsége $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$. A görbe tömegközéppontját szeretnénk kiszámolni.

Elöször a tömegközéppont első koordinátájára koncentrálunk. A görbét tömegsűrűség megörző módon az x_1 tengelyre, illetve az $[a, b]$ intervallumra vetítjük. A t pontban a sűrűség

$$f(\gamma(t)) \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2}.$$

A korábbi példa alapján a tömegközéppont első koordinátája

$$\frac{\int_a^b \gamma_1(t) f(\gamma(t)) \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt}{\int_a^b f(\gamma(t)) \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt}.$$

Természetesen a többi számolása hasonló. □

1.3. Feladatok

1. Számoljuk ki annak az első síknegyedben lévő tartománynak a területét, amit felülről az $y = \sqrt{x}$ görbe, alulról pedig az x tengely és az $y = x - 2$ egyenes határól.

2. Számoljuk ki a
$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, dt, \qquad \frac{d}{dx} \int_0^{x^4} \sqrt{t} \, dt$$
deriváltakat.

3. Legyen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvények az $f'(0) = f'(1) = g'(0) = g'(1) = 0$ feltétellel. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 f''(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g''(x)\,dx\,.$$

4. Határozzuk meg a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt$$

határértéket.

5. Milyen $\alpha > 0$ számra integrálható az

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

függvény a $[0,\infty)$ intervallumon?

6. Számoljuk ki az

$$f(x) = \int_x^1 \frac{6}{3+t^4}\,dt$$

függvény deriváltját.

7. Elemezzük a

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx$$

kapcsolatot.

8. Legyen

$$f(x) := \int_x^{x+1} \sin t^2\,dt.$$

Igazoljuk, hogy $x > 0$ esetén $|f(x)| \le 1/x$.

9. Legyen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (3t, t^3)$. Számoljuk ki a görbe ívhosszát.

10. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \sin x + \int_x^\pi \cos 2t\,dt + 1$$

függvény kielégíti az $f''(x) = -\sin x + 2\sin 2x$ differenciálegyenletet.

11. Számoljuk ki a

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \frac{1}{8t^2}\right), \qquad 1 \le t \le 2$$

görbe ívhosszát.

12. Határozzuk meg a

$$\gamma(t) = (r\cos^3 t, r\sin^3 t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

csillaggörbe ívhosszát és vázoljuk a görbét.

13. Mutassuk meg, hogy

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

egyenletesen konvergál $1 \le x \le 2$ esetén.

2. fejezet

Deriválás

Emlékeztető a lineáris algebrából: Ha $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor egy $n \times m$-es mátrix. Az egyszerűség kedvéért legyen $n = 2$ $m = 3$. Ekkor

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}h_1 + T_{12}h_2 + T_{13}h_3 \\ T_{21}h_1 + T_{22}h_2 + T_{23}h_3 \end{pmatrix},$$

T hatása a h vektorra. A vektor hossza $\|h\| := \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

2.1. Derivált és iránymenti derivált

Legyen $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ egy vektorértékű függvény, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, amely értelmezve van $z \in \mathbb{R}^m$ pont egy környezetében. f **deriváltja** z-ben egy $\partial f(z) \equiv T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, amelyre

$$f(z + h) = f(z) + Th + o(\|h\|), \tag{2.1}$$

ahol Th a T lineáris leképezés hatása a h vektoron és $o(\|h\|)$ egy olyan mennyiséget jelöl, ami $\|h\|$-val osztva is 0-hoz tart, ha $h \to 0$. Egy ekvivalens megfogalmazás a következő:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}(f(z + h) - f(z) - Th) = 0$$

Az (2.1) képletből világos, hogy ha f a z pontban deriválható, akkor ott folytonos is. A derivált egy olyan lineáris leképezés, amely az f függvényt a z pont közelében jól közelíti: $f(z + h) \approx f(z) + Th$.

Azonnal következik a definicióból, hogy a deriválás lineáris a függvényben. Ha $f, g : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ deriválhatók a $z \in \mathbb{R}^m$ pontban, akkor $af + bg$ is differenciálható $a, b \in \mathbb{R}$ esetén és

$$\partial(af + bg)(z) = a\partial f(z) + b\partial g(z).$$

Természetesen lineáris leképezések lineáris kombinációja is egy lineáris leképezés.

A derivált $\partial f(z)$ egy lineáris leképezés, ami egy $n \times m$-es mátrixszal adható meg, ha a két vektortérben, $\mathbb{R}^m$-ben és $\mathbb{R}^n$-ben, a bázisok rögzítve vannak. Mivel $\mathbb{R}^m$ elemeit $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ formába írjuk, a bázis $\delta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\delta_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\delta_m = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Tehát

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i \delta_i.$$

Hasonlóan írható le a természetes bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

Ha a mátrixszorzás formalizmusát használjuk, akkor a vektorokat oszlop- és nem sorvektorként kell írnunk. Például a (2.1) definicióban szereplő Th nem más, mint

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \ldots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \ldots & T_{2m} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \ldots & T_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \ldots & T_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

1. példa: Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ egy folytonos leképezés. Az ilyet görbének nevezzük, kezdőpontja $\gamma(a)$, végpontja $\gamma(b)$. Ha $a \le t \le b$, akkor a $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ pontot $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ alakban írhatjuk. Így a γ görbe n darab számértékű függvénnyel adható meg. Ezt a $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ jelöléssel is kifejezhetjük.

$$\frac{1}{|s|}\Big(\gamma(t+s) - \gamma(t) - Ts\Big)$$

egy n komponensű vektor, a limesz létezése a komponensek limeszének létezését jelenti, és $|s|$ helyett vehetünk s-et. Ha γ_i deriválható t-ben, akkor

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big(\gamma_i(t+s) - \gamma_i(t)\Big) = \gamma_i'(t) \qquad (1 \le i \le n).$$

γ csakkor deriválható, ha minden γ_i deriválható és

$$\partial\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad \partial\gamma(t)(r) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix} r.$$

Mivel egy lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ leképezést megad az 1 helyen felvett érték, a deriváltat egy vektornak tekintjük. □

2. példa: Legyen W egy $n \times n$-es valós elemű mátrix. A $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ formula adja meg. Milyen lineáris $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezés a g deriváltja?

$$\begin{aligned} g(x+h) &= \langle W(x+h), (x+h)\rangle = \langle Wx, x\rangle + \langle Wx, h\rangle + \langle Wh, x\rangle + \langle Wh, h\rangle = \\ &= \langle Wx, x\rangle + \langle (W + W^t)x, h\rangle + \langle Wh, h\rangle = \end{aligned}$$

$$= \quad g(x) + \langle (W+W^t)x, h\rangle + \langle Wh, h\rangle$$

és a $|\langle Wh,h\rangle| \leq C\|h\|^2$ becslés mutatja, hogy a derivált x-ben

$$h \mapsto \langle (W+W^t)x, h\rangle.$$

(W^t a W mátrix transzponáltját jelöli.) □

Legyen $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ egy vektorértékű függvény, amely értelmezve van $z \in \mathbb{R}^m$ pont egy környezetében. f **iránymenti deriváltja** z-ben a $h \in \mathbb{R}^m$ irányban egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre

$$f(z+sh) = f(z) + sv + o(s), \tag{2.2}$$

teljesül, $s \in \mathbb{R}$. A v deriváltra a $\partial_h f(z)$ jelölést is használjuk.

1. tétel: *Ha az $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű függvény értelmezve van $z \in \mathbb{R}^m$ pont egy környezetében, és z-ben differenciálható, akkor ebben a pontban bármely h irányba is deriválható, továbbá*

$$\partial_h f(z) = (\partial f(z))h.$$

Bizonyítás: A (2.1) képletben h helyére sh-t írunk. □

3. példa: Legyen $p(x)$ egy polinom és A egy n-szer n-es mátrix. A $p(A)$ mátrix A hatványainak a megfelelő lineáris kombinációja. Ha p-t rögzítjük, akkor az

$$A \mapsto p(A)$$

leképezés $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Kiszámoljuk ennek iránymenti deriváltját a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontban a $BX - XB$ irányban, ahol X egy n-szer n-es mátrix.

Az egyszerűség kedvéért legyen $p(x) = x^N$.

$$(B + s(BX - XB))^N - B^N$$

s-nek egy polinomja, amelyben az együtthatók mátrixok. Az iránymenti derivált ennek az s szerinti deriváltja $s = 0$-ban, ami nem más mint s együtthatója. Ez

$$B^{N-1}(BX-XB) + B^{N-2}(BX-XB)B + B^{N-3}(BX-XB)B^2 + \ldots + (BX-XB)B^{N-1}.$$

Az összeg és egyszerűen

$$B^{N-1}BX - XBB^{N-1} = B^N X - XB^N.$$

A p-beli linearitás miatt általános p-re az iránymenti derivált

$$p(B)X - Xp(B).$$

□

4. példa: Az n-szer n-es invertálható mátrixokon értelmezett

$$A \mapsto A^{-1}$$

$\mathbb{R}^{n\times n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ leképezés iránymenti deriváltját fogjuk kiszámolni a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontban a $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ irányban.

Először megjegyezzük, hogy egy mátrix invertálható, ha determinánsa nem 0. A determináns folytonos számértékű függvény, hiszen az elemekből szorzással és összeadással fejezhető ki. Ezért az a halmaz, ahol nem 0 az nyilt, az invertálható részhalmaz nyilt. Ha A invertálható és $t \in \mathbb{R}$ kicsi, akkor $A + tT$ is invertálható.

Maga az inverz művelet folytonos, hiszen az is determinánsokkal fejezhető ki. Így van esély a differenciálhatóságra.

$$(B + tT)^{-1} - B^{-1} = (B + tT)^{-1}(B - (B + tT))B^{-1} = -t(B + tT)^{-1}TB^{-1},$$

ezért

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((B + tT)^{-1} - B^{-1}\Big) = -B^{-1}TB^{-1}.$$

A B pontban a derivált az a lineáris leképezés, ami a T-hez $-B^{-1}TB^{-1}$-t rendeli. □

A $g : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve van $z \in \mathbb{R}^m$ pont egy környezetében. g-nek $\mathbb{R}^m$ δ_i bázisvektorainak irányában vett deriváltjait g **parciális deriváltjainak** nevezzük. A $\partial_{\delta_i} g(z)$ helyett a $\partial_i g(z)$ jelölést használjuk. A

$$\partial_i g(z) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(g(z_1, z_2, \dots, z_i + t, z_{i+1}, \dots, z_m) - g(z_1, z_2, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_m)\Big)$$

képlet azt mutatja, hogy a parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy csak z_i-t tekintjük változónak, és aszerint deriváljuk az egyváltozós függvényt.

Ha g differenciálható, akkor a 1. tétel szerint parciálisan is differenciáható és az $1\times m$-es deriváltmátrix elemei a parciális deriváltak:

$$\partial g(z) = [\partial_1 g(z), \partial_2 g(z), \dots, \partial_m g(z)] \tag{2.3}$$

A mátrix vektornak is tekinthető és **gradiens vektornak** is mondják.

5. példa: $\partial_h g(z) = (\partial g(z))h$ képlet azt mutaja, hogy az iránymenti deriváltat skalárszorzatként is felfoghatjuk:

$$\partial_h g(z) = \langle h, \partial g(z)\rangle.$$

Ha h-t egységvektornak választjuk, akkor ez maximális abban az esetben, ha h iránya a gradiens vektor iránya. Ha g kétváltozós, akkor három dimenzióban jól el tudjuk képzelni a felületét. Az $(x, y, g(x, y))$ pontban a legmeredekebb érintő a gradiens vektor irányában van. Például a

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

függvény esetében az $(a,b) \neq (0,0)$ pontban a gradiens

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

ami egyirányú az (x,y) vektorral.

Ha szélsőértéket keresünk egy (x,y) pontból indulva, akkor a gradiens irányába kell elmozdulnunk. Ez a **gradiens módszer**, gradiens=lépés. A gradiens vektor elnevezés innen ered. □

2. tétel: *Ha a $g : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjai léteznek a $z \in \mathbb{R}^m$ pont egy környezetében és folytonosak z-ben, akkor g differenciálható z-ben.*

Bizonyítás: Az $m = 2$ esetet nézzük, $z = (a_1, a_2)$. A Lagrange-féle középérték tétel szerint

$$g(x_1, a_2) - g(a_1, a_2) = \partial_1 g(c_1, a_2)(x_1 - a_1)$$

egy x_1 és a_1 közötti c_1 számra. $\partial_1 g$ folytonossága alapján

$$|g(x_1, a_2) - g(a_1, a_2) - \partial_1 g(a_1, a_2)(x_1 - a_1)| \leq \varepsilon |x_1 - a_1|,$$

ha x_1 elég közel van a_1-hez. Hasonlóan

$$g(x_1, x_2) - g(x_1, a_2) = \partial_2 g(x_1, c_2)(x_2 - a_2)$$

és

$$|g(x_1, x_2) - g(x_1, a_2) - \partial_1 g(a_1, a_2)(x_1 - a_1)| \leq \varepsilon |x_2 - a_2|$$

Ezért

$$|g(x_1, x_2) - g(a_1, a_2) - \partial_1 g(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \partial_2 g(a_1, a_2)(x_2 - a_2)| \leq \varepsilon |x_1 - a_1| + \varepsilon |x_2 - a_2|.$$

□

Legyen $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ egy vektorértékű függvény, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, amelynek $\partial f(z)$ a deriváltja a $z \in \mathbb{R}^m$ pontban. A derivált lineáris leképezés, amit mátrixként is felfoghatunk. A mátrix i-edik sora az f_i függvény deriváltja, így (2.3) alapján

$$\Big(\partial f(z)\Big)_{ij} = \partial_j f_i(z). \tag{2.4}$$

Ezt a mátrixot **Jacobi-mátrixnak** nevezzük. A Jacobi-mátrixnak első sora f_1 deriváltja, második sora f_2 deriváltja, és így tovább. Az előző tételt ezért erre az esetre is árvihetjük. Ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények valamennyi parciális deriváltja létezik a z pont egy környezetében és folytonosak z-ben, akkor f differenciálható.

6. példa: Ha a síkbeli (r, φ) polárkoortdinátákról áttérunk az (x, y) Descartes-koordinátákra, akkor $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$. Az $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$ leképezés Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Ugyanez három dimenzióban: $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$ és a Jacobi-mátrix

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

□

7. példa: Ha $f : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ egy komplex függvény, akkor azt $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ fügvényként is felfoghatjuk:

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

aminek Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}.$$

Ha f differenciálható a komplex értelemben, akkor

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}$$

létezik és ezért

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0 + \mathrm{i}w) - f(z_0)}{\mathrm{i}w}.$$

Ez az

$$\partial_x u + \mathrm{i}\partial_x v = \frac{1}{\mathrm{i}}(\partial_y u + \mathrm{i}\partial_y v)$$

összefüggést jelenti, ami egyszerűen

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_x v = -\partial_y u. \tag{2.7}$$

(Ezeket **Cauchy-Riemann egyenleteknek** hívják.) □

A következő tétel a **láncszabály**, ami mátrixszorzást tartalmaz.

3. tétel: *Legyen $f_1 : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ és $f_2 : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^p$. Ha f_1 differenciálható a $z \in \mathbb{R}^m$ pontban és f_2 differenciálható $f_1(z) \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor $f_2 \circ f_1$ differenciálható z-ben és*

$$\partial(f_2 \circ f_1)(z) = \partial f_2(f_1(z)) \times \partial f_1(z),$$

ahol $\times$ mátrixszorzást jelent.

Bizonyítás: Mivel

$$f_2(f_1(z+h)) = f_2\Big(f_1(z)+T_1h+o(\|h\|)\Big) = f_2(f_1(z))+T_2(T_1h+o(\|h\|))+o(T_1h+o(\|h\|))$$

a definiciók alapján, azt kell megmutatni, hogy

$$T_2o(\|h\|) + o(T_1h + o(\|h\|))$$

$\|h\|$-val osztva 0-hoz tart. Az első tag igen, a második tagra a következő átalakítást csináljuk:

$$\frac{o(T_1h + o(\|h\|))}{\|h\|} = \frac{o(T_1h + o(\|h\|))}{\|T_1h + o(\|h\|)\|}\,\frac{\|T_1h + o(\|h\|)\|}{\|h\|}$$

Itt az első tényező 0-hoz tart, a második pedig korlátos. □

8. példa: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ egy kétváltozós sima függvény és $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ egy sima görbe, amire az $g := f \circ \gamma$ összetett függvény értelmezett a t pont egy környezetében. Ennek deriváltja

$$\begin{aligned} g'(t) &= [\,(\partial_1 f)(\gamma(t)) \quad (\partial_2 f)(\gamma(t))\,] \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} \\ &= (\partial_1 f)(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + (\partial_2 f)(\gamma(t))\,\gamma_2'(t). \end{aligned}$$

Az első sorban mátrixszorzás van, tehát a sorrend nagyon fontos!

Érdemes megjegyezni, hogy a $g'(t) = 0$ feltétel a

$$(\partial g)(\gamma(t)) \perp \partial\gamma(t)$$

merőlegességet jelenti. □

4. tétel: (Lagrange-féle középérték tétel) *Legyen $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az*

$$[a,b] := \{\lambda a + (1-\lambda)b \,:\, 0 \le \lambda \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

szakasz egy környezetben. Ekkor van olyan $d \in [a,b]$ pont, hogy

$$f(b) - f(a) = \langle \partial f(d), (a-b) \rangle.$$

Bizonyítás: Tekintsük az $F(t) := f(ta + (1-t)b) = f(b + t(a-b))$ egyváltozós függvényt. Erre alkalmazhatjuk Lagrange-féle középérték tételt:

$$F'(c) = F(1) - F(0) = f(b) - f(a),$$

ahol $0 \le c \le 1$. F összetett függvény, $F = f \circ g$, ahol $g(t) = b + t(a-b)$. F deriváltja mátrixszorzat, de mivel sorvektort szorzunk oszlopvektorral, ez skalárszozatként is írható

$$F'(c) = \langle \partial f(ca + (1-c)b), (a-b) \rangle.$$

Tehát lehet $d := ca + (1-c)b$. $\square$

Az $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvényt **konvexnek** nevezzük, ha

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \tag{2.8}$$

minden $0 \le \lambda \le 1$ számra és minden $a, b \in \mathbb{R}^n$ pontra az értelmezési tartományból. Az f konvex függvény $\mathcal{D}(f)$ értelmezési tartományának rendelkezni kell azzal a tulajdonsággal, hogy $a, b \in \mathcal{D}(f)$ esetén $\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathcal{D}(f)$ minden $0 \le \lambda \le 1$ valós számra. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező halmazokat **konvexnek** mondjuk.

9. példa: Az $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény konvexítása összefüggésbe hozható egyváltozós függvények konvexításával. Legyen a és b az értelmezési tartományban, rögzítsük őket. A $g(\lambda) := f(\lambda a + (1-\lambda)b)$ függvénynek konvexnek kell lenni a $[0,1]$ intervallumon. Ezért a

$$\partial f(\lambda a + (1-\lambda)b)(b-a) \tag{2.9}$$

deriváltnak növőnek kell lenni. (A második derivált a 13. példában lesz.) $\square$

Megjegyezzük, hogy ha a (2.8) valóban egyenlőtlenség $0 < \lambda < 1$ esetén, akkor a függvény **szigorúan konvex**.

2.2. Implicit függvények

5. tétel: *Legyen $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható (a, b) egy környezetében és $f(a, b) = 0$. Ha az $y \mapsto f(a, y)$ függvény deriváltja injektív b-ben, akkor a egy környezetében megadható egy $\varphi : \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható függvény, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0$.*

$y = \varphi(x)$ az y ismeretlennel adott $f(x, y) = 0$ egyenlet megoldása. A tételt nem bizonyítjuk. Tartalma az, hogy ha a derivált (= közelítő lineáris leképezés) invertálható, akkor a függvény is az.

10. példa: Legyen

$$f(x, y, z) = (x^2 \cos y^{-1} + z\,\mathrm{ch} x, z^2 + e^{-x^2} \sin x)$$

$\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ függvény. Látható, hogy $f(\pi, 2/\pi, 0) = (0, 0)$. Olyan $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ függvényt keresünk, amelyre $f(\varphi(z), z) = 0$.

Deriválnunk kell a

$$g(x, y) = f(x, y, 0) = (x^2 \cos y^{-1}, e^{-x^2} \sin x)$$

függvényt. A derivált:

$$\begin{bmatrix} 2x\cos y^{-1} & y^{-2}x^2\sin y^{-1} \\ -2xe^{-x^2}\sin x + e^{-x^2}\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

A determináns a $(\pi, 2/\pi)$ pontban nem 0, így a $\varphi(z)$ függvény egyértelműen létezik. □

11. példa: Az **inverz függvény** esete az implicit függvény tétel speciális esete. Legyen $g : \mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható függvény a b pont egy környezetében. Legyen $f : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^q$, $f(x,y) = x - g(y)$. Ha $a = g(b)$, akkor $f(a,b) = 0$ és alkalmazható az implicit függvény tétel. Az $y \mapsto f(a,y) = g(b) - g(y)$ függvény folytonosan differenciálható. Ha g deriváltja b-ben invertálható, akkor létezik a φ függvény $g(b)$ egy környezetében. Ez nem más, mint g inverze. □

2.3. Másodrendű derivált

Először egyváltozós függvény deriváltjait tekintjük osztott differencia vonatkozásában. Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy függvény és $x_1, x_2, \dots, x_n$ különböző számok (a,b)-ben. Legyen

$$f^{[0]}[x_1] := f(x_1), \qquad f^{[1]}[x_1, x_2] := \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

és az $n = 2, 3, \dots$ számokra rekurzióval

$$f^{[n]}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] := \frac{f^{[n-1]}[x_1, x_2, \dots, x_n] - f^{[n-1]}[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}.$$

Az $f^{[k]}$ függvényt f k-adik osztott diferenciájának nevezik. A rekurzív definicióból a szimmetria nem világos. Páldául

$$f^{[2]}[x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \tag{2.10}$$

ami láthatóan szimmetrikus.

1. lemma: *Ha f n-szer deriválható, akkor $x_1 \to x, x_2 \to x, \dots, x_n \to x, x_{n+1} \to x$ esetén*

$$f^{[n]}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] \to \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Megjegyezzük, hogy a lemma bizonyítása következik a (2.14) formulából. A lemmából levezetjük, hogy

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o(h^2). \tag{2.11}$$

Ez ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2} \to \frac{f''(x)}{2},$$

ha $h \to 0$. Általánosabban

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} + o(h^{n-1}). \tag{2.12}$$

A **Taylor-tétel** azt állítja, hogy az $o(h^{n-1})$ hibatag úgy is írható, hogy

$$f^{(n)}(\xi)\frac{h^n}{n!},$$

ahol ξ az x és az $x+h$ között van.

A következőkben áttérünk a többváltozós függvényekre.

2. lemma: *Tételezzük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjai léteznek az (a, b) pont egy környezetében és ebben a pontban differenciálhatók. Ekkor*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\Big(f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b)\Big) = \partial_2\partial_1 f(a, b)$$

Bizonyítás: Legyen

$$\varphi(x) := f(x, b+h) - f(x, b).$$

Ekkor

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Mivel

$$\varphi'(x) = \partial_1 f(x, b+h) - \partial_1 f(x, b),$$

a Lagrange-féle középérték tétel szerint

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\Big(\partial_1 f(a+t, b+h) - \partial_1 f(a+t, b)\Big),$$

ahol $0 < t < h$. Tehát a

$$\frac{1}{h}\Big(\partial_1 f(a+t, b+h) - \partial_1 f(a+t, b)\Big)$$

határértéket kell számolnunk. Mivel

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f(a+t, b+h) - \partial_1 f(a+t, b) = \\
&\quad = (\partial_1 f(a+t, b+h) - \partial_1 f(a, b)) - (\partial_1 f(a+t, b) - \partial_1 f(a, b)) = \\
&\quad = \partial\partial_1 f(a, b)(t, h) + o(\|(t, h)\|) - \partial\partial_1 f(a, b)(t, 0) + o(t) = \\
&\quad = t\partial_1\partial_1 f(a, b) + h\partial_2\partial_1 f(a, b) - t\partial_1\partial_1 f(a, b) + o(\|(t, h)\|) + o(t) =
\end{aligned}$$

$$= h\partial_2\partial_1 f(a,b) + o(\|(t,h)\|) + o(t)$$

a h-val való osztás után a limesz $\partial_2\partial_1 f(a,b)$. □

Az $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény **kétszer differenciálható**, ha valamennyi parciális deriváltja differenciálható. A definicióból látszik, hogy ha f kétszer differenciálható egy pontban, akkor ott differenciálható.

6. tétel: (Young-tétel) *Legyen az $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x \in \mathbb{R}^m$ pontban. Ekkor*

$$\partial_i\partial_j f(x) = \partial_j\partial_i f(x) \qquad (1 \le i, j \le n).$$

Bizonyítás: Az előző lemma feltételei szimmetrikusak és az a mennyiség, aminek a határértékét nézzük, szinten szimmetrikus. Ezért a limesz $\partial_2\partial_1 f(a,b)$ és $\partial_1\partial_2 f(a,b)$. Ebből több változóra is adódik az állítás. □

$\partial_1\partial_2 f$ helyett $\partial_{12} f$-et is írunk. A $\partial_{ij} f$ függvények a másodrendű parciális deriváltak. További parciális deriválással magasabbrendű parciális deriváltakat is kapunk. A Young-tételből következik, hogy egy magasabbrendű parciális derivált nem függ a sorrendtől.

Az $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltja egy $\partial f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ vektorértékű függvény. Ennek deriváltja egy $m \times m$-es mátrix, amit **Hesse-mátrixnak** nevezünk. A mátrix (i,j)-eleme $\partial_i\partial_j f(x)$ másodrendű parciális derivált. Ezért a Young tétele úgy is fogalmazható, hogy a Hesse-mátrix szimmetrikus.

12. példa: A 8. példában szereplő $g := f \circ \gamma$ összetett függvény második deriváltját számoljuk. Mivel

$$g'(t) = (\partial_1 f)(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + (\partial_2 f)(\gamma(t))\,\gamma_2'(t),$$

szorzatfüggvényeket deriválva

$$\begin{aligned} g''(t) &= \Big[(\partial_{11} f)(\gamma(t))\gamma_1'(t) + (\partial_{21} f)(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big]\gamma_1'(t) + (\partial_1 f)(\gamma(t))\,\gamma_1''(t) + \\ &\quad + \Big[(\partial_{12} f)(\gamma(t))\gamma_1'(t) + (\partial_{22} f)(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big]\gamma_2'(t) + (\partial_2 f)(\gamma(t))\,\gamma_2''(t) \end{aligned}$$

Legyen $x = \gamma(t)$. Ekkor a mátrix formalizmus azt adja, hogy

$$\begin{aligned} g''(t) &= \left\langle \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} \right\rangle + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_1 f(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1''(t) \\ \gamma_2''(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Az első tag skaláris szorzat.) □

13. példa: Legyen $f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható. A függvény konvexítását akarjuk nézni a 9. Példa folytatásaként. A (2.9) függvény deriváltja

$$\langle [\partial^2 f(\lambda a + (1-\lambda)b)](b-a), (b-a)\rangle$$

egy belső szorzat, aminek pozitívnak kell lenni. Ez azt jelenti hogy az $m \times m$-es Hesse-mátrix $\partial^2 f$ pozitív szemidefinit.

Ha $\partial^2 f$ pozitív definit, akkor a függvény szigorúan konvex. $\square$

Most röviden áttekintjük egy $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ függvény második deriváltját. Tehát $f : \mathbb{R}^m \to L$, ahol az L lineáris tér $\mathbb{R}^n$. Jelölje $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L)$ a $\mathbb{R}^m \to L$ lineáris leképezéseket. Az első deriváltra

$$\partial f(x)(y) \in \mathbb{R}^n,$$

ami minden $x \in \mathbb{R}^m$ pontban egy $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L)$ értéket vesz fel. Ennek deriváltja a második derivált

$$\partial\left(\partial f(x)\right) : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L).$$

Az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, L)$ elemeit úgy is tekinthetjük, mint olyan $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to L$ függvények, amelyek mindkét változóban lineárisak, az ilyet bilineárisnak mondják. Ha $L = \mathbb{R}$, akkor egy bilineáris függvény

$$(x, y) \mapsto \langle x, Hy\rangle$$

alakú, ahol H egy $n \times n$-es mátrix. A Young-tétel azt mondja, hogy A szimmetrikus, ami azzal ekvivalens, hogy a bilineáris leképezés szimmetrikus. Ez nem csak az $L = \mathbb{R}$ esetben igaz, $\partial^2 f(x)(y, z)$ y-ban és z-ben szimmetrikus. A (2.11) formula analogja

$$f(x+h) = f(x) + \partial f(x)(h) + \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Tehát ha f számértékű, akkor az $(y, z) \mapsto \partial^2 f(x)(y, z)$ bilineáris leképezés nem más, mint $(y, z) \mapsto \langle y, Hz\rangle$, ahol H a Hesse-mátrix.

2.4. Szélsőérték problémák

Ha a $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriválható függvénynek egy $t \in (a, b)$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor $g'(t) = 0$. Hasonló a helyzet többváltozós függvényekre is. Ha $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ egy G nyílt halmazon differenciálható és egy $x \in G$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor $\partial_i f(x) = 0$ mindem parciális deriváltra.

14. példa: Meghatározzuk az

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 3$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 \leq 25$ tartományon.

Mivel a kompakt tartományon van minimális és maximális függvényérték, és a derivált seholsem 0 a tartományon, a szélsőértékek a tartomány határán vannak, ami a

$$\gamma(t) = (5\cos t, 5\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

görbe. Tehát a

$$g(t) = 28 - 60\cos t + 80\sin t$$

függvény szélsőértékeit keressük. A $g'(t) = 0$ egyenlet megoldása $\pi/2 < t_1 < \pi$ és $3\pi/2 < t_2 < 2\pi$, amelyekre $\tan t_1 = \tan t_2 = -4/3$. Mivel $g''(t_1) < 0$ és $g''(t_2) > 0$, t_1 a maximum hely, t_2 pedig a minimum hely. Tehát $t_1 = arctg(-4/3) + \pi$ és $t_2 = arctg(-4/3) + 2\pi$. $\square$

A következő példa csak azoknak ajánlott, akiknek gyakorlatuk van mátrixok használatával.

15. példa: A kvantumelméletben (az egyszerű) rendszer állapotát egy pozitív szemidefinit D mátrix írja le, amire $\mathrm{Tr}\, D = 1$, neve sűrűségi mátrix. Dolgozzunk $n \times n$-es mátrixokkal. Ha a rendszer energia operátora $H = H^*$ és az abszolut hőmérséklet $\beta > 0$, akkor a szabad energia

$$F(D) = \mathrm{Tr}\, DH - \frac{1}{\beta} S(D),$$

ahol $S(D) = \mathrm{Tr}\, \eta(D)$ a Neumann-entrópia,

$$\eta(x) = \begin{cases} -x\log x & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

(Az η függvény folytonos, de csak az $x > 0$ pontokban deriválható, $\eta'(x) = -\log x - 1$.)

A cél az $F(D)$ szabad energia függvény minimumát keresni az $\mathcal{M} = \{D > 0 : \mathrm{Tr}\, D = 1\}$ halmazon. Felhasználjuk, hogy az $F(D)$ függvény konvex a sűrűségi mátrixokon. Ha tehát valahol a derivált 0, akkor ott van az abszolut minimum. (Fizikai szempontból a szabad energia minimumhelye az egyensúlyi állapot.)

$F(D)$ iránymenti deriváltját számoljuk ki a $T = T^*$ irányba, $\mathrm{Tr}\, T = 0$. (A $\mathrm{Tr}\, T = 0$ feltétel azért van, hogy a $D+tT > 0$ és $\mathrm{Tr}\, D+tT = 1$ felt;telek kis t számra teljesüljenek.) Felhasználjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Tr}\, g(D + tT) = \mathrm{Tr}\, g'(D)T$$

a $t = 0$ pontban. Ezért az iránymenti deriváltra

$$\partial_T F(D) = \mathrm{Tr}\, TH - \frac{1}{\beta} \mathrm{Tr}\, (-\log D - I)T.$$

A minimum pontban ennek 0-nak kell lenni minden T-re, így a következő egyemlethez jutunk:

$$\mathrm{Tr}\, T\left(H + \frac{1}{\beta}\log D\right) = 0$$

Ez akkor van, ha
$$H + \frac{1}{\beta}\log D = \lambda I$$
valamilyen λ számra, aminek olyannak kell leni, hogy $\mathrm{Tr}\, D = 1$ teljesüljön. Így
$$D = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}$$
a minimumhely, amit Gibbs-állapotnak neveznek. □

Ha a $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvénynek az a tulajdonsága van, hogy egy $t \in (a, b)$ pontban $g'(t) = 0$ és $g''(t) > 0$, akkor ott g-nek lokális minimuma van. Egy hasonló állítás igaz egy $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvényre. A második derivált azomban mátrix, aminek pozitív definitségét tételezzük fel.

7. tétel: *Legyen a kétszer deriválható $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\partial f(x) = 0$ és $\partial^2 f(x) > 0$. Ekkor az x pontban f-nek lokális minimuma van.*

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért csak az $n = 2$ estet nézzük. Vegyünk egy γ görbét $\mathbb{R}^2$-ben, amire $\gamma(t) = x$. Azt elég megmutatnunk, hogy a $g := f \circ \gamma$ egyváltozós függvénynek t-ben lokális minimuma van. g deriválására használjuk a 8. és 12. példákat. Mivel $\partial_i f(x) = 0$, $\partial_i f(\gamma(t) = 0$ és $g'(t) = 0$.
$$g''(t) = \left\langle \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} \right\rangle,$$
mivel a második tag a 12. példában 0. Ha a γ deriváltja t-ben nem 0, akkor $g''(t) > 0$. □

16. példa: Az $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ függvény abszolut szélsőértékeit keressük a $(0, 0), (9, 0)$ és $(0, 9)$ pontok által meghatározott háromszögön.
$$\partial f(x, y) = [\, 2 - 2x \quad 2 - 2y \,], \qquad \partial^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
A derivált a $(1, 1)$ pontban 0, a második derivált mindenütt negatív definit. Az $(1, 1)$ pontban lokális maximum van, de a konkavitás miatt ez abszolut maximum is. Abszolut minimum csak a határon lehet, és azt végig lehet nézni. A $(0, 9)$ és $(9, 0)$ pontok a minimumhelyek. □

A következő állítás háromváltozós függvényekre van, de lehetne többváltozósra is.

8. tétel: *Legyen $f, g : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ sima függvények. Tételezzük fel, hogy f-nek a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ felületen az (x_0, y_0, z_0) pontban lokális szélsőértéke van. Ekkor*

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \partial f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \partial g(x_0, y_0, z_0)$$

valamilyem $\lambda \in \mathbb{R}$ számra.

Bizonyítás: Vegyünk γ görbéket a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ felületen az (x_0, y_0, z_0) ponton keresztül, $g(\gamma(t)) = 0$ és $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Az $f(\gamma(t))$ függvénynek a t_0 pontban lokális szélsőértéke van, ezért a deriváltja itt 0, ami

$$\partial f(x_0, y_0, z_0) \perp \partial \gamma(t_0).$$

Ugyanakkor a $g(\gamma(t)) = 0$ feltételből derivalással

$$\partial g(x_0, y_0, z_0) \perp \partial \gamma(t_0).$$

Ez minden említett γ görbére igaz, ezért a $\partial f(x_0, y_0, z_0)$ és $\partial g(x_0, y_0, z_0)$ vektorok párhuzamosak. □

A tételben csak egy feltétel volt a lokális szélsőérték keresésére, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$. Ha egy másik $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = 0\}$ feltétel is lenne, akkor még a

$$\partial f(x_0, y_0, z_0) = \mu \partial h(x_0, y_0, z_0)$$

egyenlet is megjelenne. Ezt használjuk a következő példában.

17. példa: Az $x + y + z = 1$ sík az $x^2 + y^2 = 1$ hengert egy ellipszisben metszi. Melyik pontja van az ellipszisnek legmesszebb az origótól?

Az $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ függvény maximumát keressük a $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ feltátelek mellet, ahol $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1$ és $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$. Az

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z)$$

függvény parciális deriváltjainak 0-nak kell lenni. Ez ad egy egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - \lambda - 2\mu x \\ 0 &= 2y - \lambda - 2\mu y \\ 0 &= 2z - \lambda \\ 0 &= x + y + z - 1 \\ 0 &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

A megoldások $(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2, 1 \pm \sqrt{2})$. Az első kettő abszolut minimumot ad és a második kettő maximumot. $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2})$ az abszolut maximum, a másik lokális.

Az alkalmazott eljárás a **Lagrange-féle multiplikátor módszer**. □

2.5. Feladatok

1. Határozzuk meg az
$$f(x,y) = \frac{x^2+3y}{4x+5y}$$
függvény $(1,-1)$ ponthoz tartozó érintősíkjának az egyenletét!

2. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \exp(-x^2-y^2) - z$ függvénynek $(1,0,1)$ pontban a $(4,0,-3)$ irányú deriváltját!

3. Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix és $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$
Igazoljuk, hogy ha x sajátvektora A-nak, akkor $\partial f(x) = 0$!

4. Hány pontban metszheti egymást két konvex $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja?

5. Adjuk meg az n-edik deriváltját az
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (a,b,c,d,x \in \mathbb{R})$$
függvénynek!

6. Legyen $y \in \mathbb{R}^n$ fix. Mi a deriváltja az $x \mapsto \|x\|^2 y$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénynek?

7. A $\{(p_1,p_2,\ldots,p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$ halmazon egy $0 < \alpha < 1$ paraméterrel definiáljuk a
$$H_\alpha(p_1,p_2,\ldots,p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_i p_i^\alpha \tag{2.13}$$
függvényt. Igazoljuk, hogy konkáv! (Ez a **Rényi-entrópia**.)

8. Határozzuk meg az
$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$$
függvény minimumát és maximumát a $[0,1]$ intervallumon!

   item Határozzuk meg az
$$f(x) = x^3 + y/3 - 3xy$$
függvény lokális szélsőértékeit!

9. Igazoljuk, hogy
$$f^{[n]}[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \int_S f^{(n)}(t_0x_0 + t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)\, dt_1dt_2\ldots dt_n, \tag{2.14}$$
ahol $S = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0,\ \sum_i t_i \leq 1\}$ és $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i$.

10. Határozzuk meg az
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$
függvény szélsőértékeit az $x + y = 2C^2$ feltétel mellett!

11. Az $y = x^2$ és $y = -(x-4)^2$ paraboláknak mik a legközelebbi pontjai?

12. Határozzuk meg az
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3$$
függvény abszolut minimumát és maximumát a
$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$
tartományon!

13. Határozzuk meg az
$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$$
függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltétel mellett!

3. fejezet

Integrálok a síkon és a térben

3.1. Görbementi integrál

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe és $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a görbén értelmezett vektorértékű függvény. A t pontban a görbe érintő vektora $T = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$, aminek az $f(t)$ vektorral vett skalárszorzata szerepel a

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt := \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt \tag{3.1}$$

integrálban, amit **érintővektoros görbementi integrálnak** nevezünk.

Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű függvénynek $g : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ a **primitív függvénye**, ha g deriváltja f, azaz $\partial_i g(x) = f_i(x)$, $1 \le i \le n$. A primitív függvényt **potenciálnak** is szokták nevezni. Nem minden vektorértékű függvénynek van primitív függvénye, hiszen a Young-tétel alapján $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ a primitív függvény létezésének feltétele.

1. tétel: *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe és $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a görbe környezetében értelmezett vektorértékű függvény, amelynek $g : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ a primitív függvénye. Ekkor*

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Bizonyítás: Mivel

$$\sum_i f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(\gamma(t))$$

az egyváltozós Newton-Leibniz szabály adja az állítást. $\square$

A tétel a Newton-Leibniz szabály egy analogonja. A tételből következik, hogy ha γ zárt görbe és f-nek van primitív függvénye, akkor

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt = 0.$$

Az állítás megfordítása is igaz:

2. tétel: *Legyen $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ egy konvex nyílt halmazon értelmezett folytonos vektorértékű függvény, amelyre*

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt = 0$$

minden sima zárt görbére. Ekkor f-nek van primitív függvénye.

Bizonyítás: Rögzítsünk egy a pontot az értelmezési tartományban és legyen

$$g(x) = \int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt,$$

ahol $\gamma(t) = a + t(x - a)$, $t \in [0, 1]$. □

1. példa: Adjuk meg a primitív függvényét az

$$f(x, y, z) = (2xz, -\frac{1}{y+3}, x^2 - z)$$

vektorértékű függvénynek az $y > -3$ térrészben!

Megoldás:

$$\frac{\partial}{\partial y} 2xz = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y+3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} 2xz = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{y+3}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(x^2 - z),$$

ezért van esély a primitív függvény létezésére.

$$F(x_0, y_0, z_0) = \int_\gamma \langle f(x, y, z), dx\, dy\, dz\rangle,$$

ahol a γ görbe lehet $\gamma(t) = (tx_0, ty_0, tz_0)$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_\gamma f(x, y, z) dx = \int_0^1 2(tx_0)(tz_0)x_0 dt = \frac{2}{3} x_0^2 z_0$$

$$\int_\gamma f(x, y, z) dy = -\int_0^1 \frac{1}{ty_0 + 3} y_0 dt = -\log \frac{y_0 + 3}{3}$$

$$\int_\gamma f(x, y, z) dz = \int_0^1 ((tx_0)^2 - tz_0) z_0 dt = \frac{x_0^2 z_0}{3} - \frac{z_0^2}{2}$$

Tehát

$$F(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 z_0 - \log \frac{y_0 + 3}{3} - \frac{1}{2} z_0^2$$

primitív függvény. Természetesen egy konstans hozzáadható, és akkor egy kicsit egyszerűsödik a függvény. □

3.2. Integrálok a síkon

Először az egyváltozós Riemann-integrált kiterjesztjük két változóra. Az $\mathbb{R}^2$ síkon a koordinátákat x-szel és y-nal jelöljük.

3.2.1. Területi integrál

Legyen $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy folytonos $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény. Az intervallumokat felosztjuk részekre:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, \qquad c = u_0 < u_1 < \ldots < u_{m-1} < u_m = d$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan az

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(t_{i-1}, u_{j-1})(t_i - t_{i-1})(u_j - u_{j-1}) \tag{3.2}$$

integrálközelítő össsszegek Cauchy-sorozatot alkotnak, ha a két felosztás átmérője 0-hoz tart. A limesz az

$$\iint_T f(x,y)\, dxdy$$

integrál a $T = [a,b]\times[c,d]$ téglalapon. Ez a téglalap az $[t_{i-1}, t_i]\times[u_{j-1}, u_j]$ kis téglalapokra van osztva (3.2)-ben.

A (3.2) összeg limeszét most úgy számoljuk, hogy először az egyik felosztást finomítjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\Big(\sum_{j=1}^{m} f(t_{i-1}, u_{j-1})(u_j - u_{j-1})\Big) \to \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(t_{i-1}, y)\, dy$$

Ezután pedig a másikat:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(t_{i-1}, y)\, dy \to \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Így eljutottunk a téglalapon vett integrálhoz, de a másik sorrendben is csinálhattuk volna.

3. tétel: *Legyen $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy folytonos $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Tehát egy kettős integrált egyváltozós integrálokra is vissza lehet vezetni. A kettős integrált nem csak téglalapokra lehet definiálni, hanem tartományokra is. Az egyszerűség kedvéért olyan tartományokkal foglalkozunk, amiknek a határa (szakaszonként) folytonosan differenciálható egyszerű zárt görbe. Az ilyen tartományok diszjunk téglalapok uniójával is közelíthetők, és a kettős integrál tulajdonságai kiterjeszthetők. Például, ha a T tartományt szétvágjuk T_1 és T_2 tartományokra, akkor

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)\,dxdy. \tag{3.3}$$

Ez az integrál additivitása.

2. példa: Legyen $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, hogy $g_1(a) = g_2(a)$, $g_1(b) = g_2(b)$ és $g_1(x) < g_2(x)$ ha $a < x < b$. Ekkor a függvények grafikonja egy A tartománynak a határa, a tartományon adott egy $f \geq 0$ folytonos függvény, amit tömegsűrűségnek tekintünk. Kiszámoljuk a tartomány tömegközéppontját.

A tömegközéppont x koordinátáját úgy kaphatjuk meg, hogy a tartományt levetítjük az x tengelyre tömegtartó módon, és alkalmazzuk a 1. példa képletét. A levetítés az

$$x \mapsto \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad a \leq x \leq b$$

tömegsűrűséget adja. Ennek tömegközéppontja

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx}{\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx} = \frac{\iint_A x f(x,y)\,dxdy}{\iint_A f(x,y)\,dxdy}.$$

A másik koordinátát hasonlóan kapjuk:

$$y_0 = \frac{\iint_A y f(x,y)\,dxdy}{\iint_A f(x,y)\,dxdy}.$$

□

Egy konkrét példa a következő.

3. példa: A síkon a $(0,0), (1,0), (1,2)$ csúcspontokkal adott T háromszög sűrűségfüggvényét az $f(x,y) = x + y + 1$ függvény adja meg. Számoljuk ki ennek a tömegközéppontját.

A tömeg:

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{2x} (x+y+1)\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[xy + \frac{1}{2}y^2 + y \right]_{y=0}^{y=2x} dx =$$

$$\int_0^1 (4x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

Egy másik számítandó integrál

$$\iint_T xf(x,y)\,dxdy = \int_0^1 x\left(\int_1^{2x}(x+y+1)\,dy\right)dx = \frac{5}{3}.$$

Tehát a tömegközéppont x-koordinátája

$$\frac{5}{3} : \frac{7}{3} = \frac{5}{7}.$$

Hasonló számolással az y-koordináta 11/14. □

Az integrál közelítő össszegnek nem (3.2) az egyetlen lehetősége. A T tartományt feloszthatjuk kis T_i tartományokra és nézzük az

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)t(T_i)$$

összeget, ahol $t(T_i)$ a T_i résztartomány területe és $(x_i,y_i)\in T_i$. Ha a résztartományok átmérőjének maximuma tart 0-hoz, akkor közelítő össszegek határértéke a T-n vett integrál.

4. példa: Az origó középpontú R sugarú körlemezen akarjuk integrálni az $f(x,y)$ függvényt. A $[0,R]$ intervallumot felosztjuk n egyenlő részre, $I_1,I_2,\dots,I_n$, ahol $I_i = [(i-1)R/n, iR/n]$. Hasonlóan a $[0,2\pi]$ intervallumot felosztjuk m egyenlő részre, $J_1,J_2,\dots,J_m$, ahol $J_j = [(j-1)2\pi/m, j2\pi/m]$. A T_{ij} tartomány legyen

$$T_{ij} := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : r\in I_i, \varphi\in J_j\}$$

Így a körlemezt felosztottuk kis résztartományokra, amik körgyűrűcikkek. T_{ij} területe

$$\frac{1}{m}(iR/n)^2\pi - ((i-1)R/n)^2\pi) = \frac{(2i-1)R^2\pi}{n^2m}.$$

Az integrál közelítő összeg kedvezőbb, ha $2i-1$ helyett $2(i-1)$-et írunk, ez elhanyagolható változtatás, ha n és m nagy.

$$\sum_{i,j} f\left(\frac{i-1}{n}R\cos\frac{(j-1)2\pi}{m}, \frac{i-1}{n}R\sin\frac{(j-1)2\pi}{m}\right)\frac{2(i-1)R^2\pi}{n^2m} =$$

$$= \sum_j \frac{2\pi}{m}\sum_i f\left(\frac{i-1}{n}R\cos\frac{(j-1)2\pi}{m}, \frac{i-1}{n}R\sin\frac{(j-1)2\pi}{m}\right)\frac{(i-1)R}{n}\frac{R}{n}.$$

Ha $n\to\infty$, akkor a limesz

$$\sum_j \frac{2\pi}{m}\int_0^R f\left(r\cos\frac{(j-1)2\pi}{m}, r\sin\frac{(j-1)2\pi}{m}\right) r\,dr$$

és most $m \to \infty$ az

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr \right) d\varphi = \iint_T f(x,y)\, dxdy$$

integrált adja. Ez a **polárkoordinátákra** való áttérés.

Nézzünk meg két konkrét példát. Ha $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, akkor

$$\begin{aligned}
\iint_T f(x,y)\, dxdy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\, dr \right) d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr \right) d\varphi = \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3 \pi.
\end{aligned}$$

Amit kaptunk az az R sugarú félgömb térfogata.

Ha $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$, akkor

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) r\, dr d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = \pi.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy = \pi,$$

eljutottunk a **Gauss-integrálhoz**:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

A polárkoordinátákra való áttérés a **helyettesítéses integrálás** egyszerű esete.

4. tétel: *Legyen* $f \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény a* $T \subset \mathbb{R}^2$ *tartományon és* $g, h \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *olyan folytonosan differenciálható függvények egy* $G \subset \mathbb{R}^2$ *tartományon, hogy* $(g(u,v), h(u,v)) : (u,v) \in G\} = T$*. Ekkor*

$$\iint_T f(x,y)\, dxdy = \iint_G f(g(u,v), h(u,v)) J(u,v)\, dudv,$$

ahol $J(u,v)$ *a*

$$\begin{bmatrix} \partial_1 g & \partial_2 g \\ \partial_1 h & \partial_2 h \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrix determinánsának abszolut értéke.

Bizonyítás: Azt kell megnéznünk, hogy a $(g,h) : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés egy kicsi téglalapot mekkora területbe visz át. Az $t \mapsto (u+t,v)$ görbe $(g(u+t,v),h(u+t,v))$ képének érintője az (u,v) pontban $(\partial_1 g, \partial_1 h)(u,v)$, hasomlóan a $(g(u,v+t),h(u,v+t))$ képének érintője a$(\partial_2 g, \partial_2 h)(u,v)$. Így az $[u,u+\varepsilon] \times [v,v+\varepsilon]$ négyzet közelítőleg egy olyam paralellogrammába megy át, minek oldalvektorai a $(g(u,v),h(u,v))$ pontból $\varepsilon(\partial_1 g, \partial_1 h)(u,v)$ és $\varepsilon(\partial_2 g, \partial_2 h)(u,v)$. (Az eltérés $o(\varepsilon^2)$.) A paralelogramma területe

$$\det \begin{bmatrix} \partial_1 g(u,v) & \partial_2 g(u,v) \\ \partial_1 h(u,v) & \partial_2 h(u,v) \end{bmatrix}$$

abszolutértéke szorozva ε^2-tel. A terület az (u,v) pont környezetében közelítőleg ezzel a számmal szozódik. Az integrálközelítő összegekre alkalmazva kapjuk az állítást. □

5. példa: A 4. példában részletesen és elemien kiszámoltuk a

$$dxdy = r\,drd\varphi$$

formulát az $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ transzformációhoz. Ugyanez könnyen kijön a helyettesítéses integrál tételből, a Jacobi-mátrix

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

□

6. példa: Legyen m_1, m_2 pozitív valós számok. Értelmezzünk egy $U : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ lineáris operátort az

$$(Uf)(x,y) = f(u,v)\,,$$

ahol

$$u = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}, \qquad v = y - x \qquad (x, y \in \mathbb{R})\,. \tag{3.4}$$

Belátjuk, hogy U unitér transzformáció, vagy ami ezzel ekvivalens az a (3.4) képlettel megadott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transzformáció mértéktartása.

$$\|Uf\|^2 = \int |f(u,v)|^2\,dx\,dy = \int |f(u,v)|^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv,$$

ahol

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

a Jacobi-mátrix determinánsának abszolút értéke. A Jacobi-mátrixot a

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & -1 \\ \frac{m_1}{m_1+m_2} & 1 \end{bmatrix}$$

formában adhatjuk meg, ennek determinánsa 1. Így megmutattuk, hogy

$$\|Uf\|^2 = \int |f(u,v)|^2\,du\,dv = \int |f(x,y)|^2\,dx\,dy = \|f\|^2.$$

Mivel U invertálható, egy unitér operátor.

Érdemes megjegyezni, hogy ha a példában x-et egy m_1 tömegű részecske helyének és y-t egy m_2 tömegű részecske helyének gondoljuk, akkor u a közös tömegközéppont helye, v pedig a második részecskének az elsőhöz viszonyított helyzete. A tárgyalt unitér operátor egy koordináta-rendszer transzformációhoz kapcsolódik. □

3.2.2. Green-féle tételek

A továbbiakban $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbe, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. Ha γ egyszerű zárt görbe, akkor egy A tartomány határa. A **Green-féle tételek** összefüggést adnak az tartományon vett területi integrál és a határgörbe mentén vett vonalintegrálok között.

Legyen $h : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ a γ görbén értelmezett függvény. Definició:

$$\int_\gamma h\,dx := \int_a^b h(\gamma(t))\gamma_1'(t)\,dt, \qquad \int_\gamma h\,dy := \int_a^b h(\gamma(t))\gamma_2'(t)\,dt. \tag{3.5}$$

A képleteknek akkor is van értelme, ha a γ görbe folytonos, de csak véges sok pont kivételével folytonosan differenciálható. Az ilyen görbéket **szakaszonként folytonosan differenciálhatónak** mondjuk. A tipikus és fontos példa a szakaszonként lineáris görbe.

A következő tétel a Newton-Leibniz-formulának egy analogonja.

5. tétel: *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, amely az A tartományt határolja és legyen $h : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ az A tartomány egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$\int_\gamma h\,dx = -\iint_A \partial_y h\,dxdy, \qquad \int_\gamma h\,dy = \iint_A \partial_x h\,dxdy.$$

Bizonyítás: A két formula közül elég az egyiket igazolni, ha x-et és y-t megcseréljük, akkor a γ görbe irányítása megváltozik, és ezért az első formula a másodikba megy át. Tehát elég az elsővel foglalkozni.

A γ görbét közelíthetjük szakaszonként lineáris görbével. A közelítés a balodali görbementi integrál közelítését és a jobboldali területi integrál közelítését is biztosítja. Ezért elegendő az ilyen görbe esetét igazolni.

Feltételezzük, hogy A egy sokszög. Ez felosztható háromszögekre. Megmutatjuk, hogy ha a bizonyítandó képlet háromszögekre igaz, akkor sokszögre is. Az egyszerűség kedvéért egy $PQRT$ négyszöget tekintünk, ami a PQR és az RTP háromszögekre bontható. A

$$\int_{PQR} h\,dx = -\iint_{PQR} \partial_y h\,dxdy, \qquad \int_{RTP} h\,dx = -\iint_{RTP} \partial_y h\,dxdy$$

egyenleteket összeadjuk. A jobboldali területi integrálok összege a $PQRT$ négyszögön vett integrál. A baloldali vonalintegrálok összege

$$\int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RP} + \int_{RT} + \int_{TP} + \int_{PR} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RT} + \int_{TP},$$

mivel a PR és az RP szakaszokon vett integrálok elojelben különböznek. Így az összeg a $PQRT$ vonalon vett integrál, és megkaptuk a négyszögre vonatkozó formulát.

A bizonyítandó állítást tehát elég háromszögekre igazolni, és feltehető, hogy a háromszögek kis átmérőjűek. A következő redukáló lépés a h függvényre fog vonatkozni. A h függvényt háromszögenként lineáris függvénnyel lehet közeliteni, úgy, hogy h deriváltját közelítjük a lineáris függvények deriváltjával is. (Ehhez szükségünk van arra a nem triviális feltételre, hogy a háromszögek kicsik legyenek, viszont szögeik egy bizonyos pozítiv érték felett maradjanak. Az ide vonatkozó részleteket elhagyjuk.) A közelítés a baloldali vonalintegrál közelítése is. Oda jutottunk, hogy a bizonyítandó formulát elegendő háromszögre és lineáris h függvényre kiszámolmi.

A háromszög egyik csúcsa az egyszerűség kedvéért legyen az origó, a másik két csúcs $P = (P_1, P_2)$ és $Q = (Q_1, Q_2)$. Ha a h függvényhez egy konstansot hozzáadunk, akkor az igazolandó

$$\int_{0PQ} h\,dx = -\iint_{0PQ} \partial_y h\,dxdy, \tag{3.6}$$

egyenlet egyik oldala sem változik, tehát feltehetjük, hogy $h(0) = 0$, azaz

$$h(\lambda P + \mu Q) = \lambda a + \mu b$$

valamilyen a és b számokra. A PQ szakaszt paraméterezhetjük úgy, hogy $\gamma(t) = P + t(Q - P)$ és

$$\int_{PQ} h\,dx = \int_0^1 (a + t(b-a))(Q_1 - P_1)\,dt = \frac{1}{2}(Q_1 - P_1)(b + a).$$

Hasonlóan számoljuk ki a $Q0$ és $0P$ szakaszokon vett integrálokat, és azt kapjuk, hogy (3.6) balodala

$$\frac{aQ_1 - bP_1}{2}.$$

A jobboldal a $-\partial_y h$ konstans szorozva a háromszög területével, ami ugyanennyinek számolható ki. $\square$

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ a γ görbén értelmezett vektorértékű függvény, $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. A γ görbe érintővektora a t paraméterű pontban $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$. Az következő integrálban a $f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))$ vektornak az érintővektorral vett skalárszorzata jelenik meg:

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt := \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)\, dt. \tag{3.7}$$

Ezt **érintővektoros görbementi integrálnak** nevezzük.

6. tétel: *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, amely az A tartományt határolja és legyen $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ az A tartomány egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható vektorértékfüggvény. Ekkor*

$$\int_\gamma \langle f, T\rangle \, dt = \iint_A (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\, dxdy.$$

Bizonyítás: A (3.7) definició jobboldalára alkalmazzuk az 1. tétel két formuláját. □

A γ görbe normálvektora a t paraméterű pontban $(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$. (Ha γ pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, akkor ez a normálvektor a görbe által határolt tartomány belseje felé mutat.) A következő integrálban a $f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))$ vektornak a normál vektorral vett skalárszorzata jelenik meg:

$$\int_\gamma \langle f, n\rangle \, dt := \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\, dt. \tag{3.8}$$

Ezt **normál vektoros görbementi integrálnak** nevezzük.

7. tétel: *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, amely az A tartományt határolja és legyen $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ az A tartomány egy környezetében értelmezett folytonosan differenciálható vektorértékfüggvény. Ekkor*

$$\int_\gamma \langle f, n\rangle \, dt = \iint_A (\partial_x f_1 + \partial_y f_2)\, dxdy.$$

Bizonyítás: A (3.8) definició jobboldalára alkalmazzuk az 1. tétel két formuláját. □

Formálisan a tétel formulájának jobboldalán is skalárszorzat van: $\langle \partial, f\rangle$.

3.3. Integrálok három dimenzióban

A térbeli (r, φ, ψ) polárkoordináták és az (x, y, z) derékszögű koordináták között

$$x = r\cos\varphi\sin\psi, \qquad y = r\sin\varphi\sin\psi, \qquad z = r\cos\psi$$

az összefüggés. A Jacobi-mátrix

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\psi & -r\cos\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{bmatrix}.$$

A determináns $-r^2\sin\psi$, ezért

$$dx\,dy\,dy = r^2\sin\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi. \tag{3.9}$$

3.3.1. Felület és felszin

Egy folytonosan differenciálható $g : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ függvény a három dimenziós térben egy felületet ad meg egy $A \subset \mathbb{R}^2$ tartományon vett paramáterezéssel. A felület

$$g(x_0,y_0) = (g_1(x_0,y_0), g_2(x_0,y_0), g_3(x_0,y_0)) \in \mathbb{R}^3$$

pontjában vett érintősíkot a

$$\partial_x g(x_0,y_0) = (\partial_x g_1(x_0,y_0), \partial_x g_2(x_0,y_0), \partial_x g_3(x_0,y_0))$$

és

$$\partial_y g(x_0,y_0) = (\partial_y g_1(x_0,y_0), \partial_y g_2(x_0,y_0), \partial_y g_3(x_0,y_0))$$

vektorok határozzák meg. (Ezek a ∂g Jacobi-mátrix sorvektorai.) A $\partial_x g(x_0,y_0)$ és a $\partial_y g(x_0,y_0)$ vektorok lenormált vektoriális szorzata a $g(x_0,y_0)$ pontban a felület **normálvektora**, ami az érintősíkra merőleges egységvektor.

Tételezzük fel, hogy a kis méretű $[a,b]\times[c,d]$ téglalap része A-nak. A $g([a,b]\times[c,d])$ felület felszinét egy paralelogramma területével közelíthetjük. A paralelogrammát a $g(a,c)$ pontból induló

$$(b-a)\partial_x g(a,c) \quad \text{és} \quad (d-c)\partial_y g(a,c)$$

vektorok határozzák meg. A paralelogramma területe a két vektor vektoriális szorzatának hossza (vagy normája):

$$\|\partial_x g(a,c)\times\partial_y g(a,c)\|(b-a)(d-c). \tag{3.10}$$

Természetesen $(b-a)(d-c)$ éppen a kis téglalap területe. Ha az A tartományt kis téglalapokra bontjuk és a (3.9) tagokat összeadjuk, akkor az A tartományon vett

$$\iint_A \|\partial_1 g(x,y)\times\partial_2 g(x,y)\|\,dx\,dy \tag{3.11}$$

kettös integrál közelítő összegéhez jutunk. Ezért az integrál adja meg a felület felszinét.

Az u és v vektorokra $\|u\times v\|$ kiszámolása nem kényelmes a vektoriális szorzat formulája segitségével. Ezert néha érdemes az

$$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \tag{3.12}$$

formulát használni. (Ennek további előnye, hogy magasabb dimenzióban is megadja az u és v vektorok által meghatározott paralelogramma területét.)

7. példa: $\mathbb{R}^3$-ban egy háromszög csúcspontjai U, V és W. Feltételezzük, hogy a sűrűség egyenletes és kiszámoljuk a súlypont első koordinátáját.

A háromszöget paraméterezzük: $g : (x, y) \mapsto xU + yV + (1 - x - y)W \in \mathbb{R}^3$, ahol $0 \le x$, $0 \le y$, $x + y \le 1$, ezek pontok az A háromszöget adják $\mathbb{R}^2$-ben.

A súlypont első koordinátája:

$$\iint_A x_1 \|\partial_x g(x,y) \times \partial_y g(x,y)\| dx\,dy \Big/ \iint_A \|\partial_x g(x,y) \times \partial_y g(x,y)\| dx\,dy,$$

ahol

$$x_1 = xU_1 + yV_1 + (1 - x - y)W_1.$$

g limearitása miatt $\|\partial_x g \times \partial_y g\|$ konstans, tehát a súlypont

$$\iint_A xU_1 + yV_1 + (1 - x - y)W_1\,dx\,dy.$$

Mivel

$$\iint_A dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} dy \right) dx$$

a számolás elemi és az eredmény

$$\frac{1}{3}(U_1 + V_1 + W_1).$$

□

8. példa: Számoljuk ki a

$$g(\varphi, v) = (\cos\varphi - v\sin\varphi, \sin\varphi + v\cos\varphi, \varphi + v), \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 1)$$

felület felszinét!

Megoldás:

$$\|\partial_1 g\|^2 = (-\sin\varphi - v\cos\varphi)^2 + (\cos\varphi - v\sin\varphi)^2 + 1 = 2 + v^2$$

$$\|\partial_2 g\|^2 = (-\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + 1 = 2$$

$$\langle \partial_1 g, \partial_2 f \rangle = \sin^2\varphi + v\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi - v\cos\varphi\sin\varphi + 1 = 2.$$

Ezért

$$\|\partial_1 g \times \partial_2 g\|^2 = \|\partial_1 g\|^2 \|\partial_3 g\|^2 - \langle \partial_1 g, \partial_2 g \rangle^2 = (2 + v^2)2 - 4 = 2v^2.$$

A felszin

$$\int_{v=0}^{v=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \|\partial_1 g \times \partial_2 g\|\,d\varphi\,dv = \int_{v=0}^{v=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{2}v\,d\varphi\,dv = \sqrt{2}\pi.$$

□

9. példa: Legyen $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ folytonosan differenciálható függvény. Grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Mi az így kapott felület felszine?

Megoldás: A felületet a

$$g(x,\varphi) = (x, h(x)\cos\varphi, h(x)\sin\varphi)$$

módon paraméterezhetjük, $x \in [a,b], \varphi \in [0,2\pi]$. Mivel

$$\partial_1 g = (1, h'(x)\cos\varphi, h'(x)\sin\varphi), \qquad \partial_2 g = (0, -h(x)\sin\varphi, h(x)\cos\varphi),$$

ezek merőleges vektorok. Tehát

$$\|\partial_1 g(x,\varphi) \times \partial_2 g(x,\varphi)\| = f(x)\sqrt{1+h'(x)^2}$$

és a felszin

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx\,d\varphi = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx\,.$$

□

3.3.2. Felszini integrálok

A felszin kiszámolása a legegyszerűbb felületi integrál, de vannak további változatok. A felületen lehet értelmezve számértékű és vektorértékű függvény és ezeket is integrálhatjuk.

Ha $h : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ a felületen értelmezett függvény, akkor

$$\iint_A h(g(x,y))\|\partial_1 g(x,y) \times \partial_2 g(x,y)\|\,dx\,dy =: \iint_A h\,dF \tag{3.13}$$

egy számértékű felszini integrál. Például, ha h a felület tömegsűrűsége, akkor az integrál a felület tömegét adja.

A $g(x_0,y_0)$ pontjában a felületnek a normálvektor

$$n := \frac{\partial_1 g(x_0,y_0) \times \partial_2 g(x_0,y_0)}{\|\partial_1 g(x_0,y_0) \times \partial_2 g(x_0,y_0)\|}.$$

Legyen $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ a felületen értelmezett vektorértékű függvény. A $\langle f, n\rangle$ skalárszorzat felszini integrálját **fluxusnak** vagy **fluxusintegrálnak** is mondjuk.

$$\iint_A \langle f, n\rangle\,dF := \iint_A \langle f, \partial_1 g \times \partial_2 g\rangle\,dx\,dy, \tag{3.14}$$

mivel

$$\langle f, n\rangle\|\partial_1 g \times \partial_2 g\| = \langle f, \partial_1 g \times \partial_2 g\rangle\,.$$

Az $f = (f_1, f_2, f_3)$ vektorértékű függvény felszini integrálja

$$\iint_A f\, dF \tag{3.15}$$

vektorértékű:

$$\Big(\iint_A f_1\, dF, \iint_A f_2\, dF, \iint_A f_3\, dF\Big).$$

3.3.3. Divergencia és rotáció

Elöször a Newton-Leibniz-formulának egy háromdimenziós analogonját nézzük. Emlékeztetünk arra, hogy $n = (n_1, n_2, n_3)$ a felület normálvektorát jelöli.

8. tétel: *Legyen $h : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény a folytonosan differenciálható A felületű korlátos K tartomány egy környezetében. Ekkor*

$$\iint_A hn_i\, dF = \iiint_K \partial_i h\, dx\, dy\, dz \qquad (1 \le i \le 3).$$

Bizonyítás: A gondolatmenet nagyon hasonlít a 5. tétel bizonyításához. Elöször a K tartomány határát vátoztatjuk, feltehető, hogy a határfelület háromszögekből van összerakva, ugyanis egy sima felület ilyen felülettel közelíthető. (Másszóval, K közelíthető egy poliéderrel.)

Ezután K poliédert előállítjuk kis tetraéderek egyesítéseként, ezek a tetraéderek egy-egy háromszög alakú lappal érintkeznek egymással. A tetraéderekre az állítás bal és jobboldala egyaránt additív, tehát elég teraéderre igazolni a tételt. Most a függvényt akarjuk egyszerüsíteni, feltehetjük, hogy a tetraéderen lineáris, ugyanis egy sima függvény közelíthető kis teraédereken lineáris folytonos függvényekkel.

Tehát legyen K egy tetraéder, amelynek csúcspontjai a 0, u, v és w pontok. A h lineáris függvény $h(x, y, z) = ax + by + cz + d$ alakú. A

$$\iint_A hn\, dF = \iiint_K \partial h\, dx\, dy\, dz \qquad (1 \le i \le 3).$$

vektoregyenlőséget igazoljuk. Mivel az igazolandó formula mindkét oldala lineáris h-ban, elegendő a $h_1(x, y, z) = x$ és $h_2(x, y, z) = 1$ speciális függvényeket nézni.

$h_1(x, y, z) = x$: Legyen H a K tetraéder egyik lapja. A T háromszög területe legyen t és súlypontja (s_1, s_2, s_3). A súlypont számításból tudjuk, hogy

$$\iint_H x\, dF = ts_1,$$

ezért

$$\iint_H hn\, dF = ts_1 n\,.$$

A K felületén vett integrál kiszámolása az előző egyenlőségek összeadását jelenti minden háromszögre, felhasználjuk, hogy tn két oldalvektor vektoriális szorzatának a fele:

$$\begin{aligned}
\iint_A hn\,dF &= \frac{1}{2}\frac{u_1+v_1}{3}(v\times u)+\frac{1}{2}\frac{u_1+w_1}{3}(u\times w)+ \\
&+\frac{1}{2}\frac{v_1+w_1}{3}(w\times v)+ \\
&+\frac{1}{2}\frac{u_1+v_1+w_1}{3}((v-u)\times(w-u))= \\
&= -\frac{1}{6}\Big(w_1\cdot(v\times u)+v_1\cdot(u\times w)+u_1\cdot(w\times v)\Big)
\end{aligned}$$

Ha az integrált J-vel jelöljük, akkor

$$\langle J,u\rangle = -\frac{1}{6}u_1\langle w\times v,u\rangle = V(K)u_1,$$

ahol $V(K)$ a K tetraéder térfogata. Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\langle J,v\rangle = V(K)v_1 \quad \text{és} \quad \langle J,w\rangle = V(K)w_1\,.$$

Ezekkel a tulajdonságokkal csak a $J=V(k)(1,0,0)$ vektor rendelkezik, ami éppen

$$\iiint_K \partial h\,dx\,dy\,dz.$$

$h_2(x,y,z)\equiv 1$: Ekkor a bizonyítandó egyenlőség jobboldala 0, a baloldal pedig

$$\iint_A hn\,dF = -\frac{1}{2}\Big((u\times v)+(w\times u)+(w-u)\times(v-u)\Big)=0.$$

□

9. tétel: (Gauss-Osztrogradszkij tétel) *Tegyük fel, hogy a korlátos K tartomány A határa véges sok folytonosam differenciálható felületből tevődik össze és legyen $f:\mathbb{R}^3\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ K egy környezetében folytonosan differenciálható vektorértékű függvény. Ekkor*

$$\iint_A \langle f,n\rangle\,dF = \iiint_K (\partial_1 f_1+\partial_2 f_2+\partial_3 f_3)\,dx\,dy\,dz.$$

Bizonyítás: Az előző tétel szerint

$$\iint_A f_i n_i\,dF = \iiint_K \partial_i f_i\,dx\,dy\,dz \qquad (1\le i\le 3).$$

Ezeket összeadva kapjuk az állítást. □

Mivel

$$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1+\partial_2 f_2+\partial_3 f_3,$$

a Gauss-Osztrogradszkij tételt **divergencia tételnek** is nevezik. A divergencia nem más, mint a Jacobi-mátrix

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{bmatrix}$$

nyoma.

10. tétel: (Stokes tétel) *Tegyük fel, hogy a korlátos K tartomány A határa véges sok folytonosam differenciálható felületből tevődik össze és legyen $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ K egy környezetében folytonosan differenciálható vektorértékű függvény. Ekkor*

$$\iint_A (f \times n)\, dF = \iiint_K \operatorname{rot} f\, dx\, dy\, dz.$$

ahol

$$\operatorname{rot} f := (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2,\, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3,\, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$$

Bizonyítás: Mivel

$$f \times n = (f_3 n_2 - f_2 n_3,\, f_1 n_3 - f_3 n_1,\, f_2 n_1 - f_1 n_2),$$

a 8. tétel alkalmazható komponensenként. □

A Stokes tételt **rotáció tételnek** is nevezik. Formálisan $\operatorname{rot} f = \langle \partial, f \rangle$, így a rotáció tétel

$$\iint_A (f \times n)\, dF = \iiint_K (\partial \times f)\, dx\, dy\, dz$$

alakban is írható. Ebben a szellemben a divergencia tétel

$$\iint_A \langle f, n \rangle\, dF = \iiint_K \langle \partial, f \rangle\, dx\, dy\, dz.$$

10. példa: Legyen G az origó középpontú 2 sugarú gömb, amelynek felülete kifelé van irányítva és legyen $f(x, y, z) = (x - 2z, 2x + y, x - y + z)$. Kiszámoljuk a

$$\iint_G \langle f, n \rangle\, dF$$

fluxusintegrált.

A Gauss-Oszrogradszkij tételt használhatjuk. Eszerint a fluxusintegrál

$$\iiint \operatorname{div} f\, dxdydz$$

a G által határolt tartományon, ami egy 2 sugarú gömb. Mivel $\operatorname{div} f = 3$, az integrál a gömb térfogatának háromszorosa, 32π. □

3.3.4. A Laplace-operátor és Green-formulák

Legyen $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. A **Laplace-operátor** hatása az f függvényen

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f.$$

Az $n = 1$ eset egyszerű, az érdekes új jelenségek az $n = 2, 3$ esetekben jelennek meg.

11. példa: Átszámoljuk a Laplace-operátort két dimenzióban polárkoordinátás formalizmusba.

Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ formulákból kapjuk a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

összefüggést. A 2×2-es mátrixot invertáljuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}r\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Ugyanezt másként leírva:

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = (\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

A két egyenletet „négyzetre emeljük” és összeadva őket a

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}}$$

eredményhez jutunk.

Az első négyzetre emelést végigszámoljuk a szorzat differenciálási szabályát használva:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \Big[(\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\Big]\Big[(\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\Big] - \Big[(\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\Big]\Big[\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big] \\
&\quad -\Big[\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big]\Big[(\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\Big] + \Big[\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big]\Big[\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big] = \\
&= (\cos^2\varphi)\frac{\partial^2}{\partial r^2} - (\cos\varphi\sin\varphi)\Big[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}\Big] \\
&\quad -\frac{\sin\varphi}{r}\Big[-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}\Big] + \frac{\sin\varphi}{r^2}\Big[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big] = \\
&= (\cos^2\varphi)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

A másik négyzetre emelés hasonló. $\square$

Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ tartomány A határa véges sok folytonosam differenciálható felületből tevődik össze és legyen $f, g : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ K egy környezetében kétszer folytonosan differenciálható függvény. A két függvény skalárszorzatát a

$$\langle f, g\rangle := \iiint_K f\,g\,dx\,dy\,dz$$

képlettek értelmezzük.

11. tétel: (Első Green-formula)

$$\iiint_K f\,\Delta g\,dx\,dy\,dz + \iiint_K \langle \partial f,\, \partial g\rangle\,dx\,dy\,dz = \iint_A f\langle \partial g,\, n\rangle\,dF. \tag{3.16}$$

Bizonyítás:

$$f\,\partial g = (f\,\partial_1 g,\; f\,\partial_2 g,\; f\,\partial_3 g)$$

vektorértékű függvény,

$$\operatorname{div}(f\partial g) = \langle \partial f,\, \partial g\rangle + f\,\Delta g.$$

A két oldalt megcserélve integrálással az állításhoz jutunk. Az

$$\iiint_K \operatorname{div}(f\,\partial g)\,dx\,dy\,dz$$

integrál a divergencia tétel szerint

$$\iint_A \langle f\partial g,\, n\rangle\,dF = \iint_A f\langle \partial g,\, n\rangle\,dF,$$

ami a formula jobb oldala. $\square$

Ha az első Green-formulában felcseréljük f-et és g-t, ezután a kapott egyenletet kivonjuk (3.15)-ből, akkor a

$$\iiint_K (f\,\Delta g - g\Delta f\,dx\,dy\,dz = \iint_A (f\langle \partial g,\, n\rangle - g\langle \partial f,\, n\rangle)\,dF \tag{3.17}$$

formulához jutunk. Ez a **második Green-formula**.

Ha az f és g függvényekre $f|A,\ g|A \equiv 0$, akkor a második Green-formula jobboldala 0, és

$$\langle f\,, \Delta g\rangle = \langle \Delta f,\, g\rangle.$$

Ugyanez teljesül, ha $\langle \partial g,\, n\rangle = \langle \partial f,\, n\rangle \equiv 0$. Az elöbbit **Dirichlet-feltételnek** az utóbbit **Neumann-feltételnek** szokás nevezni. (Ilyen feltételek esetén a Laplace-operátor szimmetrikus.)

3.4. Feladatok

1. Mekkora a felszine az $x^2 + y^2 - x = 0$ paraboloid azon részének, amit a $z = 4$ sík vág le belőle?

2. Legyen A egy $n \times n$-es valós elemű mátrix. Milyen feltétel mellett van az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ függvénynek primitív függvénye és mi az?

3. Integráljuk az $f(x, y, z) = xyz$ függvényt a
$$(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),)0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)$$
csúcspontokkal rendelkező kocka felszinén és magán a kockán!

4. Keresse meg az $f(x, y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ függvény lokális szélsőértékeit!

5. Határozza meg az $f(x, y) = x^3 + y^3 - x - y$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1\}$$
tartományon!

6. Terjesszük ki a 6. példát többdimenzióra, $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$.

7. Az xy-síkon a $(0, 0), (1, 0), (1, 2)$ csúcspontokkal adott háromszög tömegsűrűsége $f(x, y) = x + y + 1$. Számoljuk ki a tömegközéppontját.

8. Igaz-e, hogy $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ esetén
$$\partial_{xx} f(x, y) + \partial_{yy} f(x, y) = 0\,?$$

9. Számolja ki egy egyenletes sűrűségű félgömbfelület tömegközéppontját!

10. A felület legyen a $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$ félhenger azon része, amit az $x = 1$ és $x = 0$ síkok vágnak ki belőle. Normálisát a hengerből kifelé irányítjuk. Számolja ki a felületen a $g(x, y, z) = (0, y, z^2)$ vektor értékű függvény fluxusát!

11. Adjuk me a $z = x^2 + 2y^2$ felület érintősíkjának egyenletét az $x = 2, y = -1$ pontban!

12. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Cseréljük meg az alábbi integrálokban a sorrendet:
$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dydx, \qquad \int_{2}^{4} \int_{0}^{4-x} f(x, y)dydx.$$

13. Számoljuk ki az alábbi integrálokat:
$$\int_{0}^{1} \int_{y^2}^{1} ye^{-x^2} dxdy, \qquad \int_{0}^{1} \int_{y^2}^{1} y \sin(x^2) dxdy.$$

14. Számoljuk ki az $f(x,y) = xe^{xy}$ függvény integrálját a $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ téglalapon!

15. Van-e primitív függvénye az

$$f(x,y,z) = (xe^{xy}, \sin\frac{z}{x}, 5x+8, y)$$

vektorértékű függvénynek!

16. Legyen $f(x,y,z) = (z\log(1+\sin y), e^x y^2, z\,\mathrm{sh}\, y)$ és a tartomány határa legyen az $x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0$ félgömb és a $x^2+y^2 \le 1, z+0$ körlemez. Számoljuk ki a

$$\int_{\partial K} \mathrm{rot}\, f dF$$

felületi integrált.

17. Adjuk meg a primitív függvényét az

$$f(x,y,z) = (4x+57-6z^2, 5x+8, \frac{1}{z} - 12xz)$$

vektorértékű függvénynek!

4. fejezet

Mérték és integrál

4.1. Mérhető terek és mérhető függvények

Legyen $\mathcal{A}$ az X alaphalmaz bizonyos részhalmazainak családja. Megköveteljük a következő tulajdonságokat.

(i) Ha $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, akkor $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

(ii) Ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in I$ esetén, akkor $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszert **gyűrűnek** nevezzük, ha ezek tulajdonságok teljesülnek (ii)-ben véges I halmazokat értve. Ha I a megszámlálható halmazokon fut, akkor **σ-gyűrűhöz** jutunk. $\mathcal{A}$-t **Boole-algebrának** (illetve **σ-algebrának**) nevezzük, ha gyűrű (illetve σ-gyűrű) és $X \in \mathcal{A}$. A Boole-algebrák tehát minden elemnek a komplementumát is tartalmazzák.

1. példa: Legyen X egy véges halmaz. Ekkor a Boole-algebrákhoz és a σ-algebrához úgy jutunk, hogy vesszük X-nek egy $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ partícióját és $\mathcal{A}$ elemei az X_i halmazokból csinált uniók lesznek, beleértve az üreshalmazt is. $\square$

2. példa: $\mathbb{R}$-nek vegyük azokat a részhalmazait, amik maguk megszámlálhatók, vagy a komplementumuk megszámlálható. Így egy σ-algebrához jutunk. $\square$

Egy X alaphalmaz Boole-algebráinak metszete is Boole-algebra. Ugyanez igaz σ-algebrákra is. Ezért, ha $\mathcal{A}_0$ az X részhalmazainak egy családja, akkor van egy legszűkebb Boole-algebra vagy σ-algebra, ami $\mathcal{A}_0$-t tartalmazza. Ezt az $\mathcal{A}_0$ által **generált** Boole-algebrának, ill. σ-algebrának nevezzük. Hasonló a helyzet a gyűrűkkel és a σ-gyűrűkkel.

Legyen X egy metrikus tér. A nyílt halmazok által generált σ-algebra elemeit **Borel-halmazoknak** nevezzük. A szeparábilis metrikus terek a fontosak, mert ezek rendelkeznek az M_2 tulajdonsággal, azaz létezik nyílt hamazoknak egy olyan megszámlálható családja, hogy minden nyílt halmaz előáll ezekből unióként. A Borel-halmazok σ-algebráját ez a megszámlálható család generálja.

3. példa: A számegyenesen az $(a, b]$ és $[a, b]$ intervallumok Borel-halmazok. A Borel-halmazok σ-algebráját generálják a racionális végpontú nyílt intervallumok. $\square$

Ha $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak σ-algebrája, akkor az $(X, \mathcal{A})$ párt **mérhető térnek** nevezzük. Legyen $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek. Az $f : X_1 \to X_2$ leképezést **mérhetőnek** mondjuk, ha $A_2 \in \mathcal{A}_2$ esetén $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$. Mivel azok a $B \subset X_2$ halmazok, amelyekre $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ egy σ-algebrát alkotnak, f mérhetőségéhez elegendő ellenőrízni, hogy $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_1$ teljesül az olyan C halmazokra, amelyek generálják $\mathcal{A}_2$-t.

4. példa: Legyen $f : X_1 \to X_2$ egy folytonos leképezés az X_1 és X_2 metrikus terek között. Ha az $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek a Borel-halmazokkal vannak definiálva, akkor f mérhető. A mérhetőség egy bizonyos értelemben a folytonosság kiterjesztése. $\square$

Definiálni fogjuk mérhető terek szorzatát. Legyen $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ mérhető terek. Ha $A_1 \in \mathcal{A}_1$ $A_2 \in \mathcal{A}_2$, akkor az $A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$ halmazt **téglának** nevezzük. Legyen $\mathcal{B}_0$ $X_1 \times X_2$ azon részhalmazainak családja, amelyek előállnak véges sok páronként diszjunkt tégla egyesítéseként.

1. tétel: *$\mathcal{B}_0$ Boole-algebra.*

Legyen $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}_0$ által generált σ-algebra. Ekkor az $(X_1 \times X_2, \mathcal{A})$ mérhető teret $(X_1, \mathcal{A}_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2)$ **szorzataként** értelmezzük. Jelölés: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

2. tétel: *Legyenek $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ és $(X, \mathcal{A})$ mérhető terek, $f_1 : X \to X_1$ és $f_2 : X \to X_2$ leképezések. Az $f = (f_1, f_2) : X \to X_1 \times X_2$ leképezés mérhető az $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ σ-algebrára vonatkozóan akkor és csak akkor, ha az f_1 és f_2 leképezések mérhetők.*

3. tétel: *Legyenek X_1 és X_2 szeparábilis metrikus terek, $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ a Borel-halmazok σ-algebrája, továbbá legyen az $X_1 \times X_2$ metrikus tér Borel-halmazainak σ-algebrája $\mathcal{B}$. Ekkor $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ σ-algebrák szorzata.*

Bizonyítás: Legyen $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ és $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ a nyílt halmazok bázisa X_1-ben és X_2-ben. Ekkor az $A_i \times B_j$ alakú halmazok nyílt halmazok bázisát adják az $X_1 \times X_2$ metrikus térben. Ezért ezek a halmazok generálják a $\mathcal{B}$ σ-algebrát. Ugyanakkor ezek téglák, tehát $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}$.

Legyen $f_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ az első koordináta függvény, azaz $f_1(x_1, x_2) = x_1$, hasonlóan értelmezzük f_2-t. Ezek a függvények folytonosak, tehát mérhetők. Így (f_1, f_2) is mérhető, ez az identitás. Ezért $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$. $\square$

4. tétel: *Legyenek X_1 és X_2 szeparábilis metrikus terek, $f_n : X_1 \to X_2$ Borel-mérhető függvények egy sorozata, amely pontonként konvergál egy $f : X_1 \to X_2$ függvényhez. Ekkor f Borel-mérhető.*

Bizonyítás: Elég megmutatni, hogy minden nyílt halmaz inverze mérhető.

Egy $G \subset X_2$ nyílt halmazra legyen

$$G_n := \{x \in G : d(x, G^c) > 1/n\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezek nyílt halmazok, egyesítésük G. A bizonyítás adódik a

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{r,m} \left(\bigcap_{q \geq m} f_q^{-1}(G_r) \right)$$

formulából, ahol r, m, q természetes számok. $\square$

Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, akkor $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$-val jelöljük az $X \to \mathbb{R}$ mérhető függvények családját.

5. tétel: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f, g \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$. Ekkor $f+g, fg, |f| \in \mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$.*

Bizonyítás: Mivel $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető, a 2. Tétel szerint $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ is az. A $h : (x, y) \mapsto x + y, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és ezert mérhető. Így a $h \circ (f, g)$ függvény is mérhető. Ez nem más, mint $f + g$. Hasonlóan megy a többi bizonyítás. $\square$

Néha érdemes megengedni, hogy a függvények $\pm\infty$ értékeket is felvegyenek. Az $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ teret teljes szeparáblis metrikus térnek tekinthetjük a

$$d(x, y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$

metrikával.

6. tétel: *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mérhető függvények egy sorozata. Ekkor* $\sup f_n$ *és* $\limsup f_n$ *ugyancsak mérhetők.*

4.2. Mértéktér

Legyen $\mathcal{A}$ az X alaphamaz részhalmazaiból álló gyűrű. Ha a $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ olyan függvény, amelyre

$$\mu\left(\cup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i) \tag{4.1}$$

teljesül páronként diszjunkt A_i halmazok megszámlálható családjára, akkor μ-t **mértéknek** nevezzük. A (4.1) tulajdonságot **σ-additivitásnak** nevezzük.

Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és μ mérték $\mathcal{A}$-n, akkor az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármas neve **mértéktér**. A mértéktér **σ-véges**, ha léteznek olyan $A_i \in \mathcal{A}$ halmazok ($i \in \mathbb{N}$), hogy $X = \cup_i A_i$ és $\mu(A_i)$ véges.

7. tétel: *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Ekkor*

(i) Ha $A_1 \subset A_2 \subset ...$ mérhető halmazok, akkor

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) Ha $A_1 \supset A_2 \supset ...$ mérhető halmazok és $\mu(A_1)$ véges, akkor

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iii) Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor

$$\mu(\cup_n A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A (iii) tulajdonságot **σ-szubadditívitásnak** mondjuk.

Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértékteret **teljesnek** mondjuk, ha $B \subset A$ és $\mu(A) = 0$ esetén $B \in \mathcal{A}$. Másszóval, nullmértékű halmaz részhalmaza is nullmértékű.

Ha egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér nem teljes, akkor teljessé tehetjük úgy, hogy a mérhető halmazokat nullmértékű halmazok részével megváltoztatjuk:

$$\mathcal{A}^c := \{B \subset X : \text{létezik } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ hogy } A_1 \subset B \subset A_2, \quad \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$$

A definicióban szereplő B halmaz mértéke $\mu^c(B) := \mu(A_1)$ lesz. Ellenőrizendő, hogy ez nem függ A_1-től. Így egy teljes $(X, \mathcal{A}^c, \mu^c)$ mértéktérhez jutunk. A μ^c mérték megszorítva $\mathcal{A}$-ra a μ mérték.

μ **külső mérték**, ha minden részhalmazon értelmezve van és σ- szubadditív.

8. tétel: *Legyen μ külső mérték X részhalmazain. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz mértő, ha bármilyen $E \subset X$ halmazra*

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c).$$

(Ez a **Carathéodory-feltétel***.) Legyen $\mathcal{B}$ a mérhető halmazok halmaza. Ekkor $\mathcal{B}$ σ-algebra és μ σ-additív $\mathcal{B}$-n.*

Bizonyítás: Ha $A \in \mathcal{B}$, akkor $A^c \in \mathcal{B}$ nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$. Meg akarjuk mutatni, hogy

$$\mu(E) = \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)^c). \tag{4.2}$$

A bizonyítás több elemi lépésből áll.

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap A_2) + \mu(E \cap A_2^c) \\ \mu(E \cap A_2) &= \mu(E \cap A_2 \cap A_1) + \mu(E \cap A_2 \cap A_1^c) \end{aligned}$$

$$\mu(E \cap A_2^c) = \mu(E \cap A_2^c \cap A_1) + \mu(E \cap A_2^c \cap A_1^c)$$

(Ezek az egyenletek A_1 és A_2 mérhetőségén alapulnak.) A három egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\mu(E) = \Big[\mu(E \cap A_2 \cap A_1) + \mu(E \cap A_2 \cap A_1^c) + \mu(E \cap A_2^c \cap A_1)\Big] + \mu(E \cap (A_1 \cup A_2)^c).$$

Ha a szögletes zárójelben lévő három tagú összegről megmutatjuk, hogy $\mu(E \cap (A_1 \cup A_2))$, akkor (4.2) következik. Ezért $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$. Ha A_1 és A_2 diszjunktak is, akkor $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Amit eddig beláttunk A_1 és A_2 mérhető halmazokra, azt indukcióval be lehet látni $A_1, A_2, \dots, A_n$ mérhető halmazokra. Ezután egy $n \to \infty$ okoskodásra van még szükség, amit nem részletezünk. □

A következő eredmény alapvető a mértékelméletben.

9. tétel: *Legyen $\mathcal{A}_0$ az X alaphamaz részhalmazaiból álló gyűrű és az őt tartalmazó legszűkebb σ-gyűrű legyen $\mathcal{A}$. Ha μ_0 mérték $\mathcal{A}_0$-on σ-véges, akkor egyértelmüen létezik kiterjesztése $\mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás: Vázoljuk a gondolatmenetet. Értelmezünk egy μ külső mértéket a

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu_0(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_0, \quad A \subset \cup_i A_i \right\}$$

képlettel. Ekkor $A \in \mathcal{A}_0$ esetén $\mu_0(A) = \mu(A)$. $\mathcal{A}_0$ elemei eleget tesznek a Carathéodory-feltételnek. Ezért mérhetőek és az előző tétel mértéke adja a kiterjesztést. □

5. példa: Legyen $\mathcal{A}_0$ az $[a,b]$ intervallum olyan részhalmazainak családja, amelyek véges sok páronként diszjunkt intervallum uniójaként állnak elő. Ez egy Boole-algebra, tehát gyűrű. Egy ilyen halmaz μ_0 mértéke az őt előállító intervallumok hosszának összege legyen. Az $\mathcal{A}_0$ által generált σ-gyűrű a Borel-halmazok $\mathcal{B}$ σ-algebrája. Erre terjed ki a μ_0 mérték, μ lesz. Ezt a mértékteret teljessé téve az $([a,b], \mathcal{C}, \lambda)$ mértékteret kapjuk. Ezt nevezzük az $[a,b]$ intervallumon vett **Lebesgue-mértéknek**. Intervallum helyett a teljes számegyenest is vehetjük és hasonlóan kaphatjuk meg a Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}^n$-ben. □

4.3. Konvergenciák

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és f_n mérhető függvények egy sorozata. Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ **μ-majdnem mindenütt**, ha van egy olyan A mérhető halmaz, hogy $x \in A$ esetén $f_n(x) \to f(x)$ és $\mu(X \setminus A) = 0$. Jelölés: $f_n \to f$ μ-m.m.

10. tétel: (Jegorov) *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér és f_n mérhető függvények egy sorozata. Ekkor $f_n \to f$ μ-m.m. csakkor, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy $K_\varepsilon \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy ezen $f_n \to f$ egyenletesen és $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Bizonyítás: Legyen

$$A_{n,q} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > 1/q\}, \qquad B_{m,q} := \bigcup_{n \geq m} A_{n,q},$$

ahol m, n, q természetes számok. Rögzített q-ra a $B_{m,q}$ sorozat csökkenő. Az $f_n \to f$ μ-m.m. feltevésből adódik, hogy a metszet nullmértékű, ezért $\mu(B_{m,q}) \to 0$ ha $m \to \infty$.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot és válasszunk minden k természetes számhoz egy olyan m_k számot, hogy

$$\mu(B_{m_k,k}) < \varepsilon 2^{-k}.$$

Legyen

$$K_\varepsilon := X \setminus \bigcup_k B_{m_k,k}.$$

Ekkor

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \sum_k \mu(B_{m_k,k}) \leq \varepsilon.$$

Másrészt $x \in K_\varepsilon$ esetén $x \notin B_{m_k,k}$ és $x \notin A_{n,k}$ ha $n \geq m_k$. Ez azt jelenti, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

ha $n \geq m_k$. Tehát a K_ε halmazon a konvergencia egyenletes.

Másik irány: Válasszunk egy $\varepsilon(k) \to 0$ sorozatot. $\varepsilon(k)$-hoz van egy $K_{\varepsilon(k)}$ halmaz, hogy ezen a konvergencia egyenletes és

$$\mu(X \setminus K_{\varepsilon(k)}) < \varepsilon(k).$$

A $K_{\varepsilon(k)}$ halmazok egyesítésén pontonkénti konvergencia van.

$$\mu(X \setminus \cup_k K_{\varepsilon(k)}) \leq \mu(X \setminus K_{\varepsilon(m)}) \leq \varepsilon(m)$$

minden m-re, tehát $\mu(X \setminus \cup_k K_{\varepsilon(k)})$ nullmértékű. □

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és f_n mérhető függvények egy sorozata. Azt mondjuk, hogy $f_n \to f$ **mértékben**, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

teljesül.

1. lemma: (Borel-Cantelli) *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és*

$$\sum_n \mu(A_n) < \infty,$$

akkor null mértékű halmazt alkotnak azok az $x \in X$ pontok, amelyek végtelen sok A_n halmazban benne vannak.

Bizonyítás: Legyen $B_n := \cup_{m \geq n} A_m$. Ez egy fogyó sorozat és $\mu(B_n) \leq \sum_{m \geq n} \mu(A_m)$ a σ-szubadditívitás szerint. Tehát $\mu(B_n) \to 0$ és ezért

$$\mu(\cap_n B_n) = 0.$$

Mivel $x \notin \cap_n B_n$ csakkor, ha x csak véges sok A_n halmazban van benne, kész a bizonyítás. $\square$

11. tétel: *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy teljes mértéktér és f_n mérhető függvények egy sorozata.*

(i) Tételezzük fel, hogy $\mu(X)$ véges. Ha $f_n \to f$ μ-m.m., akkor $f_n \to f$ mértékben.

(ii) Ha $f_n \to f$ mértékben, akkor van olyan $f_{k(n)}$ részsorozat, hogy $f_{k(n)} \to f$ μ-m.m.

Bizonyítás: (i): Ha $f_n \to f$ mértékben nem teljesül, akkor van olyan pozitív ε és δ, hogy

$$\mu(\{x \in X : |f_{k(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\}) > \delta$$

egy $f_{k(n)}$ részsorozatra. Legyen

$$H_n := \{x \in X : |f_{k(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \qquad K_n := \cup_{m \geq n} H_m.$$

Ekkor K_n fogyó sorozat, $\mu(K_n) \geq \delta$. Mivel $\mu(X)$ véges, a K_n-ek metszete nem nullmértékű. Ha x benne van a metszetben, akkor $|f_{k(n)}(x) - f(x)| > \varepsilon$ minden n-re, ami ellentmondás.

(ii): Válasszunk egy $k(n)$ számsorozatot, hogy

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > 2^{-n}\}) < 2^{-n}$$

teljesül minden $m \geq k(n)$-re és minden n-re. Az

$$A_n = \{x \in X : |f_{k(n)}(x) - f(x)| < 2^{-n}\})$$

halmazok mértékének összege véges, ezért nulla mértékű halmaztól eltekintve egy $x \in X$ pont csak véges sok A_n halmazban van benne. Ez azt jelenti, hogy $f_{k(n)} \to f$ μ-m.m. $\square$

4.4. Lépcsős függvények

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és f egy mérhető függvény. f-t **lépcsős függvénynek** nevezzük, ha értékkészlete véges. Egy ilyen függvény

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{H_i} \tag{4.3}$$

alakú, ahol $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ az X alaphalmaz egy véges particiója. Két véges mérhető partició közös finomítása is egy véges mérhető partició. Ezért lépcsős függvények lineáris kombinációja és szorzata is az.

6. példa: Tekintsük a következő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le t \le 1 \quad \text{és } t \text{ irracionális,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez integrálható lépcsős függvény, Lebesgue-integrálja 1. □

12. tétel: *Ha $g : X \to \mathbb{R}$ egy korlátos mérhető függvény, akkor van lépcsős függvényeknek egy olyan f_n sorozata, hogy $f_n \to g$ egyenletesen.*

Bizonyítás: Legyen $g : X \to [a, b)$ és $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ az intervallum egy felosztása. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{1}_{H_i}, \qquad H_i = g^{-1}([t_{i-1}, t_i))$$

lépcsős függvény. Ha a felosztást finomítjuk akkor g egyenletes közelítését kapjuk. □

Az (4.3) függvény **integrálható,** ha $\mu(H_i) = \infty$ esetén $c_i = 0$. Ekkor az **integrál**

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(H_i),$$

ahol 0-szor ∞ az 0.

13. tétel: *Az integrálható lépcsős függvények rendelkeznek következő tulajdonságokkal.*

(i) *Az integrál lineáris funkcionál.*

(ii) $\|f\|_1 = I(|f|)$ *norma,* $I(f) \le \|f\|$.

(iii) $\mu(\{x \in X : |f(x)| \ge \eta\}) \le \eta^{-1} I(|f|)$ *minden* $\eta > 0$ *számra (***Csebisev-egyenlőtlenség***).*

4.5. Integrál

Ha a $g : X \to \mathbb{R}$ függvény véges tartójú, azaz $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$ véges, és g korlátos, akkor egyenletesen közelíthetjük integrálható lépcsős függvényekkel, és azok integráljának a limesze lesz g függvény $I(g)$ integrálja. Egy általános $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvényt levágással ilyen g függvényekkel fogjuk közelíteni, hogy értelmezhessük az integrált.

Véges tartójú korlátos függvények integrálja is rendelkezik a 13. Tétel tulajdonságaival.

Feltételezzük, hogy az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér σ-véges, azaz vannak olyan $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ mérhető halmazok, hogy $\mu(A_n) < \infty$ és $X = \cup_n A_n$. Legyen a $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény így értelmezve:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} t & \text{ha } -n \leq t \leq n, \\ n & \text{ha } t > n, \\ -n & \text{ha } t < -n. \end{cases}$$

Az $\mathcal{L}^0(X, \mathcal{A})$ téren értelmezzük a T_n levágási operátorokat:

$$T_n f := (\varphi_n \circ f)\mathbf{1}_{A_n}$$

Így $T_n f$ véges tartójú korlátos függvény, $|T_n f| = T_n |f|$.

$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, ha az $I(|T_n f|)$ sorozat véges határértéke létezik. Egyébként ha $f \geq 0$, akkor, $T_n f$ növő sorozat, így $I(T_n f)$ határértéke biztosan létezik, de esetleg végtelen. Ha f integrálható, akkor $\lim_{n\to\infty} I(T_n f)$ létezik, és ezt f integráljának mondjuk, jelölés $\int f \, d\mu$. Az integrál fontosabb tulajdonságai

(i) Az integrál lineáris funkcionál.

(ii) Ha $f \geq 0$, akkor $\int f \, d\mu \geq 0$.

(iii) $\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$ norma, $| \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu =: \|f\|_1$.

(iv) $\mu(\{x \in X : |f(x)) \geq \eta\}) \leq \eta^{-1} \|f\|_1$ minden $\eta > 0$ számra (Csebisev-egyenlőtlenség).

Ha $A \in \mathcal{A}$ mérhető halmaz, akkor ezen vett integrált is definiálhatunk:

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Evidens, hogy ha A a diszjunkt A_1 és A_2 halmazok uniója, akkor

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A_1} f \, d\mu + \int_{A_2} f \, d\mu. \tag{4.4}$$

7. példa: Általában valós függvények integráljával foglalkoztunk, de komplex függvényekre könnyen átléphetünk. Ha $f : X \to \mathbb{C}$, akkor $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, ahol $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ valós függvények. Így

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \mathrm{i} \int f_2(x)\,dx.$$

Tehát f integrálható, ha $|f_1|$ és $f_2|$ inegrálható, ami ekvivalens azzal, hogy $|f|$ integrálható,

$$|f_1 + \mathrm{i} f_2| \le |f_1| + |f_2| \le 2|f_1 + \mathrm{i} f_2|.$$

$x > 0$ esetén a

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

integrál létezik, de x helyébe tehetünk egy $a + \mathrm{i}b$ komplex számot az $a > 0$ feltétellel:

$$|t^{(a+\mathrm{i}b)-1} e^{-t}| = t^{a-1} e^{-t}.$$

Tehát a **gamma-függvény** kiterjeszthető a komplex sík egy részére is. □

8. példa: Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Ha $\mu(X) = 1$, akkor ezt a valószínűségszámításban **valószínűségi mezőnek** hívják, az $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény **valószínűségi változó**, integrálja pedig **várható érték**.

Az $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény segítségével a μ mértéket at lehet transzformálni a számegyenesre:

$$\nu(H) := \mu(f^{-1}(H)) \qquad (H \subset \mathbb{R} \text{ Borel-halmaz}).$$

Ekkor

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} t\,d\nu(t)$$

és általánosabban

$$\int (g \circ f)(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,d\nu(t)$$

egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény feltéve, hogy az egyik integrál létezik.

A ν mértéket egy $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény segítségével is meg lehet adni, ha

$$F(t) = \nu((-\infty, t)) = \mu(\{x \in X : f(x) < t\}) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.5}$$

(Ennek szokásos neve **eloszlásfüggvény**.)

A fentieket több dimenzióra is általánosítani lehet. Ha $f : X \to \mathbb{R}^k$ mérhető függvény, akkor a μ mérték indukál egy ν mértéket $\mathbb{R}^k$-n. Ha $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, akkor az $F : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ eloszlásfüggvény

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, \dots, t_k) &= \nu((-\infty, t_1) \times \ldots \times (-\infty, t_k)) \\ &= \mu(\{x \in X : f_1(x) < t_1, \dots, f_k(x) < t_k\}). \end{aligned}$$

(Most f vektorértékű valószínűségi változó.) □

2. lemma: *Legyen* $\mu(X) < \infty$ *és* f_n *integrálható függvények olyan növő sorozata, hogy* $0 \le f_n \le C$, *és legyen* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Ekkor* f *integrálható és* $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

Bizonyítás: $\int f_n\,d\mu \le \int f\,d\mu$. f_n pontonként és mértékben konvergál f-hez. Tehát van olyan nagy n, hogy az $A := \{x \in X : f(x) - f_n(x) > \varepsilon\}$ halmazra $\mu(A) < \delta$. Ekkor

$$\int (f - f_n)\,d\mu \le 2C\delta + \varepsilon\mu(X),$$

ami tetszőlegesen kicsi. □

14. tétel: (Fatou-Beppo Levi) *Legyen* f_n *integrálható függvények olyan növő sorozata, hogy* $\int f_n\,d\mu \le C \in \mathbb{R}$, *és legyen* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Ekkor* f μ*-m.m. véges, integrálható és* $\|f - f_n\|_1 \to 0$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $f_n \ge 0$. Fix k-ra $T_k f_n$ növően tart $T_k f$-hez. Alkalmazható a lemma, $T_k f$ integrálja legfeljebb C, és ezért f integrálható, és integrája legfeljebb C. Ekkor persze f $\mu - m.m.$ véges.

Mivel f integrálható, van egy véges mértékű halmaz, hogy a komplementumán vett integrálja tetszőlegesen kicsi. Ezért $\|f - f_n\|_1 \to 0$ bizonyításában feltehetjük, hogy $\mu(X)$ véges.

Legyen $u_n := f - f_n$. Ekkor $k < \ell$ esetén

$$T_\ell u_1 - T_k u_1 \ge T_\ell u_n - T_k u_n,$$

mert az u_n függvények egy fogyó sorozatot alkotnak. Ha k-t nagynak választjuk, akkor $T_\ell u_1 - T_k u_1$ integrálja kisebb, mint $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\|u_n\|_1 \le \varepsilon + \|T_k u_n\|_1$$

és a második tagot a Jegorov-tétel segítségével becsüljük. Egy $A \subset X$ halmazon egyenletes kovergenciája van u_n-nek a 0-hoz, így itt az integrál ε-nál kisebb ha k-tól függoen n-et nagynak választjuk. Az $X \setminus A$ halmazon az integrál legfeljebb $k\mu(X \setminus A)$, hiszen k a függvény korlátja. Az A választása lehet olyan, hogy $k\mu(X \setminus A) < \varepsilon$. Tehát $\|u_n\|_1 \le 3\varepsilon$. □

A tételnek egy fontos következménye a $\nu(A) := \int_A f\,d\mu$ funkcionálról szól. Ez végesen additív, lásd (4.4). A σ-additivitáshoz elég monoton növő $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ esetén a folytonosság. Ez következménye a Fatou-Beppo Levi tételnek. Tehát ν egy véges mérték (ha f integrálható).

15. tétel: (Lebesgue-féle dominált konvergencia) *Legyen* f_n *integrálható függvények olyan sorozata, hogy* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ μ*-m.m. és létexik egy* h *integrálható függvény, amelyre* $|f_n| \le h$. *Ekkor* f *integrálható,*

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu \quad \textit{és} \quad \|f - f_n\|_1 \to 0.$$

Bizonyítás: Mivel h integrálható, van olyan véges mértékű H halmaz, hogy $\int_{X\setminus H} h\,d\mu$ kicsi. Ekkor

$$\int_{X\setminus H} |f - f_n|\,d\mu \le \int_{X\setminus H} 2h\,d\mu$$

ugyancsak kicsi, tehát a norma konvergenciát elég a H halmazon belátni. Ezért feltételezhetjük, hogy $\mu(X)$ véges. Legyen $\nu(B) := \int_B h\,d\mu$, ez véges mérték, és $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ν-m.m. Alkalmazzuk a Jegorov-tételt: $\varepsilon > 0$-hoz van $A \subset X$, hogy A-n az $f_n \to f$ konvergencia egyenletes és $\nu(X \setminus A) \le \varepsilon$. Ekkor $\int_A |f_n - f|d\mu \to 0$ és

$$\int_{X\setminus A} |f_n - f|d\mu \le \int_{X\setminus A} 2hd\mu \le 2\varepsilon.$$

Tehát

$$\int_X |f_n - f|d\mu \le 3\varepsilon$$

ha n elég nagy. □

9. példa: A Fourier-transzformáltja az $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvénynek

$$\hat{f}(t) = \int e^{\mathrm{i}tx} f(x)\,dx,$$

lásd a 6. fejezetet. Ezt szeretnénk deriválni:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} &= \int \frac{e^{\mathrm{i}t_n x} - e^{\mathrm{i}t_0 x}}{t_n - t_0} f(x)\,dx = \\ &= \int \frac{\cos(t_n x) - \cos(t_0 x)}{t_n - t_0} f(x)\,dx + \mathrm{i} \int \frac{\sin(t_n x) - \sin(t_0 x)}{t_n - t_0} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Mindkét integrál határértékét kell megnéznünk, az egyszerűség kedvéért az elsőt vizsgáljuk részletesen a Lagrange-féle középérték tétel felhasználásával:

$$\int \frac{\cos(t_n x) - \cos(t_0 x)}{t_n - t_0} f(x)\,dx = -\int x f(x) \sin(u_n x)\,dx,$$

ahol $u_n \in [t_n, t_0]$. Ha $h(x) := |xf(x)|$ integrálható, akkor erre és az $f_n(x) = xf(x)\sin(u_n x)$ sorozatra alkalmazzuk a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt, feltéve, hogy $|xf(x)|$ integrálható. Tehát $f_n \to 0$ és $\int f_n(x)\,dx \to 0$.

Hasonlóan járunk el a másik taggal. Tehát ha $|xf(x)|$ integrálható, akkor

$$\frac{\partial \hat{f}(t)}{\partial t} = \mathrm{i} \int e^{\mathrm{i}tx} x f(x)\,dx,$$

azaz egyszerűen be lehet deriválni az integráljel mögé. □

Az előző példa egy általános tétel speciális esete. A bizonyítás a fenti gondolatmenethez hasonló, a Lagrange-féle középértéktételen alapul.

16. tétel: *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum és $k : X \times (a, b) \to \mathbb{R}$. Tételezzük fel a következőket:*

(i) Minden fix $y \in (a, b)$-re $f(x, y) \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(ii) A parciális derivált

$$\frac{\partial}{\partial y} k(x, y)$$

minden $y \in (a, b)$ pontra létezik és az $y_0 \in (a, b)$ pontban folytonos.

(iii) Létezik egy $g \in L^1(X\mathcal{A}, \mu)$ függvény, amire

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \right| \leq g(x)$$

minden $y \in (a, b)$ pontra.

Ekkor az $u(y) = \int k(x, y)\, d\mu(x)$ függvény deriváltja az y_0 pontban

$$\int_X \frac{\partial}{\partial y} k(x, y_0)\, d\mu(x).$$

10. példa: Az általános integrálelmélet fontos speciális esete az $\mathbb{R}$-en értelmezett függvények Lebesgue-integrálja. Ezt összehasonlítjuk az úgynevezett Riemann-integrállal, amit főleg folytonos függvények integráljának tekintünk egy kompakt intervallumon, lásd az 1. Fejezetet. Ilyen feltételek mellett a függvény automatikusan korlátos. A Lebesgue-integrál esetében a függvény mérhető és mérhető halmazon történhet az integrálás. (Ezek a feltételek persze nem vonják maguk után az integrál létezését.)

A Riemann-integrálra

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c .$$

A Lebesgue-integrálra sokkal több igaz. Ha $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ diszjunkt unió és

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx$$

és az abszolut konvergencia miatt az összeg sorrendtől független.

A Riemann-integrál esetén a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

integrált **improprius integrálnak** szokás nevezni. A sor váltakozó előjelű és alkalmazható rá a Leibniz-tétel, tehát konvergens, véges összeggel. Viszont

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$$

és ezért a

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Lebesgue-integrál nem létezik. □

4.6. Abszolut folytonosság és szingularitás

Legyen μ és ν mértékek az $(X,\mathcal{A})$ mérhető téren. Azt mondjuk, hogy ν **abszolút folytonos** μ-re, jelölésben $\nu << \mu$, ha $\mu(A)=0$ esetén $\nu(A)=0$. Azt mondjuk, hogy ν és μ **szingulárisak**, ha van olyan $A\in\mathcal{A}$ halmaz, amelyre $\mu(A)=0$ és $\nu(X\setminus A)=0$. Jelölésben $\mu\perp\nu$.

3. lemma: *Ha μ és ν véges mértékek az $(X,\mathcal{A})$ mérhető téren, $\nu<<\mu$ és ν nem azonosan 0, akkor létezik $A\in\mathcal{A}$ és $\varepsilon>0$, hogy $\mu(A)>0$ és $A\supset B\in\mathcal{A}$ esetén $(\nu-\varepsilon\mu)(B)\ge 0$.*

Bizonyítás: Tekintsük a $\nu-\mu/n$ előjeles mértékeket, $n\in\mathbb{N}$. Ezek előállnak szinguláris mértékek különbségeként, így $X=A_n\cup B_n$, ahol A_n részein $\nu-\mu/n$ pozitív, B_n részein pedig negatív. Legyen

$$A_0=\cup_n A_n,\quad B_0=\cup_n B_n.$$

Ekkor

$$0\le\nu(B_0)\le\frac{1}{n}\mu(B_0)\quad\text{és}\quad\nu(B_0)=0.$$

Következésképpen $\nu(A)>0$ és az abszolut folytosság miatt $\mu(A_0)>0$. Van olyan n, hogy $\mu(A_n)>0$. A_n-t vehetjük az állítás A halmazának. □

17. tétel: (Radon-Nikodym-tétel) *Legyenek μ és ν σ-véges mértékek az $(X,\mathcal{A})$ mérhető téren. Ha ν abszolút folytonos μ-re, akkor van olyan $f: X\to\mathbb{R}^+$ mérhető függvény, hogy*

$$\nu(A)=\int_A f(x)\,dx\qquad(A\in\mathcal{A}).$$

Továbbá az f függvény egyértelmű.

Bizonyítás: A véges mértékek esetére koncentrálunk. Legyen $\mathcal{K}$ azoknak a pozitív mérhető f függvényeknek a halmaza, amikre

$$\int_E f\,d\mu \le \nu(E)$$

minden $E \in \mathcal{A}$ halmazra. Legyen továbbá

$$t := \sup\left\{ \int f\,d\mu \,:\, f \in \mathcal{K} \right\}.$$

Vegyünk egy olyan f_n függvénysorozatot $\mathcal{K}$-ból, hogy

$$\lim_n \int f_n\,d\mu = t.$$

Legyen $g_n = \max\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Ekkor $f := \sup f_n = \lim_n g_n$ és $\int f\,d\mu = t$. Ez lesz az a függvény, amit kerestünk.

$$\nu_0(E) := \nu(E) - \int_E f\,d\mu$$

egy pozitív mérték. Az kell, hogy azonosan 0. Tételezzük fel, hogy nem. Ekkor alkalmazható rá az előző lemma. Az ottani A halmazzal és $\varepsilon > 0$-val definiálva a $g := f + \varepsilon \mathbf{1}_A$ függvényt $g \in \mathcal{K}$ teljesül, de $\int g\,d\mu > t$, ami ellentmondás. $\square$

11. példa: A 8. példa folytatásaként tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^k$ normalizált ν mértéke abszolut folytonos a Lebesgue-mértékre. Ekkor

$$\nu(H) = \int_H p(t_1, t_1, \dots, t_k)\,dt_1 \dots dt_k$$

egy pozitív integrálható $p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényre, amit **sűrűségfüggvénynek** is neveznek.

12. példa: A **feltételes várható érték** fogalma a valószínűségelméletben használatos, de kapcsolódik a Radon-Nikodym-tételhez.

Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy véges mértéktér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ egy σ-algebra és $0 \ge f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. A μ mérték $\mathcal{A}$-ra való megszorítását μ_0-lal jelöljük. Legyen

$$\nu(A) = \int_A f(x)\,d\mu(x) \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Ekkor ν mérték $\mathcal{A}$-n és abszolut folytonos μ_0-ra. Ezért van olyam $\mathcal{A}$-ra mérhető $E_{\mathcal{A}}(f)$ függvény, hogy

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \int_A E_{\mathcal{A}}(f)(x)\,d\mu(x)$$

minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Ez f feltételes várható értéke.

A feltételes várható értéket eddig pozitív függvényre néztük. Ha $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, akkor $f = f_+ - f_-$, ahol f_+ és f_- pozitív integrálható függvények. Legyen $E_\mathcal{A}(f) = E_\mathcal{A}(f_+) - E_\mathcal{A}(f_-)$. Megmutatható, hogy a feltételes várható érték lineáris leképezés.

Ha $g : X \to \mathbb{R}$ korlátos $\mathcal{A}$-ra mérhető függvény, akkor

$$E_\mathcal{A}(fg) = E_\mathcal{A}(f)g. \tag{4.6}$$

Ez lépcsős g-re látszik a definicióból, az általános g esete pedig approximációval adódik.□

18. tétel: (Lebesgue-felbontás) *Legyenek μ és ν σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ekkor egyértelműen vannak olyan ν_1 ν_2 mértékek, hogy $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ν_1 abszolút folytonos μ-re, továbbá ν_2 és μ szingulárisak.*

4.7. Szorzatmérték

Legyen $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ és $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ véges mértékterek. Ezek szorzata az $X_1 \times X_2$ alaphalmaz $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ σ-algebráján értelmezet olyan μ mérték, amire igaz, hogy

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Az ilyen mérték létezése és egyértelműsége nem nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy ν_1 és ν_2 szorzatmértékek, és legyen $\mathcal{M}$ az a σ-részalgebrája $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$-nek, ahol ők megegyeznek. Természetesen $\mathcal{M}$ tartalmazza a tégla halmazokat és egy σ-algebra. Ezért $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. A szorzatmérték unicítása megvan. Az egzisztenciához konstruálni lehet. (Érdemes megjegyezni, hogy mind az unicítás mind pedig az egszisztencia adódik a 9. Lemmából, ha a szorzatmértéket definiáljuk a téglahalmazok által generált Boole-algebrán.)

4. lemma: *Legyen $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Ha $x_1 \in X_1$, akkor legyen*

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\}.$$

Ekkor A_{x_1} mérhető. Továbbá a $k_A(x_1) := \mu_2(A_{x_1})$ függvény mérhető.

Bizonyítás: Azok az $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, amire A_{x_1} mérhető, σ-algebrát alkotnak, és benne vannak a téglák. Ezért A_{x_1} mindig mérhető.

Hasonló a bizonyítása annak, hogy $k_A(x_1)$ mérhető függvény. (Azok a halmazok, amire mérhető, σ-algebra ...). □

Ezután a szorzat mértéket definiálhatjuk:

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A) := \int \mu_2(A_{x_1})\, d\mu(x_1) = \int \left(\int \mathbf{1}_A(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1). \tag{4.7}$$

Az additivitást konnyü látni, a σ-additivitás pedig a Fatou-Beppo Levi tételből következik.

$$\int\left(\int \mathbf{1}_A(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)=\int\left(\int \mathbf{1}_A(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\right)d\mu_2(x_2) \tag{4.8}$$

tégla halmazokra igaz, ezért minden mérhető halmazra is igaz.

Ha μ_1 és μ_2 nem véges mértékek, akkor az X_1 és X_2 halmazokat előállíjuk megszámlálható véges mértékű halmazok uniójaként és azokra alkalmazzuk a szorzat konstrukciót.

19. tétel: (Fubini-Lebesgue) *Legyen* $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ *és* $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ *mértékterek szorzata* $(X,\mathcal{A},\mu)$.

(i) Ha az $f: X\to\mathbb{R}$ *függvény mérhető, akkor* $f_{x_1}: x_2\mapsto f(x_1,x_2)$ *is mérhető.*

(ii) Ha az $f: X\to\mathbb{R}$ *függvény integrálható, akkor* f_{x_1} *is az. Továbbá*

$$k(x_1):=\int f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

is integrálható és

$$\begin{aligned}\int f(x_1,x_2)\,d\mu(x_1,x_2) &= \int\left(\int f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)=\\ &= \int\left(\int f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\right)d\mu_2(x_2)\end{aligned}$$

(iii) Megfordítva: Ha az előző formula jobboldala értelmes, akkor f *integrálható és a jobboldal megadja az integrált.*

13. példa: Az $X:=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ halmaz Lebesgue-mértékét felfoghatjuk szorzatmértéknek, ami polárkoordinátás integrálás alapja.

Legyen $\mathbb{R}^< := \{x\in\mathbb{R} : 0<x\}$ egy félegyenes és $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ egy kör. Ha az X halmaz (a,b) elemét $a+\mathrm{i}b=Re^{\mathrm{i}\varphi}$ komplex számnak fogjuk fel, akkor (a,b) azonosítható az $(R,e^{\mathrm{i}\varphi})\in\mathbb{R}^<\times\mathbb{T}$ ponttal. X tehát az $\mathbb{R}^<\times\mathbb{T}$ szorzathalmaz.

A $\mathbb{R}^<$ halmazon veszünk egy olyan μ_1 mértéket, aminek Radon-Nikodym deriváltja a Lebesgue-mértékre az $f(t)=t$ függvény. Ekkor

$$\mu_1([x,y])=\int_x^y t\,dt=\frac{1}{2}(y^2-x^2).$$

$\mathbb{T}$-t azonosítjuk a $[0,2\pi)$ intervallummal, $e^{\mathrm{i}\varphi}\leftrightarrow\varphi\in[0,2\pi)$. Az intervallum Lebesgue-mértéke adja $\mathbb{T}$-n a μ_2 mértéket.

Ekkor az $[x,y]\times[\varphi_1,\varphi_2]$ halmaz szorzatmértéke

$$\frac{1}{2}(y^2-x^2)(\varphi_2-\varphi_1),$$

ami megegyezik $\mathbb{R}^2$ megfelelő körgyűrűjének a φ_1 és φ_2 szögek közé eső részének területével. □

4.8. L^p-terek

5. lemma: *Ha* $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *és* $a, b \geq 0$, *akkor*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

A lemmában szereplő p és q számokat egymás **konjugáltjainak** nevezzük. Érdemes a $p = 1$ és $p = \infty$ eseteket is megengedni. Ekkor rendre $q = \infty$ és $q = 1$. (A lemmát nem bizonyítjuk, de a fejezetvégi 16. gyakorlat útmutatást tartalmaz a bizonyításhoz.)

20. tétel: (Hölder-egyenlőtlenség) *Ha* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *és* $1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *akkor*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| c_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p c_i\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q c_i\right]^{1/q}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n \geq 0$ *számokra.*

Bizonyítás: Legyen

$$N := \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p c_i\right]^{1/p} \quad \text{és} \quad M := \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q c_i\right]^{1/q}.$$

Alkalmazzuk a megelőző lemmát az $a = |x_i|/N$ és $b = |y_i|/M$ választással és szorozzuk be c_i-vel. Ekkor

$$\frac{|x_i y_i| c_i}{NM} \leq \frac{|x_i|^p c_i}{pN^p} + \frac{|y_i|^q c_i}{qM^q}\,.$$

Ezután összegezzünk i-re:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i| c_i}{NM} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p c_i}{pN^p} + \frac{|y_i|^q c_i}{qM^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Ez maga a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

21. tétel: (Minkowski-egyenlőtlenség) *Ha* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *és* $1 \leq p$, *akkor*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p c_i\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p c_i\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p c_i\right]^{1/p}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n \geq 0$ *számokra.*

Bizonyítás: A $p = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $p > 1$, és induljunk ki a

$$(a+b)^p c = \Big((a+b)^{p-1} c^{1/q}\Big) a c^{1/p} + \Big((a+b)^{p-1} c^{1/q}\Big) b c^{1/p}$$

azonosságból. Használjuk fel ezt:

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i \le \sum_{i=1}^{n}\Big((|x_i|+|y_i|)^{p-1}c_i^{1/q}\Big)|x_i|c_i^{1/p} + \sum_{i=1}^{n}\Big((|x_i|+|y_i|)^{p-1}c_i^{1/p}\Big)|y_i|c_i^{1/p}.$$

Most alkalmazzuk mindkét tagra a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i &\le \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i\right]^{1/q}\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p c_i\right]^{1/p} + \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i\right]^{1/q}\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p c_i\right]^{1/p},\end{aligned}$$

ugyanis $(p-1)q = p$. Elosztva mindkét oldalt a $[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i]^{1/q}$ kifejezéssel, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i\Big]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p c_i\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p c_i\right]^{1/p}$$

$(1-1/q = 1/p)$. Ez majdnem a bizonyítandó. Mivel

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p c_i\Big]^{1/p} \le \Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p c_i\Big]^{1/p},$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következik. □

Legyen $p \ge 1$. Ekkor $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ azoknak a mérhető f függvényeknek a halmaza, amelyekre $|f|^p$ integrálható. Az ilyen függvényekre

$$\|f\|_p := \Big[\int |f|^p \, d\mu\Big]^{1/p}.$$

A norma háromszögegyenlőtlensége lépcsős függvényekre azonnal következik a fenti Minkowski-egyenlőtlenségből, tetszőleges függvények pedig approximálhatók lépcsős függvényekkel. Ugyanez az érvelés adja a Hölder-egyenlőtlenség függvényekre vonatkozó alakját:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad (f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu),\ g \in L^q(X,\mathcal{A},\mu),\ p^{-1}+q^{-1}=1).$$

Az L^p terek normált terek, de Banach-terek is.

14. példa: A **gamma-függvény** definiciója

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

és megmutatjuk, hogy $\log\Gamma(x)$ egy konvex függvény. Ez a

$$\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}$$

egyenlötlenséget jelenti. A Hölder-egyenlőtlenség alkalmazása érdekében

$$\lambda=\frac{1}{p}, 1-\lambda=\frac{1}{q}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \int_0^\infty t^{x/p-1/p}e^{-t/p}t^{x/q-1/p}e^{-t/q}\,dt\\ &\le \left[\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt\right]^{1/q}\\ &= \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q}.\end{aligned}$$

(Ha deriválással igazolnánk a konvexitást, akkor meg kéne gondolno, hogy be lehet differenciálni az integrál mögé.) □

4.9. Feladatok

1. Igazolja, hogy ha az A és B halmazok benne vannak egy gyűrűben, akkor a metszetük is.

2. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy f és f' mérhetők.

3. Igazolja, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton, akkor Borel-mérhető.

4. Az $(X,\mathcal{A})$ mérhető téren $F_n: X\to\mathbb{R}$ mérhető függvények egy sorozata és $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ az X halmaz mérhetH o részhalmazokból álló fedése. Tételezzük fel, hogy $x\in A_i\cap A_j$ esetén $f_i(x)=f_j(x)$. Igazoljuk, hogy az $f(x)=f_i(x)$, ha $x\in A_i$ módon megadott függvény mérhető.

5. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és $t\in\mathbb{R}$ esetén $g(t)$ az $f(x)=t$ egyenlet gyökeinek száma. Mutassuk meg, hogy g mérhető.

6. Legyen μ külső mérték az X halmazon és $F: X\to Y$ egy leképezés. Igazoljuk, hogy $A\mapsto\mu(F^{-1}(A))$ külső mérték az Y halmazon.

7. Igazoljuk, hogy
$$\int |f(x)|\,d\mu(x)=\left|\int f(x)\,d\mu(x)\right|<\infty$$
esetén $f(x)\ge 0$ μ-m.m., vagy $f(x)\le 0$ μ-m.m.

8. Igazoljuk, hogy a (4.5) eloszlásfüggvény balról folytonos, de nem feltétlenül folytonos.

9. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvényeire teljesül a $\mu(\{x \in X : f(x) \leq y < g(x)\})$ minden $y \in \mathbb{R}$ számra. Igazoljuk, hogy $\mu(\{x \in X : f(x) < g(x)\}) = 0$.

10. Legyen $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) < \delta$ esetén
$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon.$$

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ korlátos mérhető függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor intehrálható, ha
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 2^{-n}\}) < \infty.$$

12. Adjunk meg egy folytonos $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre
$$\lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 f(x)\, dx$$
létezik és véges, de f nem integrálható $[0, 1]$-en.

13. $$\lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-2x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = ?$$

14. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér és $f, f_n, g, g_n : X \to \mathbb{R}$ függvények. Igazoljuk, hogy ha $f_n \to f$ és $g_n \to g$ mértékben, akkor $f_n g_n \to fg$ mértékben.

15. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértékterek. Legyen $E \subset X \times Y$ esetén
$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \qquad \text{és} \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$
Igazoljuk, hogy ha $\mu(X \setminus E^y) = \nu(E_x) = 0$ minden $x \in X, y \in Y$ esetén, akkor E nem mérhető.

16. Igazolja az 5. lemmát! (Útmutatás: Adjon geometriai interpretációt az
$$A_1 = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p} \quad \text{és} \quad A_2 = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}$$
területeknek, gondolva arra, hogy az x^{p-1} és az y^{q-1} függvények egymás inverzei!)

17. Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ véges mértéktér. Igazoljuk, hogy
$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^r(X, \mathcal{B}, \mu),$$
ha $1 \leq p < r \leq \infty$. Mi van akkor, ha a mérték nem véges?

18. Igazolja, hogy a számegyenes Borel-halmazainak σ-algebráját generálják az olyan $(-\infty, t]$ intervallumok, amelyek végpontja racionális szám!

19. Igazolja, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \text{ és } p, q \text{ relatív prímek,} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

majdnem mindenütt folytonos!

20. Mutassuk meg, hogy a

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

függvény jól definiált $x > 0$-ra és differenciálható. (Mi a helyzet, ha x olyan komplex szám, aminek valós része > 0?)

21. Mutassuk meg, hogy a $(0, +\infty)$ intervallumon a

$$x \mapsto \log \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

függvény konvex. (Útmutatás: Használjuk a Hölder-egyenlőtlenséget.)

22. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy $x^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx} f(x) \, dx$$

kétszer differenciálható.

23. Van-e olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, amely nem Borel-mérhető? (Útmutatás: Egy függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.)

24. Ha $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz, akkor legyen $\mu(H)$ a H-ban lévő racionális számok száma! (Tehát $\mu(H) = +\infty$, ha H-ban végtelen sok racionális szám van.) Igaz-e, hogy μ σ-véges mérték?

5. fejezet

Mérték topológikus téren

5.1. Lokálisan kompakt terek

Egy topológikus tér lokálisan kompakt, ha minden pontjának van olyan környezete, amelynek lezárása kompakt. Ha egy lokálisan kompakt tér nem kompakt, akkor egy pont hozzávételével kompaktifikálható: a hozzáadott pont környezetei a kompakt halmazok komplementumai. A hozzáadott pontot **végtelen pontnak** mondjuk, amihez jutottunk az az **Alexandrov-féle kompaktifikáció**.

Ebben a fejezetben csak olyan lokálisan kompakt terekkel foglalkozunk, amelyek metrizálhatók és létezik kompakt halmazok olyan növő sorozata, amik lefedik a teret. (Utóbbi azt jelenti, hogy a kompaktifikáláskor a végtelen pontnak van megszámlálható környezetbázisa.) X mindig ilyen teret fog jelenteni.

1. lemma: *Létezik X kompakt részhalmazainak olyan H_n sorozata, hogy*

$$H_1 \subset \operatorname{int} H_2 \subset H_2 \subset \operatorname{int} H_3 \subset \dots$$

és $\cup_n H_n = X$.

Ha $\mathcal{U} := \{U_i : i \in I\}$ és $\mathcal{V} := \{V_j : j \in J\}$ nyílt fedések, akkor $\mathcal{U}$ **alárendeltje** $\mathcal{V}$-nek, ha minden U_i-re igaz, hogy $\overline{U_i} \subset V_j$ valamely $j \in J$-re.

Az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény **tartója**

$$\operatorname{supp} f := \{x \in X : f(x) \neq 0\} \text{ lezártja .}$$

Egy nyílt fedés $\mathcal{U} := \{U_i : i \in I\}$ **lokálisan véges**, ha bármely kompakt K halmazra

$$\#\{i \in I : U_i \cap K \text{ nem üres}\}$$

véges.

1. tétel: *A lokálisan kompakt tér minden nyílt fedésének van lokálisan véges alárendelt nyílt fedése.*

Az **egységosztás** olyan folytonos függvények f_n sorozata, amelyre igaz:

(i) $0 \le f_n \le 1$,

(ii) f_n-ek kompakt tartójuak,

(iii) $\#\{n \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} f_n \cap K \text{ nem üres}\}$ véges minden kompakt K halmazra.

(iv) $\sum_n f_n(x) = 1$.

Az f_n egységosztás **alárendeltje** az $\{V_i : i \in I\}$ nyílt fedésnek, ha minden n-re létezik egy V_i nyílt halmaz, hogy $\operatorname{supp} f_n \subset V_i$. (Ez azt jelenti, hogy az $U_n = \{x : f_n(x) > 0\}$ nyílt fedés alárendeltje $\{V_i : i \in I\}$-nek.)

2. tétel: *Minden nyílt fedéshez van olyan egységosztás, amely annak alárendeltje.*

A tételnek csak a kompakt esetével foglalkozunk. Ilyenkor a fedésből kiválasztható véges, $G_1, G_2, \dots, G_m$ nyílt halmazok. Olyan $f_1, f_2, \dots, f_m$ folytonos függvényeket kell konstruálni, hogy

$$0 \le f_k, \quad \operatorname{supp} f_k \subset G_k, \quad \sum_k f_k = 1.$$

Legyen

$$G_k^n := \{x \in X : d(x, G_k^c > 1/n\}.$$

Ekkor $\cup_n G_k^n = G_k$ és eleg nagy n-re $\{G_k^n : 1 \le k \le m\}$ lefedi X-et. Válasszunk olyan $g_k \ge 0$ függvényt, hogy

$$g_k | G_k^n \equiv 1 \quad \text{és} \quad g_k | (G_k^{n+1})^c \equiv 0.$$

Ekkor $\operatorname{supp} g_k \subset G_k$ és $\sum_k g_k(x) > 0$ minden $x \in X$-re. Ezért vehetjük a következő függvényeket

$$f_k(x) := \frac{g_k(x)}{g(x)}, \quad \text{ahol} \quad g(x) = \sum_k g_k(x).$$

Legyen X egy lokálisan kompakt tér. $C_K(X)$-szel fogjuk jelölni a kompakt tartójú folytonos függvények vektorterét. Legyen μ Borel-mérték X-en és tételezzük fel, hogy minden kompakt halmaz véges mértékű. (Az ilyen mértéket lokálisan végesnek is mondjuk.) $C_K(X)$ elemei integrálhatók és

$$I : f \mapsto \int f \, d\mu$$

pozitív lineáris funkcionál. (A pozitivítás az jelenti, hogy $f \ge 0$ esetén $I(f) \ge 0$.) Minden pozitív lineáris funkcionált megkapunk így.

3. tétel: (Radon-Riesz) *Legyen X egy lokálisan kompakt (metrizálható) tér és jelölje $C_K(X)$ a kompakt tartójú folytonos függvények vektorterét. Ha $I : C_K(X) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál, akkor egyértelműen létezik egy olyan μ Borel-mérték, hogy*

$$I(f) = \int f \, d\mu.$$

Az első approximációs lemma a nyílt és kompakt halmazok viszonyáról szól.

2. lemma: *Ha $G \subset X$ nyílt halmaz, akkor létezik kompakt halmazoknak olyan K_n sorozata, hogy $K_1 \subset \operatorname{int} K_2 \subset K_2 \subset \operatorname{int} K_3 \subset \dots$ és $\cup_n K_n = G$. Ha $K \subset X$ kompakt halmaz, akkor létezik nyílt halmazoknak olyan G_n sorozata, hogy $G_1 \supset \overline{G}_2 \supset G_2 \supset \overline{G}_3 \subset \dots$ és $\cap_n G_n = K$.*

Bizonyítás: Csak az első állítás bizonyítását vázoljuk. Legyen $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ kompakt halmazok olyan sorozata, hogy $\cup_n C_n = X$ és legyen

$$H_n := \{x \in X : d(x, G^c) \geq 1/n\}.$$

Ekor $K_n := C_n \cap H_n$ eleget tesz a feltételeknek. □

A Radon-Riesz tétel bizonyítása több részből tevődik össze.

Unicitás: Tételezzük fel, hogy

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\nu \qquad (f \in C_K(X)).$$

A mértékek monoton konvergencia tulajdonságát használva meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mu(G \cap F) = \nu(G \cap F), \tag{5.1}$$

ha G nyílt és F zárt.

A G nyílt halmazhoz rendelkezésre áll a 2. Lemma K_n sorozata. Van olyan $g_n \in C_K(X)$ függvény, hogy

$$g_n|K_n \equiv 1, \quad \operatorname{supp} g_n \subset K_{n+1}, \quad 0 \leq g_n \leq 1.$$

Ekkor $\mathbf{1}_{K_n} \leq g_n \leq \mathbf{1}_G$. Ezért

$$\mu(K_n) \leq \int g_n\,d\mu \leq \mu(G).$$

Az $n \to \infty$ határérték azt mutatja, hogy

$$\mu(G) = \lim_n \int g_n\,d\mu = \lim_n \int g_n\,d\nu = \nu(G)$$

nyílt G halmazokra.

Ha K kompakt, akkor a 2. Lemma G_n sorozatát vesszük. Ekkor $G \cap G_n$ monoton fogyóan tart $G \cap K$-hoz. Mivel $G \cap G_n$ nyílt, az előzőek szerint

$$\mu(G \cap G_n) = \nu(G \cap G_n) \to \mu(G \cap K) = \nu(G \cap K).$$

Ha F zárt halmaz, akkor az a $F \cap H_n$ a sorozat limesze, ahol H_n az 1. Lemmából van. $F \cap H_n$ kompakt, tehát

$$\mu(G \cap F \cap H_n) = \nu(G \cap F \cap H_n)$$

az előző eredmény szerint. Az $n \to \infty$ határérték azt adja, hogy (5.1) igaz.

Nevezzük GF-halmaznak $G \cap F$ alakú halmazokat, ahol G nyílt és F zárt. Továbbá nevezzük elemi halmazoknak a páronként diszjunkt GF-halmazok véges unióját. Legyen az elemi halmazok összessége $\mathcal{A}_0$. Állítjuk, hogy $\mathcal{A}_0$ Boole-algebra. Az ellenőrzés elemi. GF-halmazok metszete GF-halmaz, egy GF-halmaz komplementuma elemi:

$$(G \cap F)^c = G^c \cup F^c$$

És így tovább.

Az $\mathcal{A}_0$ Boole-algebrán a μ és ν mértékek megegyeznek, így a 9. Lemma szerint a generált σ-algebrán is. Természetesen a GF-halmazok által generált σ-algebra a Borel-halmazokból áll. □

Az unicitás bizonyítása után az egzisztencia következik, vagyis meg kell konstruálni egy μ mértéket, ami megadja az integrál reprezentációt. A nyílt és kompakt halmazok mértékének meghatározása a kezdet.

Legyen

$$\mu_0(G) = \sup\{I(f) : 0 \le f \le 1, \operatorname{supp} f \subset G\}$$

egy nyílt G halmazra. $G_1 \subset G_2$ esetén $\mu_0(G_1) \le \mu_0(G_2)$ evidens.

3. lemma: *Legyen G_n nyílt halmazok egy sorozata. Ekkor*

(i) $\mu_0(\cup_n G_n) \le \sum_n \mu_0(G_n)$ *(σ-szubadditivitás).*

(ii) Ha a G_n halmazok páronként diszjunktak, akkor a σ-additivitás is teljesül:

$$\mu_0(\cup_n G_n) = \sum_n \mu_0(G_n).$$

Bizonyítás: Legyen $G = \cup_n G_n$. $\mu_0(G)$ definiciója szerint nézünk egy $f \in C_K(X)$ függvényt, amire $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset G$. Az $I(f)$ számra kell megmutatni, hogy (i) jobboldala felső korlát.

A kompakt $\operatorname{supp} f$ halmaznak G_n-ek a nyílt fedését alkotják, ebből kiválasztható véges, legyen

$$\operatorname{supp} f \subset \cup_{n=1}^m G_n.$$

A $G_1, G_2, \dots, G_m, (\operatorname{supp} f)^c$ halmazok X nyílt fedését adják. Erre alkalmazzuk az egységosztási tételt, 2. Tétel. Vannak φ_q függvények, hogy $\sum_q \varphi_q = 1$ és minden $\operatorname{supp} \varphi_q$ egy fedő halmazban van. $\operatorname{supp} f$ kompakt halmaz, ezért az egységosztás tulajdonsága szerint véges sok q van, amire $\operatorname{supp} \varphi_q \cap \operatorname{supp} f$ nem üres, azaz véges sok q van, amire $\varphi_q f \ne 0$. Csak ezeket a φ_q függvényeket tartjuk meg, $q \in S$.

$$\sum_{q \in S} f\varphi_q = f$$

teljesül. Az ilyen $f\varphi_q$ függvények összeadásával kapunk f_n függvényeket, amikre igaz a következő: $f = \sum_{n=1}^m f_n$ alakban, ahol $f_n \in C_K(X)$ és $\operatorname{supp} f_n \subset G_n$. Így

$$I(f) = \sum_{n=1}^{m} I(f_n) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu_0(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(G_n)$$

és (i) következik.

(ii) bizonyításához az

$$\mu_0(G) \geq \sum_{n=1}^{m} \mu_0(G_n).$$

egyenlőtlenséget kell igazolni, ami jóval egyszerűbb. Választunk f_n függvényeket, hogy

$$0 \leq f_n \leq 1, \quad \operatorname{supp} f_n \subset G_n, \quad \mu_0(G_n) \leq I(f_n) + \varepsilon.$$

Ekkor $f := \sum_n f_n$ is folytonos függvény és $0 \leq f_n \leq 1$. Becslés:

$$\mu_0(G) \geq I(f) = \sum_{n=1}^{m} I(f_n) \geq \sum_{n=1}^{m} (\mu_0(G_n) - \varepsilon).$$

ε tetszőlegesen kicsi lehet. □

A következő lépés az

$$\mu_0(K) := \inf\{\mu_0(G) : K \subset G\}$$

definició kompakt K halmazokra.

4. lemma: *$\mu_0(K)$-nak megvannak a következő tulajdonságai.*

(i) Ha $K_1 \subset K_2$ kompakt halmazok, akkor $\mu_0(K_1) \leq \mu_0(K_2)$.

(ii) Ha a K kompakt, G nyílt és $K \subset G$, akkor $\mu_0(K) \leq \mu_0(G)$.

(iii) Ha a kompakt $K_1, K_2, \ldots, K_m$ halmazok páronként diszjunktak, akkor a

$$\mu_0(\cup_n K_n) = \sum_n \mu_0(K_n).$$

Tetszőleges $A \subset X$ halmaznak értelmezzük a **belső és külső mértékét**:

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu_0(G) : A \subset G \text{ nyílt }\}, \qquad \mu_*(A) := \sup\{\mu_0(K) : A \supset K \text{ kompakt }\}.$$

5. lemma: *A belső és külső mértékeknek megvannak a következő tulajdonságai.*

(i) Ha $A_1, A_2, \ldots$ az X részhalmazainak egy sorozata, akkor

$$\mu^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

(ii) Ha $A_1, A_2, \dots$ X diszjunkt részhalmazainak egy sorozata, akkor

$$\mu_*(\cup_n A_n) \ge \sum_n \mu_*(A_n).$$

Bizonyítás: (i) a 3. Lemma (i) állításának a következménye. (ii) igazolásához elég

$$\mu_*(\cup_n A_n) \ge \sum_{n=1}^{m} \mu_*(A_n)$$

indoklása, ami 4. Lemma (iii) additivitásának a következménye. □

A Radon-Riesz tétel bizonyítását először kompakt X-re fejezzük be. Legyen

$$\mathcal{B} := \{A \subset X \,:\, \mu^*(A) = \mu_*(A)\}.$$

μ a μ^* (vagy μ_*) megszorítása $\mathcal{B}$-re.

6. lemma: *$\mathcal{B}$-nek megvannak a következő tulajdonságai.*

(i) $A \in \mathcal{B}$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon > 0$-hoz van olyan kompakt $K \subset X$ és nyílt $G \subset X$, hogy $K \subset A \subset G$ és $\mu_0(G) - \varepsilon \le \mu_0(K)$.

(ii) Minden kompakt halmaz $\mathcal{B}$-ben van.

(iii) Minden nyílt halmaz $\mathcal{B}$-ben van.

7. lemma: *Ha $A_1, A_2, \dots$ $\mathcal{B}$ diszjunkt részhalmazainak egy sorozata, akkor*

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

(Tehát $\cup_n A_n \in \mathcal{B}$.)

Bizonyítás: A 5. Lemma szub- és szuperadditivitása. □

Az additivitás alapján átfogalmazhatjuk a 6. Lemma (i) állítását.

8. lemma: (Luzin-feltétel) *$A \in \mathcal{B}$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon > 0$-hoz van olyan kompakt $K \subset X$ és nyílt $G \subset X$, hogy $K \subset A \subset G$ és $\mu(G \setminus K) \le \varepsilon$.*

Megmutatjuk, hogy $A \in \mathcal{B}$ esetén $A^c \in \mathcal{B}$. A Luzin-feltétel szerint létezik kompakt K és nyílt G, hogy $K \subset A \subset G$ és $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$. Ekkor $G^c \subset A^c \subset K^c$ és $\mu(K^c \setminus G^c) = \mu(G \setminus K) < \varepsilon$. (Kihasználtuk, hogy X kompakt, ezért igaz az, hogy G^c kompakt.)

Megmutatjuk, hogy $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ esetén $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{B}$. Ismét a Luzin-feltételt használjuk: van $K_i \subset A_i \subset G_i$, hogy $\mu(G_i \setminus K_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Mivel

$$(G_1 \cup G_2) \cap (K_1 \cup K_2)^c \subset (G_1 \setminus K_1) \cup (G_2 \setminus K_2),$$

a balodal mértéke legfeljebb 2ε.

Már látjuk, hogy $\mathcal{B}$ Boole-algebra. Ahhoz, hogy σ-algebra legyen elég belátni, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunk elemei $\mathcal{B}$-nek, akkor uniójuk is $\mathcal{B}$-ben van. Ez maga a 7. Lemma.

$\mathcal{B}$ σ-algebra, tartalmazza a Borel-halmazokat, μ mérték rajta. Ez a mértéktér teljes, hiszen nullmértékűnek minden része $\mathcal{B}$-ben van.

Meg kell még mutatni, hogy

$$I(f) = \int f\,d\mu \qquad (f \in C(X)),$$

ami ekvivalens az

$$I(f) \le \int f\,d\mu \qquad (f \in C(X)) \tag{5.2}$$

egyenlőtlenséggel. (Ez f-re és $-f$-re alkalmazva kiadja az egyenlőséget.)

f értékkészlete korlátos, így az

$$A_k := f^{-1}([k\varepsilon, (k+1)\varepsilon))$$

halmazok egy $|k| \le N$-re X particióját adják. A_k a nyílt

$$G_k^{(n)} := f^{-1}([(k-n^{-1})\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$$

halmazok metszete. A metszet fogyó, ezért

$$\lim_n \mu(G_k^{(n)}) = \mu(A_k).$$

Az n számot olyan nagynak választjuk, hogy

$$\sum_k (k+1)(\mu(G_k^{(n)}) - \mu(A_k)) < 1.$$

A $G_k^{(n)}$ halmazok egy nyílt fedést alkotnak. Alkalmazzuk erre az egységosztási tételt: Olyan φ_k függvényeket kapunk, hogy $\sum_k \varphi_k = 1$ és $\operatorname{supp}\varphi_k \subset G_k^{(n)}$. Ekkor az $f_k := f\varphi_k$ függvényekre a

$$f = \sum_k f_k \quad \text{és} \quad f_k \le (k+1)\varepsilon\varphi_k.$$

tulajdonságok teljesülnek. Mivel $I(\varphi_k) \le \mu(G_k^{(n)})$, felső becslést kapunk $I(f)$-re:

$$I(f) = \sum_k I(f_k) \le \sum_k (k+1)\varepsilon I(\varphi_k) \le \sum_k (k+1)\varepsilon\mu(G_k^{(n)}) \le \varepsilon + \sum_k (k+1)\varepsilon\mu(A_k)$$

Az $f(x) \ge k\varepsilon$, $x \in A_k$ feltétel alsó becslest ad az integrálra:

$$\int f\,d\mu \ge \sum_k k\varepsilon\mu(A_k)$$

Ezért
$$I(f) \le \int f\,d\mu + \varepsilon\Big(1+\sum_k \mu(A_k)\Big) = \int f\,d\mu + \varepsilon(1+\mu(X)).$$
$\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsi, így (5.2) igazolva lett. □

A Radon-Riesz tétel bizonyítása teljesen kész arra az esetre, amikor X kompakt.

A lokálisan kompakt általános esetre a 1. Lemma kompakt H_n halmazaiból indulunk. Egy $f_n \in C(H_n)$ függvényt ki kell terjeszteni az egész X halmazra. Van olyan $g_n : X \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy $g_n|H_{n-1} \equiv 1$ és $g_n|\overline{H_n^c} \equiv 0$. Legyen
$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f(x)g_n(x) & \text{ha } x \in H_n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
(f és $\tilde{f}_n$ megegyeznek a H_{n-1} halmazon.)

$I_n : f \mapsto I(\tilde{f}_n)$ pozitív lineáris funkcionál $C(H_n)$-n, ezért
$$I_n(f) = I(\tilde{f}_n) = \int f_n\,d\mu_n \qquad (f_n \in C(H_n))$$
egy μ_n mértékre H_n-n.

Ha $f \in C_K(X)$, akkor $\operatorname{supp} f \subset H_n$ valamely n-re és
$$\int_{H_m} f\,d\mu_m = I(f) \quad \text{ha} \quad m > n. \tag{5.3}$$
Ezért a μ_m mértékek megegyeznek a $G \subset H_n$ nyílt halmazokon. Ebből következik, hogy H_n összes mérhető részhalmazán. Tehát a μ_m mértékekből konstruálhatunk egy μ mértéket X Borel-halmazain. A (5.3) képlet mutatja, hogy μ reprezentálja az I funkcionált. □

Legyen X egy lokálisan kompakt tér és μ egy mérték a $\mathcal{B}$ σ-algebrán, amely tartalmazza a Borel-halmazokat. Azt mondjuk, hogy μ **reguláris** ha minden $A \in \mathcal{B}$ halmazhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van egy kompakt $K \subset A$ halmaz és egy $G \supset A$ nyílt halmaz, hogy $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$. A Radon-Riesz tételben megjelent mérték reguláris.

4. tétel: (Luzin-tétel) *Legyen μ a lokálisan kompakt X téren egy reguláris mérték és f egy mérhető függvény. Ekkor minden H kompakt halmazhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz van egy kompakt $K \subset H$ halmaz, hogy f folytonos K-n és $\mu(H \setminus K) < \varepsilon$.*

5.2. Előjeles mértékek

A cél a Radon–Riesz–tétel analogonja, az X teret kompaktnak tételezzük fel, viszont az I lineáris funkcionál pozitivítását nem követeljük meg.

Jelölje $C(X)$ az X kompakt (metrikus) téren folytonos függvények vektorterét. Az

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

normában való konvergencia az egyenletes konvergencia. Mivel folytonos függvények egyenletesen konvergáló sorozatának limesze folytonos, $C(X)$ Banach-tér.

A $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál normája

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(f)| : \|f\| \le 1\}.$$

Ha $\|\varphi\|$ véges, akkor φ-t korlátosnak mondjuk. Ha φ pozitív funkcionál, akkor a

$$-\|f\| \le f(x) \le \|f\|$$

egyenlőtlenségre alkalmazva φ-t, azt kapjuk, hogy

$$-\|f\|\varphi(\mathbf{1}) \le \varphi(f) \le \|f\|\varphi(\mathbf{1})$$

és ezért $\|\varphi\| \le \varphi(\mathbf{1})$. Valójában egyenlőség van. Tehát egy pozitív leképezés automatikusan korlátos (= folytonos).

5. tétel: (Jordan-féle felbontási tétel) *Ha $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál, akkor egyértelműen léteznek olyan $\varphi_\pm : C(X) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionálok, amelyekre*

(i) $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$,

(ii) $\|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.

Bizonyítás: Ha $0 \le f \in C(X)$, akkor legyen

$$H(f) = \{u \in C(X) \,:\, 0 \le u \le f\}, \qquad \varphi_+(f) = \sup\{\varphi(u) \,:\, u \in H(f)\}.$$

Először megmutatjuk, hogy $H(f_1)+H(f_2) = H(f_1+f_2)$. A $H(f_1)+H(f_2) \subset H(f_1+f_2)$ tartalmazás nyilvánvaló. A fordított tartalmazás belátásához legyen $u \in H(f_1 + f_2)$. Ha

$$v := \min(u, f_1) = \frac{1}{2}(u + f_1 - |u - f_1|),$$

akkor $v \in H(f_1)$. Természetesen $u - f_1 \le f_2$ és

$$u - v = \frac{1}{2}(u - f_1 + |u - f_1|) \le f_2.$$

Mivel $u - v \ge 0$, látjuk, hogy $u - v \in H(f_2)$, ami azt mutatja, hogy $u \in H(f_1) + H(f_2)$. Tehát $H(f_1) + H(f_2) = H(f_1 + f_2)$-t megmutattuk. Ennek következménye, hogy

$$\varphi_+(f_1) + \varphi_+(f_2) = \varphi_+(f_1 + f_2) \tag{5.4}$$

minden $0 \le f_1, f_2 \in C(X)$ esetén.

$$\varphi_+(\lambda f_1) = \lambda \varphi_+(f_1) \tag{5.5}$$

evidens az értelmezésből minden $\lambda > 0$ számra.

Ezután φ_+ értelmezési tartományát ki kell terjeszteni. Tetszőleges $g \in C(X)$ előáll (sokféleképpen!) $g = g_1 - g_2$ alakban úgy, hogy $0 \le g_1,\, g_2 \in C(X)$. Legyen

$$\varphi_+(g) = \varphi_+(g_1) - \varphi_+(g_2)\,.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy (5.4) miatt $\varphi_+(g_1) - \varphi_+(g_2)$ nem függ g_1 és g_2 választásától. φ_+ linearitása (5.4) és (5.5) következménye, és φ_+ pozitivitása benne van a konstrukcióban.

Legyen $f \ge 0$ és $G(f) := \{v \in C(X) \,:\, -f \le v \le 0\}$. Ekkor $u \mapsto u - f$ bijekciót ad $H(f)$ és $G(f)$ között. Ezért

$$\begin{aligned} \varphi_-(f) &= \varphi_+(f) - \varphi(f) = \sup\{\varphi(u) - \varphi(f) \,:\, u \in H(f)\} = \\ &= \sup\{\varphi(v) \,:\, v \in G(f)\}\,, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy a φ_- lineáris funkcionál nemnegatív.

Eljutottunk a $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ felbontáshoz, hátra van még $\|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$. Mivel $\|\varphi\| \le \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$ nyilvánvaló a norma definíciója szerint, elég a $\|\varphi\| \ge \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$ egyenlőtlenségre koncentrálni. Megjegyezzük, hogy

$$\|\varphi_+\| = \varphi_+(1) \quad \text{és} \quad \|\varphi_-\| = \varphi_-(1)\,.$$

Léteznek olyan $u_n \in H(1)$ és $v_n \in G(1)$ sorozatok, amelyekre

$$\varphi_+(1) = \lim_n \varphi(u_n)\,, \quad \varphi_-(1) = \lim_n \varphi(v_n)\,.$$

Mivel $-1 \le u_n + v_n \le 1$,

$$\|\varphi\| \ge \varphi(u_n + v_n) = \varphi(u_n) + \varphi(v_n) \to \varphi_+(1) + \varphi_-(1)\,.$$

Bizonyítjuk még φ felbontásának egyértelműségét a (ii) feltétel mellett. Legyen $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ pozitív funkcionálokból álló felbontás. Belátjuk, hogy $\varphi_+(f) \le \varphi_1(f)$ minden $f \ge 0$ esetén. Valóban,

$$\varphi_+(f) = \sup\{\varphi_1(u) - \varphi_2(u) : u \in H(f)\} \le \sup\{\varphi_1(u) : u \in H(f)\} = \varphi_1(f).$$

$\omega := \varphi_1 - \varphi_+$ pozitív funkcionál és

$$\varphi_1 = \varphi_+ + \omega \quad \text{és} \quad \varphi_2 = \varphi_- + \omega.$$

Ebből

$$\|\varphi_1\| = \varphi_1(1) = \varphi_+(1) + \omega(1) \quad \text{és} \quad \|\varphi_2\| = \varphi_2(1) = \varphi_-(1) + \omega(1).$$

Ha a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ felbontás eleget tesz a feltételnek, akkor $\varphi(1) = \varphi_1(1) + \varphi_2(1)$ és $\omega(1) = \|\omega\| = 0$ következik. $\square$

Ha ν olyan halmazfüggvény az X kompakt metrizálható tér Borel-halmazain, amely két véges Borel-mérték különbsége, azaz

$$\nu(H) = \mu_1(H) - \mu_2(H) \quad (H \in B)\,,$$

akkor ν-t **előjeles mértéknek** nevezzük. A ν előjeles mérték szerinti integrált az

$$\int f\,d\nu := \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2$$

képlettel értelmezhetjük. Minden előjeles mérték megad egy φ lineáris funkcionált a $C(X)$ téren, és a Jordan–féle felbontási és a Riesz–Radon-tételek kombinálásával látható, hogy $C(X)$ minden korlátos lineáris funkcionálja előáll így.

Az előjeles mérték egy alábbi ekvivalens módon és definiálható:

(i) Van egy olyan $C > 0$ szám, hogy páronként diszjunkt mérhető $H_1, H_2, \dots, H_n$ halmazokra

$$\sum_i |\nu(H_i)| \le C.$$

(ii) Páronként diszjunkt mérhető $H_1, H_2, \dots$ halmazokra

$$\sum_i \nu(H_i) = \nu(\cup_i H_i).$$

Az (i) követelmény biztosítja, hogy (ii) baloldala abszolút konvergens. Egy előjeles mérték szerinti integrál hasonlóan építhető fel, mint a pozitív mérték szerinti.

6. tétel: *Legyen X kompakt tér és φ korlátos lineáris funkcionál $C(X)$-en. Ha $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ és $\varphi_1(f) = \int f\,d\mu_1$, $\varphi_2(f) = \int f\,d\mu_2$ μ_1 és μ_2 mértékekkel, akkor a következő két tulajdonság ekvivalens*

(i) $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$,

(ii) létezik olyan $A \subset X$ Borel-halmaz, amelyre $\mu_1(A) = 0$ és $\mu_2(X \setminus A) = 0$.

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$ (ii): Léteznek olyan $-1 \le f_n \le 1$ folytonos függvények X-en, amelyekre $\varphi(f_n) \to \|\varphi\|$. Legyen $f_n = f_n^+ - f_n^-$ a pozitív és negatív részre való felbontás.

$$\varphi(f_n) = \left[\int f_n^+\,d\mu_1 + \int f_n^-\,d\mu_2\right] - \left[\int f_n^-\,d\mu_1 + \int f_n^+\,d\mu_2\right].$$

A nagy zárójelben lévő tagok nemnegatívok, az elsőre

$$\int f_n^+\,d\mu_1 + \int f_n^-\,d\mu_2 \le \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|\,.$$

Mivel $\varphi(f_n) \to \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ a feltevés miatt,

$$\int f_n^+ \, d\mu_1 \to \|\varphi_1\| \quad \text{és} \quad \int f_n^+ \, d\mu_2 \to 0 \, .$$

Tehát $\|f_n^+\| \to 0$ és f_n^+-nak van olyan részsorozata, amely μ_2-m.m. tart a 0-hoz. ($\|\cdot\|$ itt a μ_2-re vonatkozó L^1-normát jelenti.) Az egyszerűség kedvéért nem vezetünk be új jelölést a részsorozatra, hanem feltesszük, hogy $f_n^+ \to 0$ μ_2-m.m. Ugyanakkor $\|1 - f_n^+\| = \int (1 - f_n^+) \, d\mu_1 \to \|\varphi_1\| - \|\varphi_1\| = 0$, és esetleg újabb részsorozatot kiválasztva, oda jutunk, hogy $f_n^+ \to 1$ μ_1-m.m. (Most viszont $\|\cdot\|$ a μ_1-re vonatkozó L^1-normát jelenti.) Legyen

$$A = \{x \in X \, : \, \lim f_n^+(x) = 1\} \, .$$

Ekkor

$$\|1 - \mathbf{1}_A\|_{L^1(\mu_1)} = 0 \quad \text{és} \quad \|\mathbf{1}_A\|_{L^1(\mu_2)} = 0 \, ,$$

amiből adódik, hogy $\mu_1(X \setminus A) = 0$ és $\mu_2(A) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): A feltevés szerint van olyan A Borel-halmaz, amelyre $\mu_1(X \setminus A) = 0$ és $\mu_2(A) = 0$. Legyen $f = 1_A - 1_{X \setminus A}$. Ekkor

$$\varphi(f) = \int (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{X \setminus A}) \, d\mu_1 - \int (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{X \setminus A}) \, d\mu_2 = \mu_1(X) + \mu_2(X) = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| \, .$$

Ha f folytonos lenne, akkor $\|\varphi\| \geq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ nyomban következne. Mivel f nem az, egy pótlólagos közelítésre van szükség. Választunk egy olyan folytonos $g : X \to [-1, 1]$ függvényt, amire

$$\int |f - g| \, d(\mu_1 + \mu_2) < \varepsilon \, .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \int g \, d\mu_1 - \int g \, d\mu_2 \geq \int f \, d\mu_1 - \varepsilon - \int f \, d\mu_2 - \varepsilon = \\ &= \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| - 2\varepsilon \, . \end{aligned}$$

□

Ha μ_1 és μ_2 mértékek egy $\mathcal{B}$ σ-algebrán, akkor **kölcsönösen szingulárisnak** mondjuk őket, ha van olyan $A \in \mathcal{B}$ halmaz, amelyre $\mu_1(A) = 0$ és $\mu_2(A^c) = 0$. Ilyenkor a $\mu_1 \perp \mu_2$ jelölést használjuk.

Legyen ν egy előjeles mérték. Az előző Tétel következménye az, hogy léteznek olyan kölcsönösen szinguláris ν_+ és ν_- mértékek, amelyekre $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Ezt az előállítást ν **Jordan-féle felbontásának** nevezzük, és $|\nu| := \nu_+ + \nu_-$ a ν előjeles mérték **abszolút értéke**.

1. példa: Legyen λ a Lebesgue-mérték a $[0, 1]$ intervallumon. Az intervallum számait irjuk 3-as számrendszerben, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$$

alakban, ahol a $c_n \in \{0,1,2\}$. Legyen

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} : c_n \in \{0,2\} \right\}.$$

(Ezt **Cantor-halmaznak** szokás nevezni.) Kiszámolható, hogy $\lambda(C) = 0$, hiszen $\lambda([0,1] \setminus C) = 1$. C azonosítható a $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ halmazzal, amin tekinthetünk egy szorzatmértéket. Ezt átmásolva C-re kapunk egy μ mértéket. μ és λ kölcsönösen szingulárisak. □

Eddig kompakt terek előjeles mértékeivel foglalkoztunk. Az Alexandrov-féle kompaktifikáció segítségével a lokálisan kompakt tér visszavezethető kompaktra.

Legyen X egy lokálisan kompakt tér és $Y := X \cup \{\infty\}$ a kompaktifikáció. Jelölje $M^1(Y)$ az előjeles ν Borel-mértékeket, amikre

$$\|\nu\| := \int d|\nu| = |\nu(Y)| = \nu_+(Y) + \nu_-(Y)$$

véges, $\nu = \nu_+ - \nu_-$ a Jordan-felbontás. $M^1(Y)$ Banach-tér, hiszen kölcsönösen egyértelmű normatartó lineáris megfeleltetés van $M^1(Y)$ és $C(Y)$ korlátos lineáris funkcionáljai között.

$M^1(X)$ definició szerint azoknak a $\nu \in M^1(Y)$ mértékeknek az X-re való megszorításából áll, amikre $\nu(\{\infty\}) = 0$.

Egy komplex értékű mérték két előjeles mértékből tehető össze, azok a valós és imaginárius részei:

$$\nu(H) = \nu_1(H) + \mathrm{i}\nu_2(H).$$

5.3. Operátor értékű mértékek

Az operátor értékű mértéket és a vele értelmezett integrált vissza lehet vezetni (komplex) szám értékű mértékekre és azok integráljára.

Ebben a részben $\mathcal{H}$ egy komplex Hilbert-teret jelöl, $B(\mathcal{H})$ a korlátos operátorok algebrája, $I \in B(\mathcal{H})$ az identitás operátor. Legyen $(X, \mathcal{B})$ egy mértéktér. $E : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ pozitív operátor értékű mérték, rövidítésben POVM, ha minden $B \in \mathcal{B}$ halmazra $E(B) \in B(\mathcal{H})$ egy pozitív operátor, $E(X) = I$ és a σ-additivitásnak a következő ekvivalens formái teljesülnek páronként diszjunkt $B_1, B_2, \dots$ mérhető halmazokra B unióval:

(i) $\sum_i \langle x, E(B_i)y \rangle = \langle x, E(B)y \rangle$ minden $x, y \in \mathcal{H}$ vektorra.

(ii) $\sum_i \langle x, E(B_i)x \rangle = \langle x, E(B)x \rangle$ minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra.

(iii) $\sum_i E(B_i)x = E(B)x$ minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra.

(ii) alapján azt is mondhatjuk, hogy $E : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ POVM akkor és csak akkor, ha minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra $\mu_x(B) := \langle x, E(B)x\rangle$ egy véges mérték a $\mu_x(X) = \|x\|^2$ tulajdonsággal. Természetesen

$$\mu_{x,y}(B) = \langle x, E(B)x\rangle \qquad (B \in \mathcal{B})$$

komplex értékű mérték és $\mu_{x,y}$ komplex bilináris (x, y)-ban, azaz konjugált lineáris x-ben és lineáris y-ban.

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény. Ekkor

$$F(x,y) := \int_X f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda)$$

jól definiált komplex bilináris funkcionál és ha $C > 0$ felső korlátja $|f|$-nek, akkor $|F(x,x)| \le C\|x\|^2$. Ezért egyértelműen létezik egy $A \in B(\mathcal{H})$ operátor, amire

$$F(x,y) = \langle x, Ay\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{H}).$$

A-t mondjuk az $\int_X f(\lambda)\, dE(\lambda)$ integrálnak. Másszóval,

$$A = \int_X f(\lambda)\, dE(\lambda), \quad \text{ha} \quad \langle x, Ay\rangle = \int_X f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda) \qquad (x, y \in \mathcal{H}). \tag{5.6}$$

Mivel f-et valós függvénynek vettük, $\langle x, Ax\rangle$ valós minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra, és ezért A önadjungált operátor.

Az $f \mapsto \int_X f(\lambda)\, dE(\lambda)$ leképezés lineáris, ami nem meglepő, viszont lehet multiplikatív is.

7. tétel: *A korlátos mérhető $f : X \to \mathbb{R}$ függvényeken értelmezett*

$$f \mapsto \int_X f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

leképezés akkor és csak akkor multiplikatív, ha minden $B \in \mathcal{B}$ halmazra az $E(B)$ operátor projekció.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az integrál multiplikatív. Egy $B \in \mathcal{B}$ halmazra $\mathbf{1}_B^2 = \mathbf{1}_B$, ezért $E(B)^2 = E(B)$, hiszen

$$E(B) = \int \mathbf{1}_B(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Tehát $E(B)$ projekció.

Tételezzük fel, hogy $E(B)$ projekció minden $B \in \mathcal{B}$ halmazra. Először megmutatjuk, hogy diszjunkt $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ halmazokra a $P_1 := E(B_1)$ és $P_2 := E(B_2)$ projekciók ortogonálisak, azaz $P_1P_2 = 0$. A $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ feltételből $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. P_1-gyel szorozva balról és jobbról

$$0 = P_1P_2P_1 = (P_1P_2)(P_1P_2)^*,$$

ezért $P_1P_2 = 0$.

A multiplikativitást elég megmutatni lépcsős függvényekre. Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n$ az X egy particiója,

$$f := \sum_i c_i \mathbf{1}_{B_i} \quad \text{és} \quad g := \sum_i d_i \mathbf{1}_{B_i}.$$

Ekkor

$$\int f(\lambda)\, dE(\lambda) = \sum_i c_i E(B_i) \quad \text{és} \quad \int g(\lambda)\, dE(\lambda) = \sum_i d_i E(B_i).$$

Mivel $E(B_i)E(B_j) = 0$ $i \neq j$ esetén és $E(B_i)E(B_i) = E(B_i)$, a multiplikativitás egyszerűen látható. □

Ha $A \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátor, akkor $\sigma(A)$ spektruma $\mathbb{R}$ kompakt részhalmaza.

8. tétel: (Spektrál tétel) *Legyen $A \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátor. Ekkor $\sigma(A)$ spektrumon van egy olyan projekció értékű E POVM, hogy*

$$A = \int \lambda\, dE(\lambda).$$

Bizonyítás: Ha p valós együtthatós polinom, akkor $p(A) \in B(\mathcal{H})$ önadjungált operátor. A $p \mapsto p(A)$ hozzárendelés lineáris és multiplikatív. Megmutatható, hogy

$$\sup\{|p(t)| : t \in \sigma(A)\} = \|p(A)\|. \tag{5.7}$$

Mivel a polinomok sűrűn vannak a folytonos függvények $C(\sigma(A))$ terében, a $p \mapsto p(A)$ leképezés kiterjeszthető egy $\Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$ leképezéssé, ami lineáris, multiplikatív és normatartó (5.7).

Ha $x, y \in \mathcal{H}$, akkor

$$f \mapsto \langle x, \Phi(f)y \rangle$$

korlátos lineáris funkcionál $C(\sigma(A))$-n, komplex bilineáris az x, y változókban, ha $x = y$, akkor pozitív is. A Riesz–Radon-tétel szerint léteznek $\mu_{x,y}$ komplex mértékek $\sigma(A)$-n, amik a funkcionálokat reprezentálják:

$$\langle x, \Phi(f)y \rangle = \int f(\lambda)\, d\mu_{x,y}(\lambda).$$

Ezeknek a mértékeknek a csalája a bilinearitás alapján meghatároz egy E POVM-et, amire

$$\Phi(f) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Az $f(\lambda) = \lambda$ függvény adja a tétel állítását, az E POVM pedig az előző tétel alapján projekció értékű. □

5.4. Haar-mérték

Egy G halmazon a **csoportstruktúra** bizonyos műveletek megadását jelenti. A **csoportszorzás** egy olyan $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \circ h$ leképezés, amely asszociatív: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$. Az $e \in G$ **egységelem** az $e \circ g = g \circ e = g$ tulajdonsággal rendelkezik, $g \in G$ tetszőleges. A **csoportinverz** egy $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ leképezés, amely a $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ axiómának tesz eleget. Ha a G halmazon a fentieknek megfelelő szorzás és inverz műveletek vannak megadva, és ki van tüntetve egy $e \in G$ egységelem, akkor G-t csoportnak mondjuk.

Topologikus csoport azt jelenti, hogy egy olyan topológia van megadva, amire a szorzás és az inverz folytonos leképezések.

2. példa: A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán legyen $t \circ s := t + s$, $t^{-1} := -t$ és $e := 0$. Így csoportot kapunk, amit a valós számok additív csoportjának nevezünk. Ez a csoport **kommutatív**, ugyanis $t \circ s = s \circ t$ bármilyen $s, t \in \mathbb{R}$ esetén. A szokásos topológiával $\mathbb{R}$ topologikus csoport lesz. □

3. példa: A $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ komplex egységkörön csoportstruktúrát értelmezhetünk a $z_1 \circ z_2 := z_1 \cdot z_2$, $z^{-1} := \overline{z}$ és $e := 1$ képletekkel. Ez is kommutatív csoport. □

4. példa: $GL(2, \mathbb{R})$ jelenti a 2×2-es nem 0 determinánsú valós elemű mátrixok csoportját, amiben a csoportszorzás a mátrixszorzás, a csoportinverz az inverzmátrix képzése és

$$e := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Tudnunk kell, hogy a $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$ és $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, továbbá A pontosan akkor invertálható, ha $\det A \neq 0$.) Ez a csoport már nem kommutatív. □

A G topologikus csoportot **lokálisan kompaktnak** nevezzük, ha bármely $g \in G$ eleme benne van egy olyan nyílt halmazban, amelynek a lezárása kompakt. A fentiek alapján $GL(2; \mathbb{R})$ lokálisan kompakt. A kommutatív topologikus csoportok körében jóval egyszerűbb példát is lehet mutatni. $\mathbb{R}^n$ a szokásos vektorösszeadással csoport és a szokásos topológiájával tekintve topologikus csoport is. Természetesen lokálisan kompakt.

9. tétel: (Haar Alfréd tétele) *Legyen G lokálisan kompakt metrizálható topológikus csoport. Konstans szorzótól eltekintve egyértelműen létezik egy olyan μ Borel-mérték, amelyre*

(i) a kompakt tartójú folytonos függvények integrálhatók,

A lokálisan kompakt kommutatív topologikus csoporton az invariáns mérték létezését Neumann János bizonyította. Nagyon szerette volna elhagyni a kommutativitás feltevését, de neki nem sikerült, Haar Alfrédnak viszont igen. Haar Alfréd eredménye nagy befolyással volt az operátoralgebrák elméletére is.

(ii) ha $H \subset G$ mérhető halmaz, és $g \in G$, akkor $\mu(H) = \mu(\{g \circ h : h \in H\})$.

Ezt a μ mértéket G **Haar-mértéknek** nevezzük. Az (i)-es tulajdonság kimondja, hogy a kompakt halmazok mérhetőek és véges mértékűek, míg (ii) a mérték bal oldali eltolással szemben való invarianciáját mondja: Ha $gH := \{g \circ h : h \in H\}$, akkor $\mu(H) = \mu(gH)$. Az invariancia tulajdonságot átfogalmazhatjuk a μ mérték szerinti integrálra. Legyen $(L_g f)(h) := f(g^{-1}h)$, ha $g, h \in G$ és f egy $G \to \mathbb{C}$ függvény. Ekkor $\mathbf{1}_{gH}$ nem más, mint $L_g(\mathbf{1}_H)$. Tehát (ii) nem más, mint

$$\int f(h)\, d\mu(h) = \int (L_g f)(h)\, d\mu(h) \tag{5.8}$$

karakterisztikus függvényekre megkövetelve f helyében. A mérték (ii) invariancia tulajdonsága az integrál invarianciájával ekvivalens. (5.8) érvényes minden integrálható függvényre.

Kompakt topologikus csoport Haar-mértékét szokásosan úgy normáljuk, hogy a teljes tér mértéke 1 legyen.

A Haar-mérték konstrukciója: Legyen G_n az egység körüli $1/n$ sugarú nyílt gömb, $n \in \mathbb{N}$. Ha n elég nagy, akkor G_n lezárása kompakt. Csak ezeket az n-eket tekintjük. Válasszunk egy olyan E kompakt halmazt, amely belsejének a lezárása. (Ez fogja adni az egységmértéket.)

Legyen K egy kompakt halmaz. Ez lefedhető a G_n halmaz xG_n eltoltjaival, $x \in xG_n$. Mivel K kompakt, létezik véges fedés és legyen

$$\left[\frac{K}{G_n}\right] := \min\{k : \text{létezik } x_1, x_k, \ldots, x_k \in G, \text{ hogy } K \subset \cup_{i=1}^{k} x_i G_n\}. \tag{5.9}$$

Ez a mennyiség balinvariáns, azaz

$$\left[\frac{xK}{G_n}\right] = \left[\frac{K}{G_n}\right] \qquad (x \in G)$$

és korlátozottan additív. Ha a K_1 és K_2 kompakt halmazok távolsága nagyobb, mint $1/n$, akkor

$$\left[\frac{K_1 \cup K_2}{G_n}\right] = \left[\frac{K_1}{G_n}\right] + \left[\frac{K_2}{G_n}\right].$$

A (5.9) formula azt adja, hogy K mértéke ennyiszerese G_n mértékének. Tehát G_n mértékét kéne tudni. Ha E egységmértékű, akkor G_n mértéke a

$$\left[\frac{E}{G_n}\right]$$

szám reciproka. Legyen

$$\mu_n(K) := \left[\frac{K}{G_n}\right] \Big/ \left[\frac{E}{G_n}\right].$$

Erről a sorozatról még azt kéne tudni, hogy korlátos. Mivel

$$\left[\frac{K}{G_n}\right] \le \left[\frac{K}{E}\right] \left[\frac{E}{G_n}\right],$$

azt látjuk, hogy

$$\mu_n(K) \le \left[\frac{K}{E}\right].$$

A korlátosság miatt

$$K \mapsto \mu_n(K)$$

függvényeknek van egy $K \mapsto \mu_0(K)$ torlódási pontja. Ez a μ_0 balinvariáns és additív diszjunkt kompakt halmazokon. Tehát megvan a Haar-mérték kompakt halmazokra és a következő lépés a kiterjesztés Borel-halmazokra.

Az 4. Lemma által leírt tulajdonságok teljesülnek, egy G nyílt halmazra legyen

$$\mu_0(G) := \sup\{\mu_0(K) : K \subset G, K \text{ kompakt}\}.$$

Ekkor a 3. Lemma tulajdonságai is érvényesek. Definiálható μ^* és μ_*, ezután pedig a Radon–Riesz tétel bizonyításának módszere használható a μ mérték levezetésére. □

5. példa: Legyen G a pozitív valós számok csoportja a szorzásra nézve. Meg akarjuk határozni a μ Haar-mértéket, és feltételezzük, hogy létezik olyan $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre

$$\mu(H) = \int_H p(x)\, dx ,$$

vagy ekvivalens módon

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\, d\mu(x) = \int_0^\infty f(x)p(x)\, dx$$

minden integrálható f függvényre, nevezetesen minden folytonos kompakt tartójú függvényre. (A jobb oldali integrál szokásos Lebesgue-integrált jelent.) Az invariancia szerint

$$\int f(x)p(x)\, dx = \int f(x)\, d\mu(x) = \int f(y^{-1}x)\, d\mu(x) = \int f(y^{-1}x)p(x)\, dx ,$$

és helyettesítéssel integrálva

$$\int f(x)p(x)\, dx = \int f(x)p(yx)y\, dx ,$$

aminek fenn kell állnia minden $y > 0$ számra és integrálható f függvényre. Ez feltétlenül teljesül, ha

$$p(x) = p(yx)y .$$

A kapott függvényegyenletet kielégíti a $p(x) = x^{-1}$ függvény. Ez a sűrűségfüggvény határozza tehát meg a Haar-mértéket. □

6. példa: A $GL(2, \mathbb{R})$ csoport elemei 2×2-es

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

invertálható mátrixok. A csoport Haar-mértékét keressük

$$d\mu(A) = p(x, y, z, w)\, dxdydzdw =: p(A)\, dA$$

alakban. Tehát az

$$\int f(A)p(A)\, dA = \int f(BA)p(A)\, dA$$

egyenlet fejezi ki az integrál invarianciáját, $B \in GL(2, \mathbb{R})$ tetszőleges mátrix. A jobb oldalon helyettesítéses integrálást végzünk

$$\int f(BA)p(A)\, dA = \int f(A')p(B^{-1}A') \left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| dA' .$$

Ha

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad A' := BA = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix},$$

és a Jacobi-mátrix

$$\frac{\partial A'}{\partial A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix} = B \otimes I_2 \,.$$

(A tenzorszorzatos írásmódra nézve lásd [6] 1. fejezetét.) Ezért

$$\left|\frac{\partial A}{\partial A'}\right| := \left|\det\left[\frac{\partial A}{\partial A'}\right]\right| = \frac{1}{|\det(B \otimes I_2)|} = \frac{1}{(\det B)^2}\,.$$

Az invariancia feltétele tehát

$$p(A) = \frac{p(B^{-1}A)}{(\det B)^2}\,.$$

Ennek megoldása a

$$p(A) = \frac{1}{(\det A)^2}$$

mátrixfüggvény, ami megadja a baloldali Haar-mértéket a $GL(2;\mathbb{R})$ csoporton. A jobboldali Haar mérték ugyanez lenne, hiszen

$$\frac{\partial AB}{\partial A} = I_2 \otimes B\,,$$

aminek a determinánsa ugyancsak $(\det B)^2$.

Az általános $GL(n,\mathbb{R})$ esetben a számolás teljesen hasonló, n lesz a 2 kitevő helyében, mivel ekkor

$$\frac{\partial BA}{\partial A} = B \otimes I_n$$

és a determináns $(\det B)^n$. □

Egy olyan példa következik, amiben a balinvariáns és a jobbinvariáns Haar-mértékek különböznek.

7. példa: Legyen G a 2×2-es inverálható felső háromszög mátrixok csoportja. Ha

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & w \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{xw}\begin{bmatrix} w & -y \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad BA = \begin{bmatrix} ax & ay+bw \\ 0 & dw \end{bmatrix}.$$

Ezek a formulák mutatják, hogy G valóban csoport.

A csoport balinvariáns Haar-mértékét keressük az előző példához hasonlóan

$$d\mu(A) = p(x, y, w)\, dxdydw =: p(A)\, dA$$

alakban. A balinvariancia az

$$\int f(A)p(A)\, dA = \int f(BA)p(A)\, dA$$

egyenlet, ahol $B \in G$ tetszőleges mátrix. A jobb oldalon helyettesítéses integrálást végzünk

$$\int f(BA)p(A)\, dA = \int f(A')p(B^{-1}A') \left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| dA' \,,$$

$BA = A'$. A

$$\frac{\partial A'}{\partial A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Jacobi-mátrix alapján

$$\left| \frac{\partial A}{\partial A'} \right| := \left| \det \left[\frac{\partial A}{\partial A'} \right] \right| = \frac{1}{a^2 d}.$$

Az invariancia feltétele tehát

$$\int f(A)p(A)\, dA = \int f(A')p(B^{-1}A') \frac{1}{a^2 d}\, dA' = \int f(A)p(B^{-1}A) \frac{1}{a^2 d}\, dA,$$

azaz $a^2 dp(A) = p(B^{-1}A)$. Részletesen

$$a^2 d\, p\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & w \end{bmatrix} \right) = p\left(\begin{bmatrix} \frac{x}{a} & \frac{dy-bw}{da} \\ 0 & \frac{w}{d} \end{bmatrix} \right).$$

Úgy látszik, hogy p nem függ az $(1, 2)$ elemtől. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$p(A) = \frac{1}{x^2|w|}$$

a megoldás.

A jobbinvariancia az

$$\int f(A)q(A)\, dA = \int f(AB)q(A)\, dA$$

egyenlet, amit a q függvényre hasonlóan oldhatunk meg.

$$q(A) = \frac{1}{|x|w^2},$$

tehát a balinvariáns és jobbinvariáns mértékek valóban különböznek. □

Legyen μ a balinvariáns Haar-mérték a lokálisan kompakt G topológikus csoporton. Rögzített $g \in G$-re

$$H \mapsto \mu(Hg^{-1})$$

balinvariáns mérték, ezért $\Delta(g)$ számszorosa a μ mértéknek:

$$\mu(Hg^{-1}) = \Delta(g)\mu(H) \quad \text{minden mérhető } H \text{ halmazra.}$$

moduláris függvénynek nevezzük. Mivel

$$\mu(H(g_1g_2)^{-1}) = \Delta(g_1g_2)\mu(H)$$

és

$$\mu(H(g_1g_2)^{-1}) = \mu(Hg_2^{-1}g_1^{-1}) = \Delta(g_1)\mu(Hg_2^{-1}) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)\mu(H),$$

arra a következtetésre jutunk, hogy

$$\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2) \qquad (g_1, g_2 \in G).$$

A moduláris függvény csoport homomorfizmus a pozitív számok multiplikatív csoportjába. A baloldali és a jobboldali Haar-mértékek akkor egyeznek meg, ha $\Delta \equiv 1$.

5.5. Feladatok

1. Legyen X egy metrikus tér. Igazoljuk, hogy a legszűkebb σ-algebra, amelyre minden folytonos $X \to \mathbb{R}$ függvény mérhető az a Borel-halmazok σ-algebrája.

2. Általánosítsuk a 7. Példát $n \times n$-es mátrixokra!

3. A $[0,1]$ intervallum Borel-halmazain értelmezzünk egy előjeles mértéket:

$$\mu(E) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2},$$

ahol az összegzés azokra az n természetes számokra van, amelyekre $n^{-1} \in E$. Mi lesz ennek az előjeles mértéknek a Jordan-felbontása?

4. A $\varphi : C([-2,2]) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálra teljesül, hogy

$$\varphi(f) = \begin{cases} f(2) & \text{ha } f \text{ páratlan,} \\ \int_{-2}^{2} f(x)\,dx & \text{ha } f \text{ páros.} \end{cases}$$

Adjuk meg azt a ν előjeles mértéket, amire

$$\varphi(f) = \int_{[-2,2]} F(x)\,d\nu(x).$$

5. Legyen $G \equiv SL(2,\mathbb{C})$ a 2×2-es egy determinánsú komplex mátrixok csoportja. Igazoljuk, hogy a balinvariáns Haar-mérték jobbinvariáns is! Igazoljuk hogy egy mérhető halmaznak és inverzének megegyezik a Haar-mértéke!

6. Mutassuk meg, hogy a
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$$
mátrixok a mátrixszorzásra lokálisan kompakt topologikus csoportot alkotnak az elemenkénti konvergenxiára vonatkozóan. Mi a Haar-mérték?

7. Igazoljuk, hogy egy kompakt topológikus csoporton a balinvariáns és a jobbinvariáns Haar-mértékek megegyeznek!

8. Mutassuk meg, hogy a
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad a, b \in \mathbb{R}, a > 0$$
mátrixok a mátrixszorzásra lokálisan kompakt topologikus csoportot alkotnak az elemenkénti konvergenxiára vonatkozóan. Mutassuk meg, hogy a balinvariáns és jobbinvariáns Haar-mértékek különböznek.

9. Adjuk meg a 7. Példában vizsgált csoport moduláris függvényét!

10. Igazoljuk, hogy a moduláris függvény folytonos!

6. fejezet

Fourier-transzformáció

Ebben a fejezetben lokálisan kompakt kommutatív topológikus csoportokkal foglalkozunk. A csoportszorzást többnyire $+$-szal jelöljük, ilyenkor az egységelem 0. A motiváció a következő példa.

1. példa: $\mathbb{R}^n$ a szokásos koordinátánkénti összeadással kommutatív csoport. Metrikát többet is értelmezhetünk, az egyik

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

$\mathbb{Z}$ az összeadással diszkrét lokálisan kompakt kommutatív csoport.

$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ komplex számok szorzásával kommutatív csoport, $z^{-1} = 1/z = \bar{z}$. A

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

metrika kompakt topológikus térré teszi. □

6.1. Duális csoport

A G csoport **karakterei** a $G \to \mathbb{T}$ folytonos csoporthomomorfizmusok. Ha $\chi_1 : G \to \mathbb{T}$ és $\chi_2 : G \to \mathbb{T}$ karakterek, akkor a pontonkénti szorzatuk is az:

$$\chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g), \quad \chi^{-1}(g) = \overline{\chi}(g).$$

A karakterek egy $\hat{G}$ kommutatív csoportot alkotnak, amit G **duálisának** nevezünk.

1. tétel: *$\mathbb{R}$ karakterei $t \mapsto \exp(its)$ alakúak, $s \in \mathbb{R}$. $\mathbb{T}$ karakterei $z \mapsto z^n$ alakúak, $n \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ karakterei $n \mapsto z^n$ alakúak, $z \in \mathbb{T}$.*

Bizonyítás: Legyen $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ egy karakter Ekkor $\chi(0) = 1$ és $x \in [-a, a]$ esetén $\operatorname{Re}\chi(x) > 0$. Ekkor

$$\chi(x) = e^{\mathrm{i}k(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} < k(x) < \frac{\pi}{2}$$

egy folytonos k függvényre. Mivel

$$k(x + y) = k(x) + k(y) \quad \text{ha} \quad x, y, x + y \in [-a, a],$$

$k(rx) = rk(x)$ racionális r számokra. A folytonosság miatt ez valós számokra is igaz, és ebből arra következtethetünk, hogy $k(x) = \alpha x$ és

$$\chi(y) = e^{\mathrm{i}\alpha y}$$

minden valós y-ra. $\mathbb{R}$ karakterei valós számokkal vannak paraméterezve, ezért $\mathbb{R}$ duálisa önmaga.

Az egész számok $\mathbb{Z}$ additív csoportjának karaktereit könnyű látni. $\chi(1) = z \in \mathbb{T}$, akkor

$$\chi(n) = z^n.$$

Így $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Legyen $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ egy karakter. A $v : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$ leképezés csoport-homomorfizmus, ezért $\chi \circ v$ is karakter:

$$\chi(e^{\mathrm{i}t}) = e^{\mathrm{i}tx}$$

valamely $x \in \mathbb{R}$ számra. Ha k egész szám, akkor $(t + 2k\pi)x - tx$ a 2π egész számú többszöröse kell, hogy legyen, ezért $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

A tételből következik, hogy $\mathbb{R}^n$ karakterei

$$\chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$$

alakúak, tehát $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n$.

$\hat{G}$ kommutatív csoport, de egyelőre nem topológikus. A **konvergencia** legyen a karakterek egyenletes konvergenciája G minden kompakt részhalmazán. Nem bizonyítjuk, hogy így G is lokálisan kompakt lesz.

2. példa: $\hat{\mathbb{R}}$ algebrailag és topológikusan is $\mathbb{R}$. Az algebrai oldalt 1. lemma tartalmazta. A topológiai oldal azt jelenti, hogy $t_n \to t$ $\mathbb{R}$-ben akkor és csak akkor, ha

$$e^{\mathrm{i}t_n x} \to e^{\mathrm{i}tx}$$

minden korlátos intervallumon egyenletesen. Ez igaz, de nem triviális. $\square$

6.2. Konvolució

G egy lokálisan kompakt (metrizálható) topológikus csoport, $M^1(G)$ az előjeles mértékek normált tere. Van egy természetes leképezés G-ből $M^1(G)$-be, $g \in G$-hez rendeljük δ_g-t, a g pontra koncentrált Dirac-mértéket. A csoportszorzást ki akarjuk terjeszteni $M^1(G)$-re.

Legyen $\delta_g \star \delta_h := \delta_{g+h}$, ha $g, h \in G$. Ezt nevezzük **konvoluciónak**. A bilinearitás alapján diszkrét mértékekre kiterjeszthetjük. Ha $\mu = \sum_i c_i \delta_{g_i}$ és $\nu = \sum_j d_j \delta_{h_j}$, akkor

$$\mu \star \nu := \sum_{i,j} c_i d_j \delta_{g_i + h_j}.$$

Ez a konvolució kommutatív, asszociatív és disztributív.

Tetszőleges $\mu, \nu \in M^1(G)$ mértékekre a definició kevésbé egyszerű.

Legyen $C_0(G)$ a végtelenben 0 határértékű függvények tere. $f \in C_0(G)$-re legyen

$$\phi(f) := \int_G \int_G f(x+y)\, d\nu(x) d\mu(y).$$

Ez egy korlátos lineáris funkcionál, amely egy előjeles mérték szerinti integrál, ezt a mértéket nevezük a $\nu \star \mu$ konvoluciónak:

$$\int_G f(z)\, d(\nu \star \mu)(z) = \int_G \int_G f(x+y)\, d\nu(x) d\mu(y).$$

Jelölje $L^1(G)$ a G Haar-mértékére integrálható függvények terét. Egy $f \in L^1(G)$ függvény indukál egy $\mu_f \in M^1(G)$ mértéket:

$$d\mu_f(g) := f(g)\, dg,$$

ahol dg a Haar-mértéket jelenti.

$$\begin{aligned}
\int_G h(z)\, d(\mu_f \star \mu_g)(z) &= \int_G \int_G h(x+y) f(x) g(y)\, dx dy \\
&= \int_G \int_G h(x) f(x-y) g(y)\, dx dy \\
&= \int_G h(x) \left(\int_G f(x-y) g(y)\, dy \right) dx
\end{aligned}$$

Tehát a $\mu_f \star \mu_g$ konvolució-mérték a

$$\int_G f(x-y) g(y)\, dy \tag{6.1}$$

függvénynek felel meg, amennyiben ez integrálható (lásd a 4. feladatot). A (6.1) függvényt f és g konvoluciójának is mondjuk, jelölés $f \star g$.

A következő példában $\mathbb{R}^n$-ben nézünk konvoluciót, a 0-ra koncentrált Dirac-delta egységként működik a mértékek terében. A függvények terében nincsen egység, viszont úgynevezett **approximatív egységek** vannak.

Jelöljük $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-nel az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett (komplex, esetleg valós értékű) végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények halmazát. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ egy lineáris tér, a benne lévő függvények integrálhatók és differenciálhatók, s mi több, minden parciális deriváltjuk is a térben van. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben, ez is kiderül a következő példában.

3. példa: Ha f és g komplex értékű függvények $\mathbb{R}^n$-en, akkor az $f*g$ **konvolúciójukat** az

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

formula értelmezi. $f*g = g*f$ nyomban adódik a definícióból a változók helyettesítésével. Ha $f, g \in L^2$, akkor a Schwarz-egyenlőtlenség biztosítja az integrál létezését minden $x \in \mathbb{R}^n$-re. (Megjegyezzük, hogy ha $f \in L^p$, $g \in L^q$ és $p^{-1} + q^{-1} \geq 1$, akkor a az integrál majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re létezik, továbbá $f*g \in L^r$, $1 + r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$.)

Válasszunk egy olyan $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $j \geq 0$ és $\int j(x)\,dx = 1$. j nem más, mint egy valószínűségsűrűség, és gondolhatunk például a **standard normális eloszlásra**:

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{2}\Big) \qquad \Big(\|x\|^2 = \sum_i |x_i|^2\Big)$$

Legyen

$$j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon),$$

ami egy új sűrűségfüggvény. A fenti példában

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^n} \exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{2\,\varepsilon^2}\Big) \tag{6.2}$$

(szintén normális eloszlás, de más a szórás mátrixa).

Megmutatjuk, hogy az $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f$ értelmezéssel $J_\varepsilon : f \mapsto f_\varepsilon$ egy korlátos operátor az L^2 téren.

Az alábbiakban $F(x) := |f(x)|$.

$$\begin{aligned}
\int |f_\varepsilon(x)|^p\,dx &= \int \Big[\int j_\varepsilon(y)F(x-y)\,dy\Big]^p dx \leq \\
&\leq \int \Big[\Big(\int j_\varepsilon(y)\,dy\Big)^{p/q} \int j_\varepsilon(y)F(x-y)^p\,dy\Big]\,dx = \\
&= \iint j_\varepsilon(y)F(x-y)^p\,dydx = \int \Big(\int j_\varepsilon(y)F(x-y)^p\,dx\Big)\,dy = \\
&= \int F(x)^p\,dx = \int |f(x)|^p\,dx\,.
\end{aligned}$$

Itt először a Hölder-egyenlőtlenséget használtuk fel a $j_\varepsilon = (j_\varepsilon)^{1/p}(j_\varepsilon)^{1/q}$ faktorizálással, utána pedig a Fubini-tételre való hivatkozással megcseréltük az integrálokat. Becslésünk azt mutatja, hogy $\|J_\varepsilon(f)\|_p \leq \|f\|_p$, ha $1 \leq p < \infty$.

Bizonyítható, hogy

$$\|j_\varepsilon * f - f\|_p \to 0\,, \quad \text{amint} \quad \varepsilon \to +0\,. \tag{6.3}$$

Ennek jelentősége akkor látszik számunkra, ha j-t $\mathcal{D}$-beli függvénynek választjuk, például

$$j(x) = \begin{cases} C \exp\Big(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\Big), & \text{ha } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Ekkor ugyanis J_ε értékei $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-ben vannak, és az értékkészletek egyesítése (6.3) szerint sűrű $L^p(\mathbb{R}^n)$-ben. Ha egy $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ függvényt végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvénnyel akarunk közelíteni, akkor először egy kompakt tartójú f_0 függvénnyel közelítjük, majd a $j_\varepsilon * f_0$ függvényt vesszük, ami sima és kompakt tartójú, ha j (6.4)-ből van. □

6.3. Fourier-transzformáció

Legyen $\mu \in M^1(G)$ előjeles mérték. Fourier-transzformáltja egy függvény $\hat{G}$-n:

$$\hat{\mu}(\chi) := \int_G \chi(g)\, d\mu(g) \qquad (\chi \in \hat{G}).$$

Mivel $|\chi(g)| = 1$, az integrál biztosan létezik.

2. tétel: *Ha $\mu, \nu \in M^1(G)$, akkor*

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}.$$

Bizonyítás: Legyen $\rho := \mu * \nu$. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_G \chi(z)\, d\rho(z) &= \int_G \int_G \chi(x+y)\, d\nu(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G \chi(x)\chi(y)\, d\nu(x) d\nu(y) \\ &= \Big(\int_G \chi(x)\, d\nu(x)\Big) \Big(\int_G \chi(y)\, d\nu(y)\Big) \\ &= \hat{\mu}(\chi)\hat{\nu}(\chi), \end{aligned}$$

ahol először a definicót, aztán χ multiplikativitását, végül a Fubini-tételt használtuk. □

Ha a $\mu \in M^1(G)$ előjeles mértéket az $f \in L^1(g)$ függvény adja meg, azaz

$$\mu_f(A) = \int f(g) \mathbf{1}_A\, dg,$$

akkor

$$\hat{f}(\chi) := \int_G \chi(g) f(g)\, dg \qquad (\chi \in \hat{G}).$$

Az előző tétel természetesen integrálható függvényekre is igaz.

Ha $g \in G$, akkor τ_g a függvények g-vel való eltolását jelöli, azaz

$$(\tau_g f)(h) = f(h-g) \qquad (h \in G).$$

Mivel a Haar-mártékk eltolás invariáns

$$\|f\|_p = \|\tau_g f\|_p \qquad (1 \le p \le \infty).$$

A $g \mapsto \tau_g$ hozzárendelés a G csoport reprezentációja, hiszen

$$\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g+g'}.$$

(τ_g az $L^p(G)$ terek lineáris izometriájaként tekinthető.)

3. tétel: *Ha $f \in L^1(g)$ és $g \in G$, akkor*

$$\widehat{(\tau_g f)}(\chi) = \chi(g)\hat{f}(\chi).$$

Bizonyítás: A Haar-mérték eltolás invarianciáját is a karakterek multiplikativitását kell kihasználnunk:

$$\int f(h-g)\chi(h)\,dh = \int f(h)\chi(h+g)\,dh = \chi(h)\int f(h)\chi(h)\,dh.$$

□

Egy $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ függvény Fourier-transzformáltjához a $d\mu_f(x) = f(x)\,dx$ formulán át juthatunk:

$$\hat{f}(t) := \int e^{\mathrm{i}(t,x)} f(x)\,dx \quad \text{ahol} \quad (t,x) = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k. \tag{6.5}$$

Nem ez az egyetlen formula, ami az irodalomban előfordul, például

$$\int e^{-2\pi \mathrm{i}(t,x)} f(x)\,dx \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\mathrm{i}(t,x)} f(x)\,dx.$$

(Az ok feltehetően a 4. tételből jön.)

4. példa: Világos a (6.5) definícióból, hogy $\hat{f}$ korlátos:

$$|\hat{f}(t)| \le \int |e^{-\mathrm{i}(t,x)} f(x)|\,dx = \int |f(x)|\,dx\,.$$

A dominált konvergencia tételből adódóan $\hat{f}$ folytonos függvény.

Próbáljuk differenciálni $\hat{f}$-ot az egyváltozós esetben.

$$\frac{\hat{f}(t) - f(t')}{t-t'} = \int \frac{e^{\mathrm{i}tx} - e^{\mathrm{i}t'x}}{t-t'} f(x)\,dx\,.$$

Ha a $t' \to t$ határátmenetet akarjuk végrehajtani, akkor integrálható majoránst kell keresnünk. Az integrandusban lévő differenciahányados $\mathrm{i}xe^{\mathrm{i}tx}$-hez tart. Amennyiben $xf(x)$ integrálható

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \mathrm{i}\widehat{xf(x)}\,. \tag{6.6}$$

Ezt iterálva jutunk oda, hogy ha $x^n f(x)$ integrálható, akkor f Fourier-transzformáltja n-szer differenciálható. (Minél gyorsabban tart f a 0-hoz a végtelenben, annál simább a Fourier-transzformáltja.)

A (6.6) képlet levezetéséhez hasonlóan látható, hogy az n változós esetben $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ és $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ multiindexekre

$$(\mathrm{i})^{|\beta|+|\alpha|} t^\alpha \partial_\beta \hat{f}(t) = \int e^{\mathrm{i}(t,x)} \partial_\alpha (x^\beta f(x))\, dx\,. \tag{6.7}$$

A jelölés:

$$x^\beta := x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}, \quad \partial_\beta := (\partial_1)^{\beta_1} (\partial_2)^{\beta_2} \ldots (\partial_n)^{\beta_n}, \quad |\beta| := \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\,.$$

□

5. példa: Kiszámoljuk az $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned} \hat{f}_\lambda(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\lambda\left(x - \frac{\mathrm{i}t}{2\lambda}\right)^2 - \frac{t^2}{4\lambda}\right] dx = \\ &= e^{-t^2/4\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-t^2/4\lambda}\,. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a valószínűség-számításból is jól ismert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-z)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{6.8}$$

Gauss-féle integrált. (A bal oldal analitikus függvénye a komplex z változónak. Ezért abból a tényből, hogy valós z-re az integrál 1, következik, hogy bármilyen komplex z-re ugyanezt az értéket kell felvennie.)

Az egyváltozós esetből könnyen következik az alábbi többváltozós: ha

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda \|x\|^2} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)\,, \tag{6.9}$$

akkor

$$\hat{g}_\lambda(t) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-\|t\|^2/4\lambda} \qquad (t \in \mathbb{R}^n)\,. \tag{6.10}$$

□

6. példa: Kiszámoljuk az $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mathrm{i}tx}}{x^2 + a^2}\, dx$$

Tekintsük a komplex síkon értelmezett

$$F(z) := \frac{e^{-\mathrm{i}tx}}{z^2 + a^2}$$

függvényt, ahol $a > 0$ valós szám. Ennek két szinguláris pontja van, $\pm\,\mathrm{i}a$. Mivel ezek a nevezőnek egy multiplicitású gyökei, a szingularítások első rendű pólusok.

Ha $R > 0$ elég nagy és $\Gamma(R)$ a 0 középpontú R sugarú félkör a valós tengely alatt, akkor a **reziduum tétel** szerint

$$\int_{[-R,R]} F(z)\, dz + \int_{\Gamma(R)} F(z)\, dz = -2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Rez}(F, -\mathrm{i}a),$$

hiszen a zárt görbe negatív irányítású.

Ha $t > 0$ és $\mathrm{Im}\, z < 0$, akkor

$$|e^{-\mathrm{i}tz}| \leq 1$$

és

$$\int_{\Gamma(R)} F(z)\, dz \leq \frac{T}{T^2 - a^2} \to 0,$$

ha $T \to \infty$. Tehát

$$\hat{f}(t) = -2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Rez}(F, -\mathrm{i}a) = -2\pi\mathrm{i} \lim_{z \to -\mathrm{i}a} F(z)(z + \mathrm{i}a) = \frac{\pi}{a}\, e^{-at}$$

$t > 0$ esetén. Hasonlóan $t < 0$-ra (a felső félsíkot használva)

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{a}\, e^{-at}.$$

Így

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|t|}$$

a végeredmény. $\square$

4. tétel: (Plancherel-tétel) *Ha* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, *akkor* $(2\pi)^n \|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$.

Bizonyítás: Riesz Frigyes bizonyítását vázoljuk.

Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a (6.10) formulát és a Fubini-tételt használva:

$$\begin{aligned}
&\int |\hat{f}(t)|^2 \exp\left(-\lambda\|t\|^2/2\right) dt = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x) f(y) e^{-\mathrm{i}(t,x-y)} \exp\left(-\lambda\|t\|^2/2\right) dx\, dy\, dt = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \bar{f}(x) f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}(t,x-y)} \exp\left(-\lambda\|t\|^2/2\right) dt\right) dx\, dy \\
&\quad = \pi^{n/2} \iint \lambda^{-n/2} \exp\left(-\|x-y\|^2/2\lambda\right) \bar{f}(x) f(y)\, dx\, dy = \\
&\quad = (2\pi)^n \left\langle f(x), \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \lambda^{-n/2} \exp\left(-\|x-y\|^2/2\lambda\right) f(y)\, dy \right\rangle .
\end{aligned}$$

(A levezetésben először beírtuk $\hat{f}(t)$ és konjugáltjának integrállal adott értelmezését.)

Most a $\lambda \to 0$ határátmenetet hajtjuk végre. Az belső szorzat második tagja egy $j_{2\varepsilon} * f$ alakú konvolúció, lásd (6.3), ami tart f-hez, ha $\lambda \to 0$. Ezért az utolsó tag $\langle f, f\rangle = \|f\|^2$-hez tart, ha $\lambda \to 0$. Ugyanekkor a monoton konvergencia tétel szerint a kiindulási kifejezés tart $\|\hat{f}\|^2$-hez. □

A tétel szerint

$$f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-\mathrm{i}(t,x)} f(x)\, dx \tag{6.11}$$

L^2-normát tartó lineáris leképezás, ami kiterjeszthető egy $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ unitér operátorrá. Ezt **Fourier-Plancherel transzformációnak** is szokás nevezni.

A Fourier-transzformáció az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-teret önmagába viszi, lásd a 8 feladatot. Megkérdezhető, hogy a Fourier-transzformációnak mint

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$$

leképezésnek mennyi a normája a különböző $1 \le p, q \le \infty$ értékekre, azaz a

$$C(p,q) := \sup \left\{ \frac{\left[\int |\hat{f}(x)|^q\, dx\right]^{1/q}}{\left[\int |f(x)|^p dx\right]^{1/p}} : f \neq 0,\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right\}$$

számra vagyunk kiváncsiak. A **Plancherel-tétel** azt mondja, hogy $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$. Ha p és q nem konjugáltak, vagy $p > 2$, akkor $C(p,q) = +\infty$. Amennyiben konjugáltak, és $1 \le p \le 2$, akkor

$$C(p,q) = \sqrt{\frac{(2\pi q)^{1/q}}{(2\pi p)^{1/p}}} .$$

Az eredményt **Beckner** bizonyította 1975-ben a klasszikus **Hausdorff–Young-egyenlőtlenség** élesítéseként. **Lieb** megmutatta 1990-ben, hogy az

$$\|\hat{f}\|_q = C(p,q)\|f\|_p$$

egyenlőség (az $1 \leq p \leq 2$ és $f \neq 0$ esetben) csak Gauss-függvényekre teljesül, tehát $f(x) = A\exp(-Bx^2 + Cx)$. [1] □

7. példa: A Fourier-Plancherel transzformációnak szoros kapcsolatban áll a **Hermite-polinomokkal**, illetve a Hermite-függvényekkel. Értelmezzük a H_n Hermite-polinomokat úgynevezett **generátor függvény** segítségével:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2}, \tag{6.12}$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-x^2/2} H_n(x) = e^{2xt-x^2/2} e^{-t^2}.$$

A jobboldalnak kiszámoljuk a Fourier-Plancherel transzformáltját (az x változóban):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\mathrm{i}xs} e^{2xt-x^2/2} e^{-t^2}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\mathrm{i}xs} e^{-(x-2t)^2/2} e^{t^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\mathrm{i}(y+2t)s} e^{-y^2/2} e^{t^2}\,dy \\ &= e^{t^2} e^{-2ts\mathrm{i}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\mathrm{i}ys} e^{-y^2/2}\,dy \right) \\ &= e^{t^2} e^{-2ts\mathrm{i}} e^{-s^2/2}. \end{aligned}$$

(Teljes négyzetté való kiegészítés, $y = x - 2t$ integráltranszformáció és a standard normális eloszlás Fourier-transzformálása voltak az egyes lépések.) Ezt átírjuk:

$$e^{t^2} e^{-2ts\mathrm{i}} e^{-s^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}t)^n}{n!} e^{-s^2/2} H_n(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-\mathrm{i})^n e^{-s^2/2} H_n(s)$$

A fenti baloldal transzformáltja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{F}(e^{-x^2/2} H_n(x)).$$

Ezért

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2} H_n(x)) = (-\mathrm{i})^n e^{-s^2/2} H_n(s).$$

Tehát az $\mathcal{F}$ operátor sajátvektorait találtuk meg. □

Legyen

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)\,, \tag{6.13}$$

amit **Hermite-függvénynek** nevezünk. A konstans szorzók úgy vannak választva, hogy ezek a függvények az $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térben ortonormált rendszert alkossanak:

1. lemma:
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\varphi_m(x), dx = \delta(n,m) \qquad (n,m \in \mathbb{Z}^+).$$

Bizonyítás: Az
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-x^2/2} H_n(x) = e^{2xt-t^2-x^2/2}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^n}{m!} e^{-x^2/2} H_m(x) = e^{2xs-s^2-x^2/2}$$
egyenleteket összeszorozzuk és integrálunk:
$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^n\, s^m}{n!\, m!} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2-s^2} e^{2xt-2xs-x^2}\, dx. \tag{6.14}$$
A jobb oldalt számoljuk:
$$e^{-t^2-s^2+(s+t)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-(s+t))^2}\, dx = e^{2st}\sqrt{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k\, t^k}{k!} 2^k \sqrt{\pi}$$
Ezt összehasonlítva (6.14) balodalával megkapjuk az állítást. □

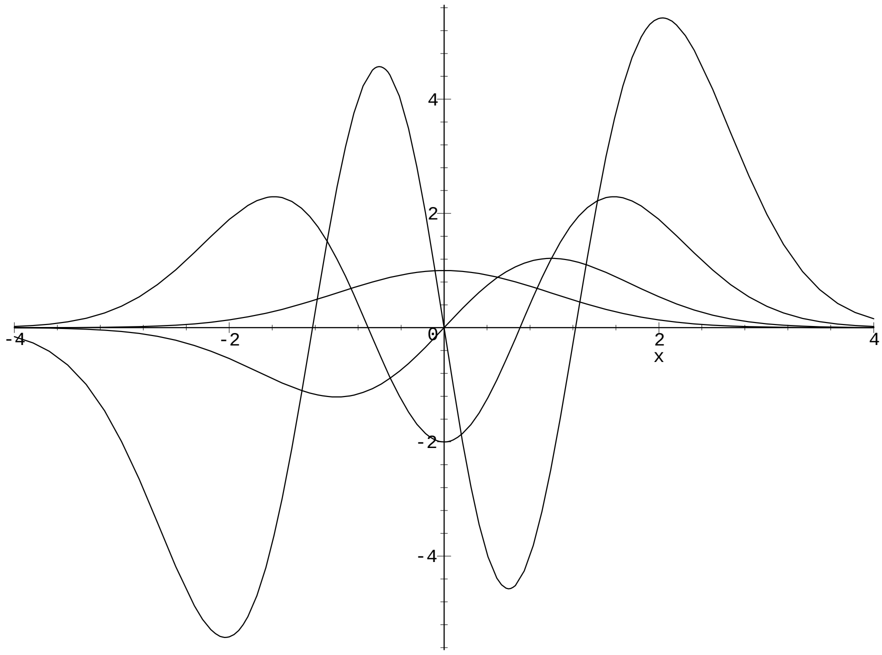
Megmutatható, hogy a Hermite-függvények bázist alkotnak $L^2(\mathbb{R})$-ben.

A fenti számolás eredménye
$$\mathcal{F}(\varphi_n) = (-\mathrm{i})^n \varphi_n\,, \tag{6.15}$$
ami azt mondja, hogy φ_n az $\mathcal{F}$ transzformáció sajátvektora $(-\mathrm{i})^n$ sajátértékkel. (Ez a tulajdonság egy alternatív bizonyítása a Plancherel-tételnek, $\mathcal{F}$ bázist bázisba visz, ezért unitér.)

Ha egy adott $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ függvény Hermite-féle sorfejtését ismerjük,
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x)\, dx\,,$$
akkor Fourier-Plancherel transzformáltja a
$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^n c_n \varphi_n$$
sorfejtés.

Ha n páros, akkor a H_n Hermite-polinom páros, páratlan n-re pedig páratlan. (Ez látszik a (6.17) formulából.) Ebből adódik, hogy a φ_n Hermite-függvény páros n-re páros, páratlan n-re páratlan.

Legyen $\mathcal{K}(f(x)) = \mathcal{F}(f(-x))$, azaz páros függvényre $\mathcal{K} = \mathcal{F}$, páratlanra pedig $\mathcal{K} = -\mathcal{F}$. A (6.15) formulából adódik, hogy $\mathcal{K}$ az $\mathcal{F}$ inverze. Ezért megkaptuk a következő tételt az inverz transzformációról.



A $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ és φ_3 Hermite-függvények grafikonja. φ_0 lapos haranggörbe alakú, általában φ_n páros függvény, ha n páros és páratlan, ha n is az.

5. tétel: *Ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, akkor*

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{\mathrm{i}(t,x)} f(x)\, dx\,.$$

8. példa: Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. **Laplace-transzformáltja**

$$\mathcal{L}(f)(t) := \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx. \tag{6.16}$$

Ha az f függvény kiterjesztjük az egész számegyenesre úgy, hogy $f(x) = 0$, ha $x < 0$, akkor nézhetjük a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)x} f(x)\, dx$$

integrált, ami biztosan létezik, ha $b \geq 0$. Ez $b = 0$-ra a Fourier-transzformáció, $a = 0$-ra a Laplace-transzformáció. Azt mondhatjuk, hogy a Laplace-transzformáció a a Fourier-transzformációnak egy komplex kiterjesztése. Az okoskodás alapján bizonyos tulajdonságok nyomban következnek a Laplace-transzformációra. $\square$

Az általános G kommutatív lokálisan kompakt csoportok után a $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^n$ vonatkozásában néztünk konkrétumokat. Most áttérünk a $\mathbb{T}$ csoportra. Először az egységre koncentrált Dirac–mérték közelítését vesszük.

Legyen $0 < r < 1$. A **Poisson-féle magfüggvény**

$$\begin{aligned} P_r(z) : &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} r^n z^{-n} = \\ &= \frac{1}{1-rz} + \frac{r\overline{z}}{1-r\overline{z}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}, \end{aligned}$$

ahol $z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Az utolsó formulából látszik, hogy P_r θ függvényében fogyó a $[0,\pi]$ intervallumon és $P_r(z) \geq 0$. A definiáló formula azt is mutatja, hogy

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(e^{i\theta})\, d\theta = 1,$$

tehát $P_r(z)$ egy sűrűségfüggvény.

6. tétel: *Legyen $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor*

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) P_r(z)\, dz \to f(1), \quad ha \quad r \to 1.$$

Bizonyítás: Feltehető, hogy $f(1) = 0$. A $\mathbb{T}$ halmazt két részre osztjuk:

$$A := \{e^{i\theta} : -\alpha < \theta < \alpha\}, \qquad B := \mathbb{T} \setminus A,$$

ahol α egy kis pozitív szám, $-\alpha < \theta < \alpha$ esetén $|f(e^{i\theta})| \leq \varepsilon$. Ekkor

$$\Big| \int_A f(z) P_r(z)\, dz \Big| \leq \varepsilon.$$

Ugyanakkor

$$\Big| \int_B f(z) P_r(z)\, dz \Big| \leq \|f\|_\infty \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha + r^2}.$$

Ez is kisebb ε-nál, ha r elég közel van 1-hez. □

6.4. Feladatok

1. Adjuk meg $\mathbb{T}$ karaktereit!
2. Legyen $\mu \in M^1(G)$ és $g \in G$. Mi a $\delta_g * \mu$ mérték?
3. Legyen $\mu, \nu \in M^1(G)$. Igazoljuk, hogy $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$.
4. Mutassuk meg, hogy ha $f, g \in L^1(G)$, akkor

   $$\int_G f(x-y) g(y)\, dy$$

   integrálható.

5. Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-\mathrm{i}tx} f(x)\, dx.$$

6. Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\mathrm{i}tx} - 1}{\mathrm{i}x} f(x)\, dx.$$

7. Igazoljuk, hogy a $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ intervallum karakterisztikus függvényének Fourier-transzformáltja $2t^{-1}\sin(ta)$.

8. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \exp(-a|x|)$ $(a > 0)$ valós függvény Fourier-transzformáltja
$$\hat{f}(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}.$$
(Útmutatás: parciális integrálás.)

9. Legyen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ azoknak a végtelen sokszor differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek a halmaza, amikre $x^n f^{(m)}(x)$ korlátos minden n és m természtes számra. Mutassuk meg, hogy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ esetén $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

10. Igazoljuk, hogy a Hermite-függvények az $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ osztályban vannak.

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú integrálható függvény. Mit mondhatunk róla, ha $\hat{f}$ is kompakt tartójú?

12. Legyen A $n \times n$-es pozitív definit valós elemű mátrix. Mi az

$$f(x) = e^{-(x,Ax)} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

függvény Fourier-transzformáltja, ha

$$(x, Ax) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j.$$

(Útmutatás: Diagonalizáljuk az A mátrixot.)

13. Vezessük le a (6.12) képletből, hogy

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^n n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{6.17}$$

14. Vezessük le a (6.12) képletből, a

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{6.18}$$

rekurziót.

15. Legyenek az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények az

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x^2} \quad (\lambda > 0), \qquad g(x) := \exp(-(x-m)^2/\sigma^2)$$

képletekkel adva. Számoljuk ki konvoluciójuk Fourier-transzformáltját.

Függelék

Metrikus és topologikus terek

Ha adott az X alaphalmaz részhalmazainak olyan $\mathcal{G}$ rendszere, hogy

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$,

(ii) ha $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, akkor $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$,

(iii) ha $G_i \in \mathcal{G}$ $(i \in I)$, akkor $\cup_i G_i \in \mathcal{G}$,

(iv) ha x_1 és x_2 különböző pontok X-ben, akkor vannak olyan diszjunkt $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ halmazok, hogy $x_1 \in G_1$ és $x_2 \in G_2$,

akkor $\mathcal{G}$-t (Hausdorff-féle) **topológiának** nevezzük az X halmazon, és elemeit **nyílt halmazoknak** hívjuk. Ha $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ olyan halmazrendszer, hogy $\mathcal{G}$ bármely eleme előáll $\mathcal{G}_0$-beli halmazok egyesítéseként, akkor $\mathcal{G}_0$ a $\mathcal{G}$ **topológiai bázisa**.

9. példa: $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában azokat a $G \subset \mathbb{R}$ halmazokat mondjuk nyíltnak, amelyek bármilyen $x \in G$ pontjához van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset G$. Itt topológiai bázist alkotnak a racionális végpontú nyílt intervallumok vagy azok a nyílt intervallumok, amelyek végpontjai diadikus racionális számok. $\square$

Ha $(X, \mathcal{G})$ egy topologikus tér, és $X_0 \subset X$, akkor X_0-on van egy $(X, \mathcal{G})$-ből örökölt topológia, amelyben az $X_0 \cap G$ halmazok a nyíltak, $G \in \mathcal{G}$. Ezt a topológiát **altértopológiának** is nevezzük.

Az $(X, \mathcal{G})$ topologikus térben az x_n sorozatról azt mondjuk, hogy $x \in X$-hez **konvergál**, jelölésben $x_n \to x$, ha minden olyan G nyílt halmazhoz, amelyre $x \in G$, van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $x_n \in G$, ha $n \geq N$. A topologikus tér definíciójának (iv) része biztosítja azt, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértékpontja legyen.

10. példa: Egy másik topológiát értelmezhetünk $\mathbb{R}$-en, ha azokat a halmazokat tekintjük nyíltnak, amelyek előállnak balról zárt és jobbról nyílt intervallumok egyesítéseként. Ebben a topológiában $x_n \to x$ esetén $x \leq x_n$ véges sok n kivételével. Ezért ezt a topológiát a **jobbról való konvergencia** topológiájának nevezzük. $\square$

A nyílt halmazok komplementumát **zárt halmaznak** nevezzük. Zárt halmazok metszete zárt, és véges sok zárt halmaz egyesítése zárt. Egy **halmaz lezárása** a legszűkebb őt tartalmazó zárt halmaz. Ha egy halmaz lezárása a teljes tér, akkor azt **sűrűnek** mondjuk.

11. példa: A racionális számok $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában sűrű halmazt képeznek. Ez a kijelentés azzal ekvivalens, hogy minden nyílt intervallum tartalmaz racionális számot. □

Topológiát **metrika**, azaz **távolság** segítségével is megadhatunk. $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ távolság, ha $x, y, z \in X$ esetén

(i) $d(x, y) = d(y, x)$,

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

(iii) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$.

Ha d egy távolság, akkor a

$$G(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

halmazok ($x \in X, r > 0$) egy topológia bázisát alkotják. Ez a távolsághoz vagy a **metrikus térhez** tartozó topológia. Ha két metrika ugyanazt a topológiát indukálja, akkor **(topologikusan) ekvivalenseknek** nevezzük őket. Érdemes megjegyezni, hogy metrikus térben $x_n \to x$ pontosan akkor teljesül, ha $d(x_n, x) \to 0$.

12. példa: A $\mathbb{R}^2$ halmazon

$$d_p((x, y), (x', y')) := [|x - x'|^p + |y - y'|^p]^{1/p}$$

távolságot ad minden $1 \leq p < \infty$ számra. (A metrika (ii) tulajdonsága a Minkowski-egyenlőtlenség következménye.) Ezek a távolságok mind topologikusan ekvivalensek, ugyanis

$$(x_n, y_n) \to (x, y)$$

a d_p távolság topológiájában akkor és csak akkor teljesül, ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ a szokásos értelemben. □

Ha egy topológia metrikából származtatható, akkor **metrizálhatónak** nevezzük. Nem minden topológia metrizálható. Metrizálható térben egy F halmaz pontosan akkor zárt, ha $x_n \to x$ és $x_n \in F$ esetén $x \in F$.

13. példa: Tekintsük $\mathbb{R}$-en a jobbról való konvergencia topológiáját! Tételezzük fel, hogy ezt egy d távolság metrizálja!

Ebben a térben $[x, 1)$ nyílt halmaz, tehát $G(x, r) \subset [x, 1)$ valamilyen $r(x) > 0$ számra. Ez azt jelenti, hogy $y < x$ esetén $d(x, y) > r(x)$. Legyen $H_n = \{x \in [0, 1) : r(x) > 1/n\}$.

A H_n halmazok lefedik $[0,1)$-et, ezért valamilyen n-re H_n nem megszámlálható. Ez tartalmaz egy szigorúan fogyó $x_1 > x_2 > \dots$ sorozatot, amely $\mathbb{R}$ szokásos topológiájában konvergál egy $0 \le x < 1$ számhoz, de konvergál a jobbról való folytonosság topológiájában is. Az utóbbi megállapítás ellentmond a $d(x, x_k) \ge 1/n$ körülménynek. □

Az x_n sorozat **Cauchy-féle** egy (X,d) metrikus térben, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $d(x_n, x_m) \le \varepsilon$, ha $n, m \ge N$. Egy metrikus teret **teljesnek** nevezünk, ha Cauchy-sorozatai konvergensek. Egy metrikus tér teljessége nem topológiai tulajdonság. Egy teljes metrikus tér topológiáját olyan távolsággal is metrizálhatjuk, ami nem teljes.

14. példa: Tekintsük a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán a következő távolságot:

$$d(n,m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| .$$

Ebben a metrikus térben x_k Cauchy-sorozat, ha x_k konvergál egy n természetes számhoz (a szokásos értelemben), azaz $x_k = n$ véges sok k index kivételével, vagy a másik lehetőség az, hogy $x_k \to \infty$ a szokásos értelemben. Az utóbbi x_k sorozat nem konvergens a metrikus térben, ezért a tér nem teljes. Ha $\mathbb{N}$-hez hozzávesszük a ∞ szimbólumot, és az $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ téren egy $\tilde{d}$ metrikát értelmezünk a

$$\tilde{d}(n,m) = d(n,m)\,, \quad \tilde{d}(n,\infty) = \frac{1}{n}$$

képletekkel, akkor egy teljes metrikus teret kapunk. □

A példához hasonlóan minden (X,d) metrikus térhez van egy olyan $(\tilde{X}, \tilde{d})$ teljes metrikus tér, hogy $X \subset \tilde{X}$, X sűrű $\tilde{X}$-ban, és $\tilde{d}$ megszorítása $X \times X$-re éppen a d távolság. Ilyenkor az $(\tilde{X}, \tilde{d})$ teret az (X,d) metrikus tér **teljessé tételének** vagy **teljes burkának** nevezzük. A teljes burok lényegében egyértelműen minden metrikus térre létezik.

Egy topológia **szeparábilis**, ha van benne megszámlálható sűrű halmaz.

15. példa: A folytonos $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvények $C[0,1]$ terén

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : 0 \le x \le 1\}$$

távolság, amiben $f_n \to f$ jelentése az, hogy f_n egyenletesen konvergál f-hez. A térben a polinomok sűrű halmazt alkotnak, ami a Weierstrass-féle approximációs tétel következménye. Mivel egy polinomot tetszőleges pontossággal közelíthetünk racionális együtthatójú polinommal, és utóbbiak megszámlálhatóan vannak, $C[0,1]$ szeparábilis. □

Legyen X és X' topologikus tér és $f : X \to X'$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f **folytonos** az $x \in X$ pontban, ha minden olyan $G' \subset X'$ nyílt halmazhoz, amelyre $f(x) \in G'$ létezik egy $G \subset X$ nyílt halmaz, hogy $x \in G$ és $f(G) \subset G'$.

Metrizálható terek esetén f x-beli folytonossága azzal egyenértékű, hogy $x_n \to x$ esetén $f(x_n) \to f(x)$.

16. példa: Legyen (X, d) egy metrikus tér és $H \subset X$. Értelmezzünk egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \inf\{d(x, h) \,:\, h \in H\}$$

képlettel! Mivel $d(x, h) \leq d(x, x') + d(x', h)$, teljesül az

$$f(x) \leq d(x, x') + f(x')$$

egyenlőtlenség, azaz

$$|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')\,.$$

Ez mutatja f folytonosságát, ugyanis $x_n \to x$ esetén $d(x_n, x) \to 0$, tehát $|f(x_n) - f(x)| \to 0$.

Megmutatható, hogy $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha x a H halmaz lezárásában van. Ezért zárt H halmazra $f(x) > 0$, ha $x \notin H$. Ilyenkor f-et az x pont H-tól való távolságának nevezzük. $\square$

Ha az $f : X \to X'$ topologikus terek közötti leképezés minden $x \in X$ pontban folytonos, akkor egyszerűen folytonosnak nevezzük.

Az $f : X \to X'$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha minden $G' \subset X'$ nyílt halmazra $f^{-1}(G')$ nyílt halmaz X-ben.

17. példa: Az a tény, hogy egy leképezés folytonos-e nagyban függ attól, hogy milyen topológiákra vonatkoztatunk. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, és egy x_n $\mathbb{R}$-beli sorozatra jelentse $x_n \to x$ a szokásos konvergenciát. Tekintsünk $\mathbb{R}$-en két topológiát, $\mathcal{G}_1$-et és $\mathcal{G}_2$-t, és nézzük meg, hogy $f : (\mathbb{R}, \mathcal{G}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{G}_2)$ mikor lesz folytonos.

Ha $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ a szokásos topológiák, akkor ezek metrizálhatók, és f folytonossága azt jelenti, hogy bármilyen $x_n \to x$ esetén $f(x_n) \to f(x)$. Ez tehát az $\mathbb{R}$-en értelmezett valós függvények jól ismert folytonosság fogalma.

$\mathcal{G}_1$-et tartsuk meg a szokásos topológiának, de $\mathcal{G}_2$ legyen a jobbról való konvergencia topológiája. Ekkor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lesz, ha minden $a < b$ esetén $\{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq f(x) < b\}$ nyílt halmaz. Ez maga után vonja, hogy

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, a < f(x) < b\} = \bigcup_n \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, a + \frac{1}{n} \leq f(x) < b\right\}$$

ugyancsak nyílt. Ezért f-nek folytonosnak kell lennie a szokásos értelemben is. Ha $x_n \to x_0$ és $f(x_0) = a$, akkor $\{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq f(x) < a + \varepsilon\}$ nyílt halmaz, ami csak úgy lehet, ha $f(x_n) \geq f(x_0)$ véges sok n kivételével. Ezért f-nek lokális minimuma van a tetszőleges x_0 pontban. Megmutatható, hogy ez csupán az állandó függvények tulajdonsága. Csak ezek lesznek az $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{G}_2)$ értelemben folytonosak.

Végül legyen $\mathcal{G}_1$ a jobbról való konvergencia topológiája és $\mathcal{G}_2$ a szokásos topológia. Ekkor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akkor lesz folytonos, ha $x_n \searrow x_o$ fogyóan esetén $f(x_n) \to f(x_0)$. Ilyenkor szoktuk az f függvényt jobbról folytonosnak mondani. □

Egy topologikus teret **kompaktnak** nevezünk, akkor ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

18. példa: $\mathbb{R}^n$ nem kompakt, mert a

$$G(0, m) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(0, x) < m\}$$

gömbök közül nem választható ki véges sok, ami lefedné $\mathbb{R}^n$-et. Ugyanakkor, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kompakt, mert minden nyílt halmazokból álló fedése tartalmaz véges fedést (Borel-féle befedési tétel). □

Egy topologikus tér kompakt részhalmazai zártak, kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt. Továbbá, ha X kompakt és $f : X \to Y$ folytonos leképezés, akkor $f(X)$ is kompakt. Egy metrizálható tér pontosan akkor kompakt, ha minden sorozata tartalmaz konvergens részsorozatot.

19. példa: $\mathbb{R}$-en a jobbról való konvergencia topológiája nem kompakt, mert az $[n, n + 1)$ nyílt halmazok páronként diszjunkt fedést alkotnak, $n \in \mathbb{Z}$. □

20. példa: $\mathbb{T}$ kompakt, mert $\mathbb{R}$-nek korlátos és zárt részhalmaza, vagy mert $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{T}$, $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ folytonos ráképezés. □

21. példa: $\mathbb{R}^n$ részhalmazai közül a korlátos és zárt halmazok a kompaktak. □

Az X topologikus teret **lokálisan kompaktnak** nevezzük, ha minden $x \in X$ ponthoz van olyan x-et tartalmazó nyílt halmaz, amelynek a lezárása kompakt.

22. példa: Legyen X egy lokálisan kompakt tér, $H \subset X$ és $x \in H$. Ekkor létezik olyan nyílt G halmaz és K kompakt halmaz X-ben, amelyre $x \in G \subset K$.

(i) Ha H zárt halmaz, akkor $G \cap H$ nyílt H-ban, és $H \cap K$ kompakt részhalmaza H-nak. Nyilván $x \in G \cap H \subset K \cap H$. Ezért H az öröklött topológiában lokálisan kompakt.

(ii) Legyen most H nyílt, és tételezzük fel az egyszerűség végett, hogy X topológiája metrizálható. Ekkor x-nek és $X \setminus H$-nak van egy pozitív $d_0 > 0$ távolsága. Legyen $G_0 = G(x, d_0/2)$ és $F_0 = \overline{G}_0$. Ekkor $\overline{G}_0 \subset H$ zárt halmaz X-ben, és $\overline{G}_0 \cap K$ kompakt részhalmaza H-nak. Mivel $x \in G_0 \cap G \subset \overline{G}_0 \cap K$, így H lokálisan kompakt.

Megmutattuk, hogy lokálisan kompakt tér nyílt és zárt részhalmazai is lokálisan kompaktak. Mivel $\mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt, így bőséges példáink vannak lokálisan kompakt terekre. Ugyanakkor az ℓ^p és $C[0,1]$ terek nem lokálisan kompaktak. □

Legyen $(X_1, \mathcal{G}_1)$ és $(X_2, \mathcal{G}_2)$ két topologikus tér. Az $X_1 \times X_2$ halmazon a $\{G_1 \times G_2 : G_1 \in \mathcal{G}_1,\ G_2 \in \mathcal{G}_2\}$ halmazrendszer egy topológia bázisát alkotja, ezt a topológiát tekintjük a két topológia szorzatának. Legyen Z egy topologikus tér és $f : Z \to X_1 \times X_2$, $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ egy leképezés. A **szorzattopológia** jellemzője az a tulajdonság, hogy bármilyen f leképezés akkor és csak akkor lesz folytonos, ha az f_1 és f_2 koordináta leképezései folytonosak.

23. példa: $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája számára a $G(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r\}$ gömbök alkotnak bázist. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája szorzattopológia. Ehhez két dolog kell. Egyrészt a $G(x,r)$ gömbök előállnak $G_1 \times G_2$ alakú halmazok egyesítéseiként, G_1 és G_2 nyílt részhalmazai $\mathbb{R}$-nek. Másrészt minden ilyen $G_1 \times G_2$ halmaz előáll $G(x,r)$ alakú gömbök egyesítéseként.

Legyen $y \in G(x,r)$. Ekkor $d(x,y) =: r_0 < r$ és $G(y, r - r_0) \subset G(x,r)$. Könnyű látni, hogy

$$\left(y_1 - \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}},\ y_1 + \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}\right) \times \left(y_2 - \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}},\ y_2 + \frac{r - r_0}{2\sqrt{2}}\right) \subset G(y, r - r_0)\,.$$

(Egyszerűen az $r - r_0$ sugarú körbe beírtunk egy $r - r_0$ átlójú négyzetet.) Ez bizonyítja az első állítást. A második állítás bizonyítása hasonló, itt négyzetbe kell kört írni. □

Természetesen véges sok topologikus tér szorzatát hasonlóan képezzük. Ha végtelen sok teret szorzunk, akkor olyan $G_1 \times G_2 \times \ldots$ halmazok alkotnak bázist a szorzattérben definíció szerint, hogy G_i a teljes X_i tér, véges sok index kivételével. Így, ha $\mathbb{R}$-nek vesszük önmagával végtelen sokszor a szorzatát, akkor $(0,1) \times (0,1) \times (0,1) \times \ldots$ nem lesz nyílt halmaz a szorzattérben!

7. tétel: (Tyihonov-tétel) *Akárhány kompakt topologikus tér szorzata kompakt.* □

24. példa: Tekintsük a $\{0,2\}$ halmazon a triviális topológiát, azaz $\{0\}$ és $\{2\}$ egyaránt nyílt halmazok. Legyen $X := \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ a $\{0,2\}$-tér önmagával vett végtelen szorzata. A Tyihonov-tétel szerint ez a tér kompakt és nem más mint a $\{0,2\}$ sorozatok tere. Ha $x_n \in X$ egy sorozat, akkor $x_n \to x$, ha $(x_n)^{(k)} \to x^{(k)}$, azaz az $(x_n)_k$ sorozat rögzített k-ra véges sok kivétellel $x^{(k)}$. ($(x_n)^{(k)}$ jelöli az x_n sorozat k-adik elemét.)

Ezt a teret metrizálhatjuk is, például a

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x^{(k)}-y^{(k)}|}{2^k}$$

távolsággal.

$$f:X\to[0,1]\,,\quad x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{(k)}}{3^k}$$

egy folytonos leképezés. Az x $0-2$ sorozathoz azt a valós számot rendeljük, amely harmados tört kifejtésének jegyeit az x sorozat adja meg. A képtér azokból a valós számokból áll amelyek ilyen kifejtésében nincsen 1-es jegy. Ez az ún. **Cantor-halmaz**. Az f leképezés és inverze is folytonos. Ez azon múlik, hogy valós számok egy sorozata éppen akkor konvergál egy valós számhoz, ha harmados tört alakban felírva őket, a jegyek sorozata rendre konvergál. □

Ezután folytonos függvényekre vonatkozó tételeket ismertetünk.

8. tétel: *Legyen X egy lokálisan kompakt tér, amely σ-kompakt, azaz lefedhető megszámlálható sok kompakt halmazzal. Ha $\{G_i\,:\,i\in I\}$ nyílt fedése X-nek, akkor létezik folytonos $f_n:X\to[0,1]$ függvényeknek egy olyan sorozata, amelyre*

(i) $\operatorname{supp} f_n$ *kompakt,*

(ii) $\sum f_n(x)=1$,

(iii) $\#\{n\in\mathbb{N}\,:\,K\cap\operatorname{supp} f_n\neq\emptyset\}$ *véges minden* $K\subset X$ *kompakt halmazra,*

(iv) minden $n\in\mathbb{N}$*-re létezik* $i\in I$*, hogy* $\operatorname{supp} f_n\subset G_i$. □

A tételben szereplő f_n függvénysorozatot a $\{G_i\,:\,i\in I\}$ fedéshez tartozó *egységosztásnak* nevezzük.

9. tétel: (Tietze-féle kiterjesztési tétel) *Legyen F zárt halmaz egy metrizálható X topologikus térben és $f:F\to[a,b]\subset\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, amely kiterjesztése f-nek.* □

10. tétel: (Weierstrass approximációs tétele) *Ha f az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény és $\varepsilon>0$, akkor létezik olyan p polinom, amelyre*

$$|f(x)-p(x)|\le\varepsilon,\quad ha\quad a\le x\le b\,.$$

Ha f valós értékű, akkor az őt közelítő polinom együtthatói valósak, egyébként komplex számok. A tétel úgy is fogalmazható, hogy a $C[a, b]$ Banach-térben a polinomok sűrűn vannak. Amennyiben a $[0, 1]$ intervallumról van szó, az f-et közelítő polinomok sorozata konkrétan is megadható. Ha

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

akkor a $p_n(x)$ **Bernstein-féle polinomok** egyenletesen konvergálnak az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez.

11. tétel: (Stone–Weierstrass approximációs tétel) *Legyen X egy kompakt topologikus tér és $\mathcal{A}$ folytonos valós értékű függvények olyan halmaza, amelyre*

(i) $\mathcal{A}$ tartalmazza a konstans függvényeket,

(ii) Ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor van olyan $f \in \mathcal{A}$, amelyre $f(x) \neq f(y)$,

(iii) Ha $f, g \in \mathcal{A}$, akkor $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{A}$.

Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű a $C_{\mathbb{R}}(X)$ Banach-térben.

A tétel komplex változata hasonló.

12. tétel: (Stone–Weierstrass approximációs tétel) *Legyen X egy kompakt topologikus tér és $\mathcal{A}$ folytonos komplex értékű függvények olyan halmaza, amely a fenti (i)-(iii) tulajdonságok mellett az alábbi tulajdonsággal is rendelkezik:*

(iv) Ha $f \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Ekkor $\mathcal{A}$ sűrű a $C_{\mathbb{C}}(X)$ Banach-térben.

Gyakran fontos a Stone–Weierstrass-tétel egy szorzattérre vonatkozó következménye. Legyen X az Y és Z kompakt topologikus terek szorzata. Ha $f(y, z)$ kétváltozós folytonos függvény az $X = Y \times Z$ téren, akkor $\varepsilon > 0$ esetén vannak olyan $g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y)$ és $h_1(z), h_2(z), \dots, h_n(z)$ folytonos függvények, amelyekre

$$\left| f(y, z) - \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, h_i(z) \right| \leq \varepsilon$$

minden $(y, z) \in Y \times Z$ esetén. (Azt is mondhatjuk,hogy a $C_{\mathbb{R}}(Y)$ és $C_{\mathbb{R}}(Z)$ lineáris terek algebrai tenzorszorzata sűrű $C_{\mathbb{R}}(Y \times Z)$-ben.)

Feladatok

1. Legyen X tetszőleges halmaz és d távolság X-en! Mutassuk meg, hogy $\varrho(x,y) = \min(1, d(x,y))$ ugyancsak távolság!

2. Definiáljuk a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazán az alábbi kétváltozós függvényt:
$$d(m,n) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{ha} \quad n \neq m, \\ 0, & \text{ha} \quad n = m. \end{cases}$$
Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathbb{N}, d)$ teljes metrikus tér!

3. A természetes számok halmazán definiáljuk az alábbi függvényt:
$$d(m,n) := \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha} \quad m,n \quad \text{utolsó } k \text{ számjegye azonos}, \\ 0, & \text{ha} \quad n = m. \end{cases}$$
Igazoljuk, hogy ekkor $(\mathbb{N}, d)$ metrikus tér, de nem teljes!

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény! Igazoljuk, hogy a $d(x,y) := |f(x) - f(y)|$ metrikát határoz meg $\mathbb{R}$-en!

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi metrikus terek nem teljesek, és konstruáljuk meg a megfelelő, teljessé tett tereket! **a.** Az $\mathbb{R}$ egyenes a $d(x,y) := |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ távolsággal. **b.** Az $\mathbb{R}$ egyenes a $d(x,y) := |e^x - e^y|$ távolsággal.

6. Legyen $\mathcal{I}$ a valós számok zárt valódi intervallumainak a halmaza: $\mathcal{I} := \{[a,b] \subset \mathbb{R} : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$! Definiáljuk $\mathcal{I}$-n a következő távolságot:
$$d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}^+ \qquad ([a,b],[c,d]) \mapsto |a-c| + |b-d| \,!$$
Bizonyítsuk be, hogy $(\mathcal{I}, d)$ metrikus tér, de nem teljes! Adjuk meg a tér teljes burkát!

7. Az előző feladatban szereplő $\mathcal{I}$ halmazon értelmezzünk egy másik távolságot:
$$d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}^+, \qquad ([a,b],[c,d]) \mapsto \mu([a,b]) + \mu([c,d]) - 2\mu([a,b] \cap [c,d]),$$
ahol $\mu([x,y]) = |y - x|$ és $\mu(\emptyset) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ez metrikus tér, de nem teljes! Keressük meg a teljessé tett teret!

8. Mutassuk meg, hogy a valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}$ tere nem teljes az alábbi metrikákra:
$$\begin{aligned} d_1(P,Q) &:= \max\{|P(x) - Q(x)| : 0 \le x \le 1\}, \\ d_2(P,Q) &:= \int_0^1 |P(x) - Q(x)| \, dx, \\ d_3(P,Q) &:= \sum_{i \in \mathbb{N}} |c_i|, \quad \text{ha} \quad P(x) - Q(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i x^i. \end{aligned}$$

9. Legyen (M, d) metrikus tér és $E \subset M$ nemüres részhalmaza! **a.** Igazoljuk, hogy
$$F(x) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$
folytonos függvény! ($f(x)$-et az x pont E halmaztól mért távolságának nevezzük.) **b.** Igazoljuk, hogy egy metrikus térben minden zárt halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt halmaz metszeteként!

10. Legyen (A, ϱ_1) és (B, ϱ_2) metrikus terek, $\varrho_1, \varrho_2 \le 1$ és $A \cap B = 0$! Igazolja, hogy az $X = A \cup B$ halmazon
$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in A, \quad y \in B, \\ 1, & \text{ha} \quad x \in B, \quad y \in A, \\ \varrho_1(x, y), & \text{ha} \quad x, y \in A, \\ \varrho_2(x, y), & \text{ha} \quad x, y \in B \end{cases}$$
metrika!

11. Mutassuk meg, hogy ha F zárt, G nyílt halmaz, és $G \subset F$, akkor $F \setminus G$ zárt! Továbbá, ha $F \subset G$, akkor $G \setminus F$ nyílt.

12. Mutassuk meg, hogy a racionális számok Q halmaza nem tartalmaz nyílt intervallumot!

13. Legyen
$$A = \Big\{x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 4^{-i} : \quad a_k \in \{0, 3\}\Big\}!$$
Tartalmaz-e A nyílt intervallumot?

14. Legyen (X, d) metrikus tér! Bizonyítsuk be, hogy
$$\varrho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
távolság!

15. Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén
$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le n\}, \qquad d_p(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p}.$$
Bizonyítsuk be, hogy $d_p(x, y) \to d_\infty(x, y)$, ha $p \to \infty$!

16. Legyen $n, m, \in \mathbb{N}$ esetén
$$d(n, m) = \Big|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big|.$$
Melyek a d metrikára a konvergens sorozatok, melyek a Cauchy-sorozatok? Mi az $(\mathbb{N}, d)$ tér teljes burka?

17. Legyen (X, d) egy metrikus tér! Az alábbi metrikák közül melyik ekvivalens d-vel? (Bizonyítsa az állítását!)

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,, \\ d_2(x,y) &= \min\{1,\ d(x,y)\}\,, \\ d_3(x,y) &= \sup\{|d(x,t)-d(y,t)| : t \in X\}\,. \end{aligned}$$

18. Az X halmaz a
$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq y\,, \\ 0, & \text{ha} \quad x = y \end{cases}$$
metrikával metrikus tér. Igazolja, hogy (X, d) pontosan akkor szeparábilis, ha X megszámlálható halmaz! Mikor lesz X kompakt?

19. Legyen x_n egy kompakt metrikus térben különböző pontokból álló sorozat! Mutassa meg, hogy x_n pontosan akkor konvergens, ha az $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak egyetlen torlódási pontja van! Lehet az x_n-re vonatkozó feltételt gyengíteni?

20. Legyen f az X topologikus térnek az Y topologikus térre való ráképzése! Igazolja, hogy X szeparábilitása magával vonja Y szeparábilitását!

21. Igazolja, hogy ha (X, d) szeparábilis metrikus tér, akkor minden nyílt fedéséből kiválasztható megszámlálható fedés!

22. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a következő távolságot tekintjük:
$$d(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t \in Q, \quad s \notin Q\,, \\ 1, & \text{ha} \quad t \notin Q, \quad s \in Q\,, \\ \min\{1/2,\ |t-s|\}, & \text{ha} \quad t,s \in Q\,, \\ \min\{1/2,\ |t-s|\}, & \text{ha} \quad t,s \notin Q\,. \end{cases}$$
a. Igazolja, hogy d metrika! **b.** Teljes-e az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér? **c.** Szeparábilis-e az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér? **d.** Mutassa meg, hogy a Dirichlet-függvény folytonos $(\mathbb{R}, d)$-n!

23. Legyen $f_n(x) = e^{-nx} \in C[0,1]$! **a.** Van-e az f_n függvénysorozatnak konvergens részsorozata? **b.** Kompakt-e a $C[0,1]$- tér? **c.** Esetleg lokálisan kompakt?

24. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény és $\varepsilon > 0$! Mutassa meg, hogy létezik olyan $p(x)$ polinom, amelyre $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ és $|f'(x) - p'(x)| < \varepsilon$ minden $0 < x < 1$ esetén!

25. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény! Mutassa meg, hogy van olyan $p(x)$ polinom, amelyben a változónak csak páros hatványai szerepelnek, és $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ tetszőleges előre adott $\varepsilon > 0$ számra!

26. Mutassa meg, hogy a $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ térben a $\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz által kifeszített lineáris altér sűrű!

27. Legyen (X, d) egy teljes metrikus tér és $x \in X$. Adjon meg az $X \setminus \{x\}$ téren egy olyan d' metrikát, amelyre a tér teljes és $X \setminus \{x\}$-ben ugyanazok a konvergens sorozatok a d' metrikára, mint a d metrikára!

28. Mutassa meg, hogy minden kompakt metrikus tér teljes és szeparábilis!

29. Mutassa meg, hogy az ℓ^∞ tér nem szeparábilis! (Útmutatás: 1. Ha x és y két különböző $0-1$ sorozat ℓ^∞-ben, akkor a $G(x, 1/2)$ és $G(y, 1/2)$ gömbök diszjunktak. 2. ℓ^∞ tartalmaz nem megszámlálhatóan sok páronként diszjunkt nyílt halmazt.)

30. Bizonyítsa be, hogy a folytonos szakaszonként lineáris függvények sűrűn vannak $C[0, 1]$-ben! (Útmutatás: Elegendő folytonosan differenciálható függvényeket közelíteni.)

31. Legyen $f : X \to Y$ topologikus terek közötti kölcsönösen egyértelmű ráképzés! Mutassa meg, hogy ha X kompakt, akkor f inverze folytonos!

32. Mutassa meg, hogy két metrizálható topologikus tér szorzata metrizálható!

33. Legyen $L^\infty[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon korlátos mérhető függvények tere a szuprémum normával ellátva! Igazolja, hogy $L^\infty[a, b]$ nem szeparábilis!

Lineáris operátorok

Az X vektorteret vagy lineáris teret normált térnek mondjuk, ha adott egy $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ függvény a következő tulajdonságokkal:

(1) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in X)$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad (x \in X,\ \lambda$ skalár),

(3) $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$.

Ekkor $\|\cdot\|$-t **normának** nevezzük és $(X, \|\cdot\|)$ **normált tér**. Az $\|x\|$-t az x vektor hosszaként értelmezzük. (A normált tér fogalmát egymástól függetlenül Hahn és Banach vezette be 1922–23-ban, jelentős részben Riesz Frigyes munkáinak hatására, aki a norma fogalmat konkrét terekben már korábban használta.)

Az $(X, \|\cdot\|)$ normált térben az $x \in X$ pont körüli $\varepsilon > 0$ sugarű gömb

$$G(x,\varepsilon) := \{y \in X : \|x-y\| < \varepsilon\}.$$

25. példa: Legyen $C(K)$ a K kompakt topologikus téren értelmezett folytonos (valós vagy komplex értékű) függvények vektortere, és legyen

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : \ a \le x \le b\}\,.$$

Egyszerűen megmutatható, hogy ez normát értelmez. □

Az $F : X \to Y$ leképezést az $x \in X$ pontban **folytonosnak** nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amelyre $F(G(x,\delta)) \subset G(F(x),\varepsilon)$. Ez azzal ekvivalens, hogy $x_n \to x$ maga után vonja $F(x_n) \to F(x)$-et. (Egyébként egy normált téren $d(x,y) := \|x-y\|$ metrika és a folytonosság nem más, mint a metrika toplógiájára való folytonosság.)

A normatartó leképezéseket **izometriának** nevezzük. Minden izometria folytonos.

13. tétel: *Legyen $(X_1, \|\cdot\|_1)$ és $(X_2, \|\cdot\|_2)$ két normált tér és $A : X_1 \to X_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor a következő két tulajdonság ekvivalens:*

(1) A mindenütt folytonos.

(2) A folytonos a 0 pontban.

(3) Létezik olyan $C > 0$ szám, amelyre $\|Ax\|_2 \le C\|x\|_1$ minden $x \in X_1$ esetén.

Bizonyítás: (1) ⇒ (2) evidens. (2) ⇒ (3) : $G_2 = \{x_2 \in X_2 : \|x_2\| < 1\}$ nyílt halmaz X_2-ben és $A0 = 0 \in G_2$. Van olyan nyílt G_1 halmaz a folytonosság miatt, amelyre $0 \in G_1$ és $AG_1 \subset G_2$. Mivel G_1 nyílt, létezik $\varepsilon > 0$, amelyre

$$G_1' = \{x_1 \in X_1 : \|x_1\| < \varepsilon\} \subset G_1\,.$$

Ekkor tetszőleges $x \in X_1$ esetén $\dfrac{\varepsilon}{2\|x\|_1} x \in G_1'$ és

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1} x\right) \in G_2,$$

azaz

$$\left\| A\left(\frac{\varepsilon}{2\|x\|_1} x\right)\right\|_2 < 1\,.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_1$$

teljesül.

(3) $\Rightarrow$ (1) igazolását az olvasóra bízzuk. □

A folytonos $X_1 \to X_2$ lineáris leképezések terét $B(X_1, X_2)$-vel jelöljük. $B(X_1, X_2)$ lineáris tér, de normált tér is. Ha $A \in B(X_1, X_2)$, akkor

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1\} \tag{6.19}$$

az előző tétel jelöléseivel. $\|A\|$ nem más, mint a 13. tétel (3) részében megjelenő lehetséges C számok legkisebbike. Ha X normált tér, akkor $B(X, X)$ helyett röviden $B(X)$-et írunk. $B(X)$-nek nemcsak lineáris, hanem **gyűrű struktúrája** is van, azaz elemeit az összeadás mellett szorozni is lehet: Ha $A, B \in B(X)$, akkor AB az ebben a sorrendben vett kompozíció. Az I identitás operátor az egységelem a gyűrűben és bizonyos operátoroknak van inverze a szorzásra nézve.

Az (6.19) **operátornormának** megvan a

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \tag{6.20}$$

szubmultiplikatív tulajdonsága.

2. lemma: *A $B(X)$ normált térben a szorzás és az inverz folytonos. Az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak.*

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $A_n \to A$ és $B_n \to B$. Ekkor

$$\|A_nB_n - AB\| = \|A_n(B_n - B) + (A_n - A)B\| \leq \|A_n\|\,\|B_n - B\| + \|A_n - A\|\,\|B\| \to 0$$

hiszen $\|A_n\| \to \|A\|$.

Ha $A_n \to A$ és A invertálható, akkor $A_nA^{-1} \to I$. Ha ebből következik, hogy $AA_n^{-1} \to I$, akor $A_n^{-1} \to A^{-1}$ is igaz. Tehát az inverz folytonosságához elég igazolni, hogy $B_n \to I$ alapján $B_n^{-1} \to I$. A geometriai sorfejtés

$$(I - (I - B_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - B_n)^k$$

igaz, ha $\|I - B_n\| < 1$. Tehát ilyen feltétel mellett B_n^{-1} is létezik, továbbá tart I-hez, ha $B_n \to I$. Az is adódik, hogy az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak. $\square$

Legyen (x_n) egy sorozat az X normált térben. **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra van egy N küszöbindex, amelyre $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, ha $n, m \geq N$. Egy normált teret **Banach-térnek** nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozatnak létezik határértéke. (Egy normált téren $d(x, y) := \|x - y\|$ metrika, és a tér pontosan akkor Banach-tér, ha ez a metrikus tér teljes.)

14. tétel: *Legyen X és Y normált tér és tételezzük fel, hogy Y Banach-tér. Ekkor $B(X, Y)$ Banach-tér.*

Legyen X normált tér. Az X^* vektortér X számértékű korlátos funkcionáljainak a tere, ami az operátornormával normált tér lesz, sőt az előzo tétel alapján Banach-tér. A Hahn-Banach-tétel következménye, hogy ha $x, y \in X$ különböző vektorok, akkor van olyan $\varphi \in X^*$ funkcionál, hogy $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Legyen $A \in B(X)$. Az A operátor $\sigma(A)$ **spektruma** azokból a $\lambda \in \mathbb{C}$ számokból áll, amikre $\lambda I - A$ nem invertálható. A definicióból a 2. Lemma alapján adódik, hogy a spektrum zárt halmaz.

15. tétel: *Egy $A \in B(X)$ operátor spektruma nemüres korlátos zárt halmaz.*

Bizonyítás: Mivel az invertálható operátorok nyílt halmazt alkotnak, a spektrum komplementuma is nyílt. A

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \tag{6.21}$$

sorfejtés $|\lambda| > \|A\|$ esetén helyes. Ezért a spektrum korlátos halmaz.

Megjegyezzük, hogy $(\lambda I - A)^{-1}$ differenciálható. Valóban, a

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} &= \frac{(\lambda I - A)^{-1}\Big((\lambda_0 I - A) - (\lambda I - A)\Big)(\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)^{-1} \end{aligned}$$

azonosság mutatja, hogy a derivált

$$-(\lambda_0 I - A)^{-2}.$$

Tételezzük fel, hogy a spektrum üres. Ekkor $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ az egész komplex síkon differenciálható operátorértékű függvény, aminek a határértéke a végtelenben (6.21)-ból adódóan 0. Ha $\varphi \in B(X)^*$ egy funkcionál, akkor a $\lambda \mapsto \varphi((\lambda I - A)^{-1})$ függvény korlátos és reguláris, a Liouville-tétel alapján azonosan 0. Mivel ez minden φ funkcionálra igaz, $(\lambda I - A)^{-1}) \equiv 0$. Ez lehetetlen, mert egy inverz nem lehet 0. $\square$

Ortogonális sorfejtések

Először nézzünk a $[-1,1]$ intervallumon értelmezett f és g függvényeket. Belső (vagy skalár) szorzatuk

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

(Ha valós függvényekkel foglalkozunk, akkor f konjugáltja nem lényeges.) Ha f és g folytonosak, akkor az integrál természetesen létezik, de $f, g \in L^2[-1,1]$ az általánosabb helyzet. f és g ortogonalítása $\langle f, g\rangle = 0$ és távolságuk

$$\rho(f,g) := \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \|f-g\|_2$$

Ez egy metrikus tér.

Legendre-sorfejtés

Az $L^2[-1,1]$ térben a folytonos függvények sűrű halmazt alkotnak. Valóban, az egyik lehetséges út, amin eljuthatunk $L^2[-1,1]$-hez az folytonos függvények $C[-1,1]$ terén keresztül vezet. A fenti távolsággal kapott metrikus tér teljes burkát vesszük. Ez lesz $L^2[-1,1]$. A teljes burokkal való értelmezés miatt $C[-1,1]$ sűrű $L^2[-1,1]$-ben. Ugyanakkor a polinomok sűrű halmazt alkotnak a Weierstrass-féle approximációs tétel szerint a $C[-1,1]$-ben az egyenletes konvergenciára nézve: Ha $f \in C[-1,1]$, akkor van olyan p_n polinom sorozat, amelyre

$$\sup\{|f(x) - p_n(x)| : -1 \le x \le 1\} \to 0\,.$$

Azonban

$$\rho(f, p_n) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x) - p_n(x)|^2\, dx} \le \sqrt{2 \sup\{|f(x) - p_n(x)| : -1 \le x \le 1\}},$$

ezért $p_n \to f$ a Hilbert-térben. Ez azt jelenti, hogy a polinomok sűrű halmazt alkotnak a $C[-1,1]$-ben a Hilbert-tér metrikájára nézve is. Végeredményben a polinomok sűrűn vannak $L^2[-1,1]$-ben.

Az $1, x, x^2, \dots$ sorozatra alkalmazhatjuk a **Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást**: Megkeressük az a lineáris $x + a_1$ polinomot, amely merőleges $p_0(x) :=$ 1-re, ez maga $p_1(x) := x$ $(a_1 = 0)$. Ezután meghatározzuk azt a $p_2(x) = x^2 + a_2 x + b_2$ kvadratikus polinomot, amely p_0-ra és p_1-re is ortogonális. A két ortogonalitási feltétel egy-egy egyenletet ad a_2-re és b_2-re. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk a $p_2(x)$ kvadratikus polinimot, és így tovább. Íme az első néhány polinom:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, & p_1(x) &= x, \\ p_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, & p_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, \\ p_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, & p_5(x) &= x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x\,. \end{aligned}$$

Polinomoknak egy olyan p_n ortogonális sorozatához jutunk, amelynek n-edik tagja egy n-edfokú polinom. Mivel nincs olyan függvény, amely minden polinomra ortogonális, ez a rendszer alkalmas normálással egy bázis, amelynek elemei egy szorzófaktortól eltekintve a **Legendre-féle polinomok**.

A harmadfokú és a negyedfokú Legendre-polinomok grafikonja. Általában is igaz, hogy a gyökök mindig $[-1, 1]$-ben vannak, a polinomok értéke 1-ben 1 és -1-ben ± 1

Az n-edfokú Legendre-polinom a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{6.22}$$

képlettel adható meg. A főegyüttható

$$\frac{n!}{2^n} \binom{2n}{n},$$

és ez az a szorzótényező, amiben P_n és a főegyütthatóra normált p_n különböznek.

A. M. Legendre francia matematikus volt, aki a

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda x = 0$$

differenciálegyenletet vizsgálta. $\lambda = n(n+1)$ esetén ennek megoldása a $P_n(x)$ Legendre-polinom.

$\|P_n(x)\|_2 \neq 1$, ugyanis

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2\, dx = \frac{2}{2n+1}\,. \tag{6.23}$$

Ha tehát az $L^2[-1,1]$ tér bázisához akarunk jutni, akkor a

$$\tilde{P}_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{6.24}$$

normálást kell alkalmazni. Így egy f függvény ortogonális sorfejtése

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{P}_n(x) \quad \text{ahol} \quad a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\tilde{P}_n(x)\, dx.$$

Ha a függvény folytonos, akkor egyenletes a konvergencia, az általános $f \in L^2[-1,1]$ esetben a konvergencia az $\|\cdot\|_2$ normában lesz. □

Fourier-sorfejtés

Ebben példában a $[-\pi,\pi]$ intervallumon értelmezett függvényekkel foglalkozunk.

Elemi számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\ \ldots, \tag{6.25}$$

függvények ortonormált rendszert alkotnak a $[-\pi,\pi]$ intervallumon és persze a $[0,2\pi]$ intervallumon is a periodikusság miatt.

A szokásos sorfejtése egy f függvénynek

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx.$$

Ha az f függvény folytonos és $f(-\pi) = f(\pi)$, akkor a Fourier-sorfejtés egyenletesen konvergál. (Az ilyen függvények kiterjeszthetők az egész számegyenesre 2π szerint periodikus függvénnyé.)

26. példa: Legyen $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definiálva a

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x \le \pi, \\ x - 2\pi & \text{ha } \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Ez a függvény a π pont kivételével folytonos, ott a baloldali határértéke π és a jobboldali $-\pi$. Kiterjesztve a teljes számegyenesre páratlan függvényt kapunk, ezért a $\cos kx$ függvények együtthatója 0 lesz.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin kx\, dx = -2\frac{(-1)^k}{k}.$$

Tehát a sorfejtés

$$2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

A sorfejtés $x = \pi$-re 0-t ad, ami a baloldali és a jobboldali limesz számtani közepe. □

Ha a $[-\pi, \pi]$ intervallumon értelmezett olyan függvényekkel foglalkozunk, amikre $f(-\pi) = f(\pi)$ teljesül, akkor ezek azonosithatók a

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

egységkörön értelmezett függvényekkel, $t \leftrightarrow e^{it}$. A Weirstrass-féle approximációs tétel szerint a

$$\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

függvények lineáris burka sűrűn van a folytonos függvények terében. Mivel

$$\frac{z^n + z^{-n}}{2} \leftrightarrow \cos nt \qquad \text{és} \qquad \frac{z^n - z^{-n}}{2} \leftrightarrow \sin nt,$$

a (**??**) függvények lineáris burka is sűrű a

$$\{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$$

térben.

Hermite-sorfejtés

indexHermite-sorfejtés A teljes számegyenesen a polinomok nem integrálhatók, hiszem a limeszük $\pm\infty$-ben $\pm\infty$. Az ortogonalitást a

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2}\, dx$$

integrállal értelmezhetjük, ami egy konstans szorzótól eltekintve a Gauss-mérték szerinti integrál. A megfelelő Hilbert-teret $L^2(e^{-x^2}dx)$-szel jelöljük, ebben a polinomok sűrűn vannak. Alkalmazhatjuk az $1, x, x^2, x^3, \dots$ sorozatraa Gram–Schmidt-féle ortogonalizációt, és egy ortogonális polinomrendszerhez jutunk.

Legyen

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{6.26}$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $H_n(x)$ egy n-edfokú polinom, amelynek főegyütthatója 2^n. (**??**)-et differenciálva kapjuk a

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \tag{6.27}$$

egyenletet. $f(x) := e^{-x^2}$ ismételt differenciálásával

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) + 2x \frac{d^n}{dx^n} f(x) + 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) = 0\,.$$

Ezt megszorozva a $(-1)^n e^{x^2}$ faktorral azt kapjuk, hogy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,, \tag{6.28}$$

ami lehetővé teszi a $H_n(x)$ polinomok rekurzív kiszámolását. A rendelkezésre álló egyenletek kombinálásával kapjuk még a

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{6.29}$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{6.30}$$

további összefüggéseket. Ismételt parciális integrálással jutunk a

$$\int e^{-x^2} H_n(x) v(x)\, dx = \int e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} v(x)\, dx$$

formulához, amely bármilyen $v(x)$ polinomra érvényes. Nevezetesen, ha $v(x)$ fokszáma n-nél kisebb, akkor a jobb oldalon 0 áll, tehát $H_n(x)$ merőleges minden nála alacsonyabb fokszámú polinomra, azaz a $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_{n-1}(x)$ polinomokra is. Ha $v(x)$ helyébe $H_n(x)$-et teszünk, akkor az adódik, hogy

$$\int e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \int e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\,.$$

Ezért a normalizált

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \tag{6.31}$$

Hermite-féle polinomok az $L^2(e^{-x^2}dx)$ tér bázisát alkotják. A Hermite-polinomokkal való számolásra a generátor függvény hasznos, lásd a **??** példát a 6. fejezetben.

A normalizált Hermite-féle polinomokból könnyen kaphatunk az $L^2(\mathbb{R})$ térben is bázist:

$$\varphi_n(x) := \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\tilde{H}_n(x)\,. \tag{6.32}$$

Az ortogonalitási relációk egyszerűen redukálódnak a Hermite-féle polinomok tulajdonságaira. Néhány Hermite-függvény gráfja a 6. fejezetben látható.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a $\varphi_n(x)$ Hermite-függvény megoldása a

$$-f''(x) + x^2 f(x) = \lambda f(x)$$

differenciálegyenletnek, ha $\lambda = 2n+1$. (Ez tény a harmonikus oszcillátorhoz kapcsolódik.)

Irodalomjegyzék

[1] P.R. Halmos: Mértékelmélet, Gondolat Kiadó, 1984.

[2] Járai Antal: Mérték és integrál, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.

[3] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: Analízis II, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

[4] E.H. Lieb and M. Loss: Analysis, AMS, 1996.

[5] P. Malliavin: Integration and probability, Sprimger-Verlag, 1995.

[6] Petz Dénes: Lineáris analízis, Akadémiai Kiadó, 2002.

Tárgymutató

σ-additivitás, 55
σ-algebra, 53
σ-szubadditívitás, 56
ívhossz szerinti integrál, 13

abszolút érték, 86

Banach-tér, 129
Beckner, 107
Bernstein-féle polinom, 122
Boole-algebra, 53
Borel-halmaz, 53

Cantor-halmaz, 121
Carathéodory-feltétel, 56
Cauchy-Riemann egyenlet, 22
Cauchy-sorozat, 117, 129
Csebisev-egyenlőtlenség, 60
csoportinverz, 90
csoportstruktúra, 90
csoportszorzás, 90

derivált
  iránymenti, 19
  parciális, 20

egyenlőtlenség
  Csebisev, 60
  Hölder, 70
  Hausdorff–Young, 107
  Minkowski, 70
egységelem, 90
egységosztás, 121
eloszlásfüggvény, 62

függvény
  lépcsős, 60
feltételes várható érték, 67
folytonos
  leképezés, 118, 127

görbe, 12
gamma-függvény, 62
Gauss-féle integrál, 105
gradiens vektor, 20
gyűrű, 53
gyűrű struktúra, 128

Hölder-egyenlőtlenség, 70
Haar-mérték, 91
halmaz lezárása, 116
Hausdorff–Young-egyenlőtlenség, 107
Hesse-mátrix, 27

improprius integrál, 66
izometria, 127

Jacobi-mátrix, 21
jobbról való konvergencia, 115
Jordan-féle
  felbontás, 86

kölcsönösen szinguláris mérték, 86
külső mérték, 56

kompakt
- topologikus tér, 119

konvergál, 115
konvergencia
- mértékben, 58

konvex függvény, 24

láncszabály, 22
Lagrange-féle középérték tétel, 23
Lagrange-féle multiplikátor, 30
Lebesgue
- -felbontás, 68
- -mérték, 57

lemma
- Borel-Cantelli, 59

Lieb, 107
lokálisan
- kompakt topologikus csoport, 90
- kompakt topologikus tér, 119

mérhető tér, 54
mérték, 55
- abszolút folytonos, 66
- Haar-féle, 91
- kölcsönösen szinguláris, 86
- külső, 56
- szinguláris, 66
- vektorértékű, 11

mértéktér, 55
metrika, 116
metrikus tér, 116
- teljes burka, 117
- teljessé tétele, 117

metrizálható topológia, 116
Minkowski-egyenlőtlenség, 70

norma, 127
nyílt
- halmaz, 115

operátor
- normája, 128

Riemann–Stieltjes-integrál, 11

sűrű halmaz, 116
Stone–Weierstrass approximációs tétel, 122
szorzattopológia, 120
szubmultiplikatív, 128

távolság, 116
tégla, 54
tétel
- Fatou-Beppo Levi, 63
- Fubini-Lebesgue, 69
- Jegorov, 58
- Lebesgue-féle dominált konvergencia, 64
- Radon-Nikodym, 66
- Radon-Riesz, 76
- Tietze-féle kiterjesztési, 121
- Tyihonov, 120
- Weierstrass-féle approximációs, 121

Taylor-tétel, 26
teljes
- metrikus tér, 117

Tietze-féle kiterjesztési tétel, 121
topológia, 115
topologikusan ekvivalens, 116
Tyihonov-tétel, 120

vektorértékű mérték, 11

Weierstrass approximációs tétele, 121

Young-tétel, 27

zárt
- halmaz, 116