WEKERLE SÁNDOR ÜZLETI FŐISKOLA

Gazdaságmatematika 1
Analízis

Oktatási segédanyag

Készítette: Pór Andrásné

2013

Tartalomjegyzék

HALMAZOK 3
FÜGGVÉNYEK 10
SOROZATOK 24
FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 29
Nevezetes tételek a függvény határérték meghatározásához: 31
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 33
Függvényelemzés 36
Gazdasági alkalmazások 39
INTEGRÁL (A deriválás inverze) 43
HATÁROZOTT INTEGRÁL 45
Mintazh1 47
Mintazh2: 49
Mintazh(100pont): 50
Felhasznált irodalom 52
KÉPLETTÁR 53

HALMAZOK

Halmaz: bizonyos tulajdonságú dolgok (objektumok) összessége, sokasága.

Eleme: az összességbe tartozó dolgok a halmaz elemei.

Jelölések: Halmaz→A, B, C stb. (nagybetű) pl.: A={1, 2, 3}

Eleme→a ∈ A → a kis „a” eleme a nagy „A”halmaznak

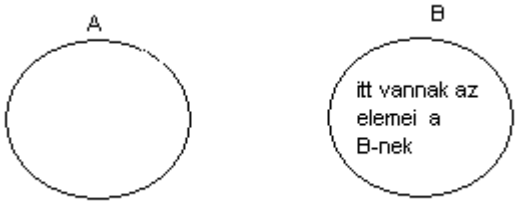
Nem eleme → a ∉A→ a kis „a” nem eleme a nagy „A” halmaznak.

Néhány számhalmaz és a jelölése:

N természetes számok halmaza 0,1,2,….
N^+ pozitív természetes számok halmaza 1,2,….
Z egész számok halmaza -1, 0, 1,….
Q racionális számok halmaza (2 egész szám hányadosaként felírható szám)
$Q=\{{}^p/_q | p, q \in Z ; Q \neq 0\}$
R valós számok halmaza (racionális és irracionális számok uniója)
C komplex számok halmaza (valós és a negatív számokból is vonjunk gyököt)

Szemléltetés: Venn-diagrammal:

A halmazt egy zárt görbe, az elemeit a zárt görbe belső pontjai szimbolizálják.
Pl.: A={} B={b_1, b_2,……}



Halmazok megadása:

Definíció: Egy halmazt adottnak tekintünk, ha bármelyik elemről, dologról, objektumról egyértelműen eldönthetjük, hogy az, benne van a halmazban vagy nem.

Megadási módok:

1. A halmaz elemeinek felsorolásával:

   A= {△, □, 1, 2, a}
   B= {2, 5, 9}

   C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
   D = {á, é, í, ó, ú, ű}

2. A halmaz elemeinek közös tulajdonságát adjuk meg (ha van ilyen)

   A = {10-nél kisebb természetes számok}
   B = {hosszú magánhangzók}

M_1={férfiak halmaza}

M_2= {x ∈N ÉS x >5}←TULAJDONSÁGOK

Kiolvasva: M_2 halmaz azon x elemek halmaza, melyekre az igaz, hogy x természetes szám és x>5.

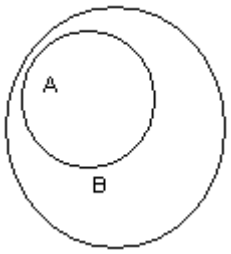
Definíció: 2 halmaz akkor **egyenlő**, ha elemeik megegyeznek.

Definíció: az olyan halmazt, melynek nincs egyetlen egy eleme sem, **üres** halmaznak nevezzük.
Jele: Ø vagy {}

Definíció: Az „A" halmaz **részhalmaza** a „B"halmaznak, ha az „A" minden eleme, eleme a „B" halmaznak is.

Vagyis: ha x∈A akkor x∈B

Szemléltetés:



jelölés: A⊆B; A⊂B

Megjegyzés: minden halmaznak van legalább két részhalmaza (önmaga és az üres halmaz).

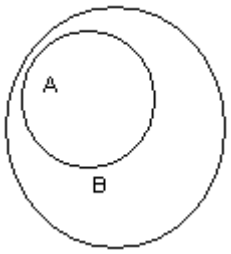
Definíció 1: legyen adott „A" és „B" 2 halmaz, „A"-ra teljesüljenek az alábbi feltételek :

i A⊂B
ii A= Ø
iii A≠B

Ekkor az"A" halmazról azt mondjuk, hogy a „B" halmaznak VALÓDI RÉSZHALMAZA.

Jelölés: A⊂B

Szemléltetés:



Definíció 2: Legyen adott „A" és „B" halmaz,
ha az „A" olyan nem üres részhalmaza a „B"-nek, hogy a „B" halmaznak van olyan eleme, mely nem eleme az „A" halmaznak, akkor az „A" halmazt a „B" halmaz valódi részhalmazának nevezzük.

Ha egy véges halmaznak n(∈N) db eleme van, akkor ennek a halmaznak 2^n db részhalmaza van.

A halmaz **véges halmaz**, ha pontosan tudjuk az elemei számát, azaz megadhatjuk egy természetes számmal. Pl.: *H = {2, 4, 6, 8} ;* *I = {az osztály tanulói}*

A halmaz **végtelen halmaz**, ha elemeinek száma nem adható meg egy természetes számmal.
Pl.: *P = {pozitív páratlan számok}*

A halmazok számossága:

Véges sok elemet tartalmazó halmaznál egyszerű a dolog: a halmaz számosságát megkapjuk, ha összeszámláljuk az elemeket.
A végtelen sok elemet tartalmazó halmazoknál definiálunk egy alapesetet: a természetes számok halmazának számosságát megszámlálhatóan végtelennek nevezzük.

Más, nem véges sok elemet tartalmazó halmaz számosságát igyekszünk viszonyítani.
Az összehasonlítást párba-állítással végezhetjük el.
A „párosítás”-nak kölcsönösen egyértelmű módon kell történnie és ha ez lehetséges, akkor a két halmazt ekvivalensnek nevezzük.

Például: A páros számok halmaza ekvivalens a természetes számok halmazával.
Lehetséges ugyanis a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés:

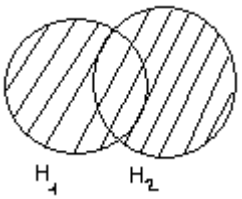
Páros számok: 0 2 4 6 8 10.....
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
Term. számok: 1 2 3 4 5 6...

Ha mindegyik természetes számhoz egyértelműen hozzá tudjuk rendelni egy másik halmaz elemeit, akkor az illető halmazt is megszámlálhatóan végtelennek, vagy röviden megszámlálhatónak mondjuk.

Műveletek halmazokkal

Definíció: A H_1 és H_2 halmazok **uniója** (vagy másképp egyesítettjén), azon elemek halmazát értjük, amelyet a H_1 illetve H_2 halmazok közül legalább az egyikben megtalálhatóak.

Szemléltetés:



jelölés: H_1 és H_2 halmaz uniója. $H_1 U H_2$

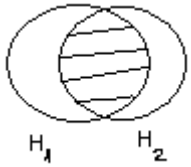
Tételek: *Az unióképzés szabályai:*

1. Az unióképzés kommutatív, azaz bármely A,B halmazokban AUB = BUA
2. Az unióképzés asszociatív, azaz bármely A, B, C halmazokban AU (BUC) = (AUB) UC
3. Ha $A \subset B$, akkor AUB = B; bizonyítás feladat
4. Bármely „A” halmazra AU Ø = A; bizonyítás triviális

Pl.: A={magyar fiúk}
B={magyar lányok}
AUB={magyar fiúk és lányok}

Definíció: A H_1 és H_2 halmazok **metszet**én (vagy másként közös részén) értjük azon elemek halmazát, melyek H_1–ben és H_2–ben is benne vannak.

Szemléltetés:



Jelölés: H_1 és H_2 halmaz metszete $H_1 \cap H_2$

Megjegyzés: $H_1 \cap H_2 = \{x | x \in H_1 \text{ és } x \in H_2\}$

Példa:

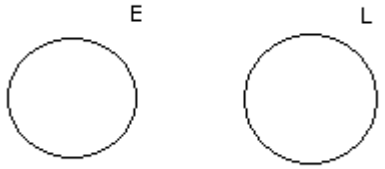
1. A= {fiúk}
B= {lányok}
$A \cap B = \emptyset$

Definíció: Ha $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy a H_1 és H_2 halmazok egymáshoz képest idegenek vagy másképp **diszjunktak.**

Pl.: E={háromszögek}
L={négyszögek}
E és L halmazok egymáshoz képest diszjunktak, mert $E \cap L = \emptyset$

Megjegyzés: 2 halmaz diszjunktsága azt jelenti, hogy nincs közös elemük.

Szemléltetve:



Tétel: *metszetképzés tulajdonsága:*

1. A metszetképzés kommutatív, azaz bármely A, B halmazokra: $A \cap B = B \cap A$
2. A metszetképzés asszociatív, azaz bármely A, B, C halmazokra:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Ha $H_1 \subset H_2$, akkor $H_1 \cap H_2 = H_1$
4. Bármely H_1 halmazra $H_1 \cap \emptyset = \emptyset$
5. A metszetképzés idempotens: Bármely H halmazra $H \cap H = H$,
ez igaz az unióképzésre is: HUH=H

Tétel: *a metszetképzés és az unióképzés kapcsolatára:* disztributív törvénnyel:

Bármely H_1, H_2 , H_3 halmazokra igaz, hogy:

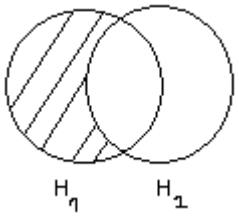
1. $H_1 \cap (H_2 U H_3) = (H_1 \cap H_2) U (H_1 \cap H_3)$
2. $H_1 U (H_2 \cap H_3) = (H_1 U H_2) \cap (H_1 U H_3)$

Különbség, komplementer

Definíció: Bármely H_1 és H_2 halmazok különbségén értjük a H_1 halmaz azon elemeinek halmazát, amelyek a H_2 halmaznak nem elemei.

Jelölés : $H_1 \setminus H_2$

Szemléltetés:



Megjegyzés: $H_1 \setminus H_2 = \{x \in H_1 \text{ és } x \notin H_2\}$

Pl..:
A= {európai fővárosok}
B= {kelet-európai országok fővárosai}

A\B = {európai, de nem kelet-európai országok fővárosai}

B\A = {olyan kelet-európai országok fővárosai, melyek nem európaiak}; Ø

Tétel: *A különbségképzés tulajdonságai*:

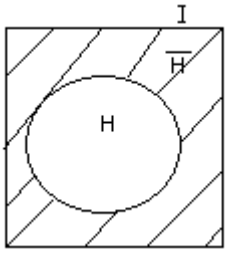
1. nem kommutatív, azaz, van olyan H_1, H_2 halmaz, hogy $H_1 \setminus H_2 \neq H_2 \setminus H_1$
2. nem asszociatív, azaz van olyan H_1, H_2 , H_3 halmaz, hogy:
   $H_1 \setminus (H_2 \setminus H_3) \neq (H_1 \setminus H_3) \setminus H_2$
3. különbségképzés sorrendje felcserélhető, azaz: bármely H_1, H_2 , H_3 halmazra:
   $(H_1 \setminus H_2) \setminus H_3 \neq (H_1 \setminus H_3) \setminus H_2$
4. Bármely H_1, H_2 halmazra:
   - Ha $H_1 = H_2$, akkor $H_1 \setminus H_2 = \emptyset$
   - Ha $H_1 = \emptyset$, akkor $H_1 \setminus H_2 = \emptyset$ és $H_2 \setminus H_1 = H_2$
   - Ha $H_1 \subset H_2$, akkor $H_1 \setminus H_2 = \emptyset$
   - Ha $H_1 \subset H_2$, akkor $H_2 \setminus H_1 = ?$, ezt nem lehet elnevezni, ez vezet a komplementer képzéshez.

Definíció: Az alaphalmaz egy olyan halmaz, ahonnan a részhalmazokat választjuk.

Definíció: legyen adott I alaphalmaz és $H \subset I$

A H halmaz I alaphalmazra vonatkoztatott **komplementerével** (másképp kisegítő halmazával) az $I \setminus H$ halmazt nevezzük.

Szemléltetve:



Jelölés: H komplementere $\overline{H}$

Megjegyzés:

1. $\overline{H}=\{x \in I \text{ és } x \notin H\}$
2. $\overline{H}$- be azok és csak azok az elemek tartoznak, melyek I-ben benne vannak, de H-ban nem.

Tétel: *A komplementer-képzés tulajdonságai*:

1. bármely halmazra, $H \cup \overline{H}=I$

$H \cap \overline{H}= \emptyset$

$\overline{(\overline{H})}=H$

$\overline{I} = \emptyset$

$\overline{\emptyset} = I$

2. De Morgan féle azonosságok:

- $(\overline{H_1 \cup H_2}) = \overline{H}_1 \cap \overline{H}_2$
- $\overline{H_1 \cap H_2} = \overline{H}_1 \cup \overline{H}_2$

Pl.: Alaphalmaz I = {wsuf hallgatók}

Ezután minden halmaz I-beli:

A = {fiúk}
B = {lányok}
C = {1. évesek}
$\overline{A}$ =B; $\overline{B}$ = A
$\overline{C}$ ={2, 3, 4 – nem 1. éves hallgatók}

Definíció: A H_1 és H_2 halmazok **szorzatának** nevezzük azt a halmazt, amelyet az összes olyan rendezett elem-párból képezünk, amelyek első elemei a H_1–ből, a második a H_2 –ből való.

Jelölés: $H_1 \times H_2$ (H_1kereszt H_2)

Megjegyzés: Direkt szorzás, Descartes-féle szorzás elnevezést is használjuk.

Pl.:
$H_1 = \{1, 2, 3\}$
$H_2= \{a, b\}$

$H_1 \times H_2 =\{(1,a); (1,b); (2,a); (2,b); (3,a); (3,b) \}$

Tétel: *A szorzás tulajdonságai:*

1. Nem kommutatív, azaz van olyan H_1, H_2 halmazok, hogy $H_1 \times H_2 \neq H_2 \times H_1$

2. Nem asszociatív, azaz van olyan H_1, H_2, H_3 halmaz, hogy $(H_1 \times H_2) \times H_3 \neq (H_1 \times (H_2 \times H_3)$

3. H_1 és H_2 legyen 2 véges halmaz:

- H_1 -nek n ($\in$N) db eleme
- H_2 –nek m ($\in$N) db eleme legyen

Ekkor a $H_1 \times H_2$ halmaznál az m x n db eleme (elem-párja) lesz.

Az alapműveletek azonosságai

Idempotens tulajdonság („önmagával azonos”):

1. $A+A=A$
2. $A \cdot A=A$

Kommutatívitás („felcserélhetőség”):

3. $A+B=B+A$
4. $A \cdot B=B \cdot A$

Asszociatívitás („átzárójelezhetőség”):

5. $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$
6. $A (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C= A \cdot B \cdot C$

Disztributívitás („szétosztás”):

7. $A \cdot (B+C) = A \cdot B+A \cdot C$
8. $A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$

Komplementerre vonatkozó azonosságok:

9. $A+\bar{A} = H$ (H az alaphalmaz) .
10 $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ (a Ø az üres halmaz).

A speciális halmazokra vonatkozó azonosságok:

11. $A+H = H$
12. $A \cdot \emptyset = \emptyset$
13. $A+\emptyset = A$
14. $A \cdot H = A$

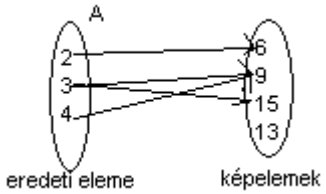
FÜGGVÉNYEK

Leképezések

Definíció: legyen adott A és B halmaz.
Ha az A halmaz minden „a” eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy „b” elemét, akkor azt mondjuk, hogy az „A”-beli „a”elemet leképeztük a „B” beli „b”hez.

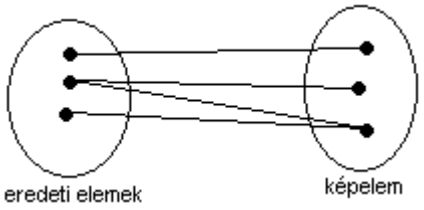
Jelölés: a→b

Pl.:

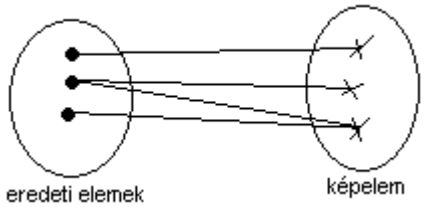


Definíció:
- A leképezés többértelmű, ha van olyan eredeti elem, melynek legalább 2 képeleme van.
- A leképezés több egyértelmű, ha minden eredeti elemnek csak 1 képe van, de van olyan képelem, amelyhez legalább 2 eredeti elem tartozik.
- A leképezés **kölcsönösen egyértelmű**, ha minden eredeti elemnek egyetlen képeleme van és minden képelemnek egyetlen eredetije.

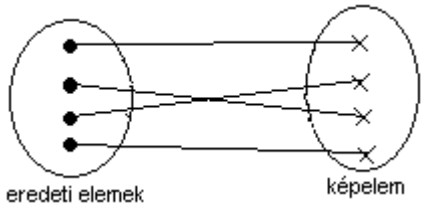
Pl.:



Ez többértelmű leképzés.

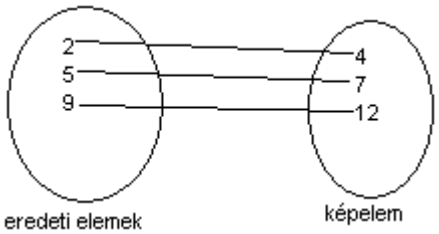


Több-egyértelmű leképezés.



Kölcsönösen-egyértelmű leképezés.

Az egyértelmű leképezéseket szokás függvényeknek nevezni.



A fenti leképezés felfogható úgy is, mint elem-párok halmaza.
Az elem-pár 1. eleme az eredeti elem, a 2. pedig az eredeti elem képeleme.
Vagyis a fenti leképezésünk a következő halmaznak felel meg.

F ={(2,4); (5,7); (9,12)}

De $A \times B$ = {(2,4); (2,7); (2,12); (5, 4); (5, 7); (5, 12); (9, 4); (9, 7); (9,12)}

A függvények:

Definíció: X és Y legyen 2 nem üres halmaz. Az X halmazon értelmezett, Y halmazbeli értékeket felvevő **f** függvényt, akkor tekintjük adottnak, ha az X halmaz minden egyes eleméhez hozzá van rendelve az Y halmaznak pontosan egy eleme.

Értelmezési tartomány: X halmaz. Jelölése: $\mathbf{D_f}$

Képhalmaz: Y halmaz

Értékkészlet: f(x) függvényértékek halmaza Jelölése: $\mathbf{R_f}$

Valós függvény: az értékkészlete valós számokból áll.

Egyváltozós valós függvény: *az értelmezési tartománya is valós számokból áll*

Természetes értelmezési tartomány: *Az f függvény értelmezési tartománya a valós számoknak az a legbővebb részhalmaza, amelynek pontjaiban a függvény hozzárendelési utasításainak értelme van*

A függvények megadása:

1. Felsoroljuk a függvényekhez tartozó elem-párokat

   Pl.: F = {(0,0); (1,2); (2,4)} ~~(1,3)~~
   Ezt táblázatos formában is megtehetjük.

2. Képzési szabályt adunk meg.

Jelölésük: f : A→B

„Az f függvény az A halmazt a B-be képezi le.”

x∈ A; f(x)∈B

x→f(x); f(x):szabály

Az A-beli x a B-beli f(x) eleme (tehát x képét f(x)-szel jelöljük.)

Pl.: A =B = R

F: R→R f(x) = 2x+5

Tehát f a valós számok halmazát képezi a valós számok halmazába úgy, hogy x képe a 2x+5 lesz.

Megengedett még az: x→2x+5 jelölés is.

Függvények jelölése:

$y = x^2 \qquad -\infty \le x \le \infty$

$f(x) = x^2 \qquad x \in R$

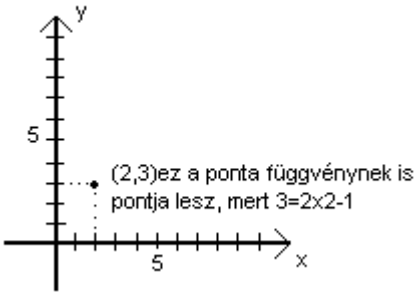
f: $x \in R \qquad x \to x^2$

f: $x \in R \qquad f(x) \to x^2$

A függvények ábrázolása:

Legyen adott f: A→B függvény (x→f(x)).
Az ábrázolása Descartes-féle koordináta rendszerben történik.
A függvény minden egyes (x, f(x)) elem-párjához hozzárendeljük a sík 1 pontját oly módon, hogy a pont 1. koordinátája x legyen, a 2. koordinátája pedig f(x).

Pl.: f: R→R f(x) =2x-1



A függvények tulajdonságai

1. ***Monotonitás*:**

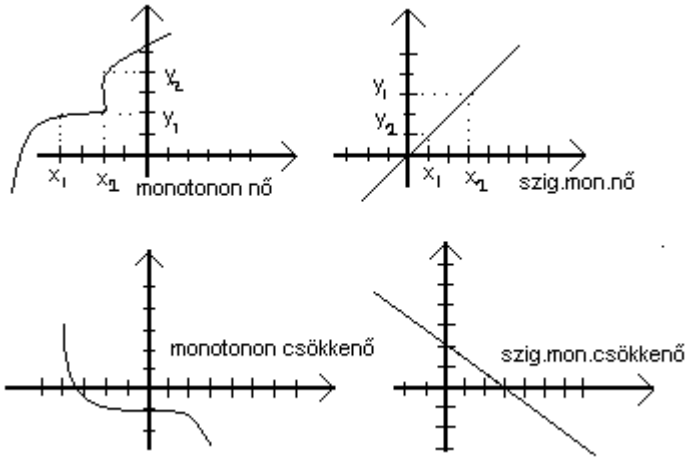
Definíció: legyen adott f: A→B (A, B≤ R)
Az f függvény

Monotonon növekvő, ha ∀ $x_2>x_1$ esetén $f(x_2) \ge f(x_1)$ (x_1, x_2∈R)

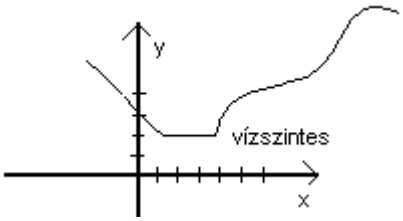
Szigorúan monotonon növekvő, ha $\forall\ x_2>x_1$ esetén $f(x_2) > f(x_1)$ $(x_1, x_2 \in R)$

Monotonon csökkenő, ha $\forall\ x_2>x_1$ esetén $f(x_2) \leq f(x_1)$ $(x_1, x_2 \in R)$

Szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall\ x_2>x_1$ esetén $f(x_2) < f(x_1)$ $(x_1, x_2 \in R$



Megjegyzés: a függvények monotonitásának vizsgálatát leszűkíthetjük az A halmaz egy-egy részhalmazára is.
Pl.:



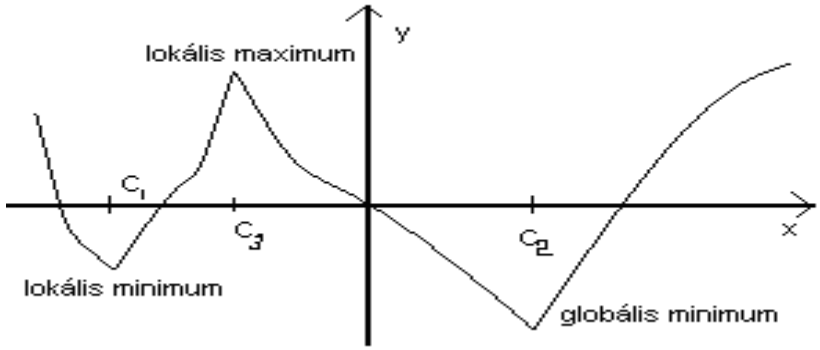
$(-\infty, 2)$-on szigorúan monotonon csökken

$(2, +\infty)$-ig monotonon nő

2. Szélsőérték:

Definíció: legyen adott f: $A \rightarrow B$ $(A, B \subset R)$. Az f függvénynek az $A_1 \subset A$ halmazon
Lokális maximuma van, ha van olyan „a” $\in A_1$-nek, hogy $\forall\ x \in A$ esetén $f(a) \geq f(x)$
Lokális minimuma van, ha van olyan „b” $\in A_1$-nek, hogy $\forall\ x \in A_1$ esetén $f(b) \leq f(x)$

A f függvénynek az A halmazon:
Globális maximuma van, ha van olyan „a” $\in A$,
hogy $\forall\ x \in A$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
Globális minimuma van, ha van olyan „b” $\in A$,
hogy $\forall\ x \in A$ esetén $f(b) \leq f(x)$

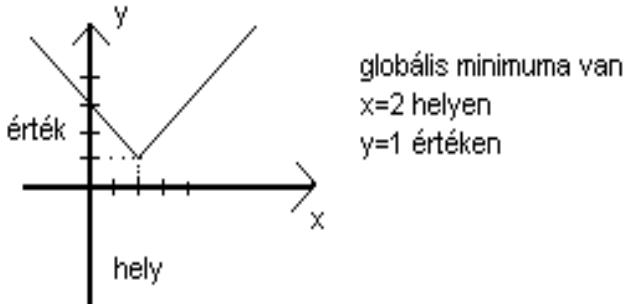


A C_1 helyen *lokális minimuma* van a függvénynek,
mert az f(x) csak 1 részhalmaz (pl. $(-\infty, 0)$-n) a legkisebb).

A C_2 helyen a függvénynek a globális minimuma van,
mert $f(c_2)$ az egész A halmazon a legkisebb.

A C_3 helyen lokális maximuma van a függvénynek, globális maximuma nincs a függvénynek.

Megjegyzés: Egy szélsőértéknek van helye és értéke.

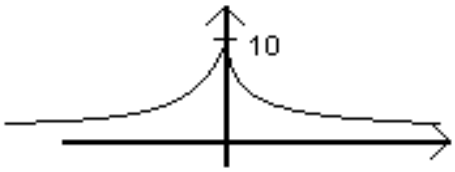


3. Korlátosság:

Definíció: legyen adott f: $A \to B$ ($A, B \in R$)

Az f függvény felülről korlátos, ha van olyan $K_1 \in R$ szám, hogy $\forall\ x \in A$-ra $K_1 \geq f(x)$

Az f függvény alulról korlátos, ha van olyan $K_2 \in R$ szám, hogy $\forall\ x \in A$-ra $K_2 \leq f(x)$
Az f függvény korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos

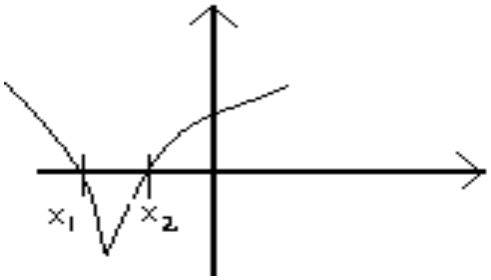


Látható, hogy ez a függvény alulról korlátos, de nincs globális minimuma

4. *Zérushely:*

Definíció: Az f: A→B (A, B∈ R) függvénynek az x∈A elem zérushelye, ha **f(x) = 0.**

Megjegyzés: a koordináta rendszerben ott van a zérushely, ahol a függvény elmetszi a vízszintes tengelyt.



5. *Párosság, páratlanság:*

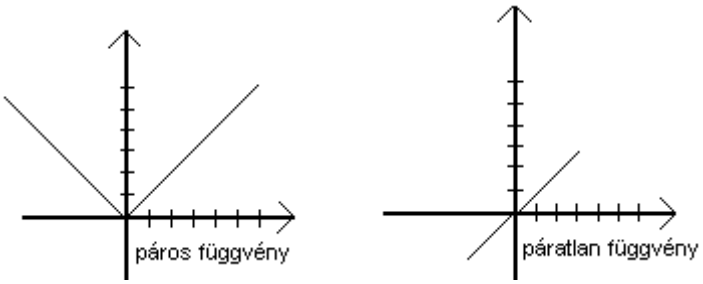
Definíció: az f A→B (A, B ⊂R).

A függvényt párosnak nevezzük, ha ∀x∈A esetén f(x) = f(-x).

A függvény páratlan, ha ∀x∈A esetén f(x) = - f(-x).

Megjegyzés: megadható olyan függvény, amely se nem páros, se nem páratlan.

A páros függvények a függőleges tengelyre szimmetrikusak,
a páratlanok pedig a koordináta rendszer középpontjára.
Pl.:

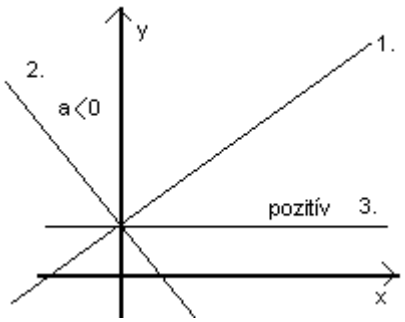


A középiskolából ismert elemi függvények

Elsőfokú függvény vagy lineáris függvény.

Jellemzése: f: R→R

f(x) = ax + b a,b∈R



D_f: R vagy x∈R vagy x∈]-∞, ∞[
R_f: ha az „a” nem egyenlő 0, akkor ÉK az R-rel lesz egyenlő.
Ha az „a” nullával egyenlő, akkor „b”-nek a halmaza.
Zérushely: olyan x, amire az f(x) 0-val egyenlő / ax+b = 0 /-b
Monotonitás:

1. szig. monoton. nő
2. szig. monoton csökkenő
3. monoton.

Szélsőérték: a=0 esetén globális maximum és minimum.
Korlátosság:

1. nem korlátos sem alulról, sem felülről a függvény
2. nem korlátos sem alulról, sem felülről a függvény – nem korlátos függvény.
3. korlátos függvény, mert alulról és felülről is korlátos.

Párosság, páratlanság: a≠0, ha b nem nulla

ha az a≠0 és b≠0, akkor páratlan függvény

ha a=0 és b≠0, akkor páros a függvény

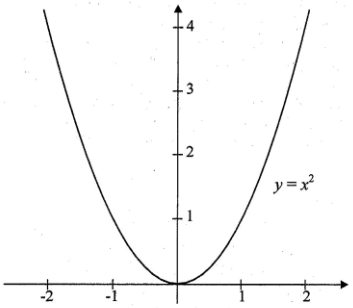
Másodfokú függvény

Jellemzése: f: R→R , f(x) = x^2
D_f:R
R_f: f(x)≥0 vagy [0,∞[
Zérushely: f(x) =0 x^2=0 x=0 →a zérus hely a 0
Monotonitás:

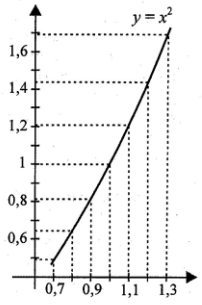
ha x∈]-∞,0] szig. monoton. csökken x≤0

ha x∈[0,∞[szig. monoton nő x≥0

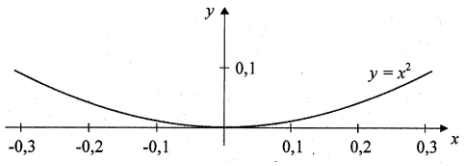
Szélsőérték: Globális minimuma helye x=0, értéke f(x) =0
Korlátosság: alulról korlátos a függvény, felülről nem korlátos, ezért összességében ez a függvény nem korlátos
Paritás: páros függvény



1.1. ábra
A parabola



1.2. ábra
A parabola egy szakasza



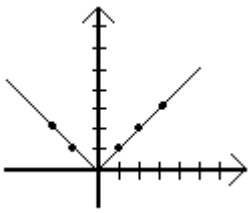
1.3. ábra
A parabola csúcsa körüli része

Abszolút érték függvény:

Jellemzése: $f(x) = |x|$

Ha $x \geq 0$, akkor x

Ha $x < 0$, akkor -x



D_f: {R}

R_f:: $f(x) \geq 0$; $]\infty, 0]$

Zérushely: x = 0

Monotonitás:

$]-\infty, 0]$ – szigorúan monoton csökkenő

$[0, +\infty[$ - szigorúan monoton növekvő

Szélsőérték: globális minimum x = 0, f(x) = 0

Paritás: páros függvény

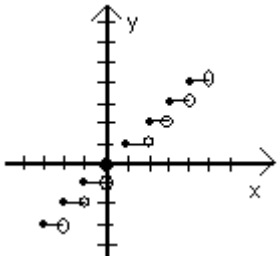
Korlátosság: csak alulról korlátos, ezért a függvény nem korlátos.

Megjegyzés:

Az abszolút érték függvény esetén az f(x) helyett $|x|$ jelölés is szokás ABS (x)

Egy szám abszolút értéke egyenlő a számnak a számegyenesen a 0-tól való távolságával (ha az 1 egységnyi távolsága volt).

Egészrész függvény:
Jellemzése:
f(x) = [x] = az egészrész egyenlő az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobbal.



D_f: {R}
R_f: {Z}
ZH: az x eleme [0, 1[
Monotonitás: monotonon növekvő függvény

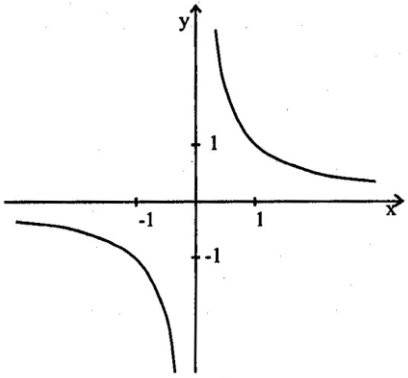
Szélsőérték: k∈Z
[k,k+1[minden pont lokális minimum és maximum
]k, k+1[lokális minimum
Paritás: nem páros és nem is páratlan
Korlátosság: nem korlátos függvény

További elemi függvények

3.1.2. RECIPROK FÜGGVÉNY

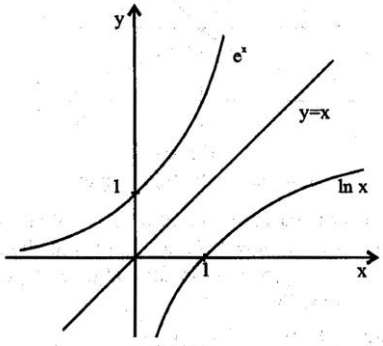
$f(x) = y = \frac{1}{x}$ $\quad x \in R - \{0\}$

$R_f = R - \{0\}$



3.2. ábra
Reciprok függvény

2



3.7. ábra
Exponenciális- és logaritmusfüggvény

Az 3.7. ábrán a későbbiek folyamán fontos szerepet játszó e alapú exponenciális és logaritmus függvény látható. Gyakori előfordulásuk miatt vezessük be a következő jelöléseket:

$$\exp_e(x) = \exp(x) = e^x, \quad \log_e(x) = \ln(x).$$

Az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak nevezzük.

7

Az alapműveletek segítségével függvényekből újabb függvényeket állíthatunk elő

DEFINÍCIÓ. Adott f és g függvények $f+g$ **összegén**, $f-g$ **különbségén**, $f \cdot g$ **szorzatán** és $\frac{f}{g}$ **hányadosán** a következő függvényeket értjük:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}.$$

Az algebrai műveleteket kombinálva a fentieknél jóval bonyolultabb szerkezetű új függvényeket is létrehozhatunk. Eközben tetszőleges számú ismert függvényt és tetszőleges számú alapműveletet felhasználhatunk.

Összetett függvény, inverz függvény

Definíció: Az f külső és g belső függvényekből összetett függvényen értjük azt a h függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes olyan $x \in D_f$ pontokból áll, melyre a $g(x) \in D_f$ teljesül és az ilyen x-re $h(x)=f(g(x))$.

Jelölése: $h = f \circ g$

Definíció: Ha f egy kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor inverz függvényének nevezzük azt az f^{-1} –gyel jelölt függvényt, amelynek értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = R_f$ és $f^{-1}(f(x))=x$, $x \in D_f$.

Megjegyzés:
Nem minden függvénynek létezik inverze, csak a kölcsönösen egyértelmű függvénynek lesz inverze.
Az inverz függvénynél az eredeti függvényhez képest az eredeti és képelemek helyet cserélnek.

Tulajdonságok:

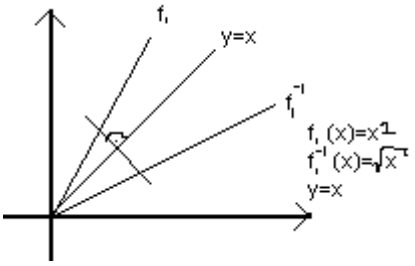
1. Ha az *f* függvény szigorúan növekvő, akkor inverze is szigorúan növekvő
2. Ha az *f* függvény szigorúan csökkenő, akkor inverze is szigorúan csökkenő
3. Az *f* függvény és f^{-1} inverz függvény tartományai felcserélődnek:

$$D(f) = H(f^{-1})$$
$$H(f) = D(f^{-1})$$

pl.: f: $y = 2x + 3$ – egy-egyértelmű;
$x = 2y+3$ – szigorúan növekvő => felcseréljük az elempárokat

$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ - kifejezzük az *y*-t

4. Az *f* függvény és inverzének grafikonja a derékszögű koordinátarendszerben egymásnak tükörképe az $y = x$ egyenlettel megadott egyenes szerint.

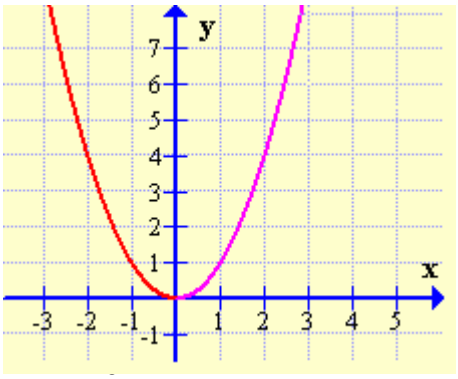


Mivel az inverz függvény képzésekor a vízszintes tengely (eredeti elemek) és a függőleges tengely (képelem) helyet cserélnek, ezért f és f^{-1} az y = x egyenesre szimmetrikusak lesznek.

Feladat. Egy négyzet területe 9 m^2. Mekkora az oldala

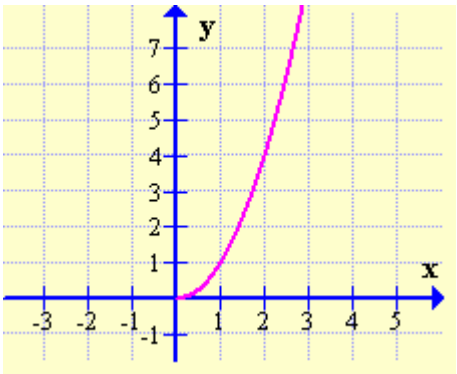
$T_{,} = a^2$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad a = 3$

Mekkora a négyzet oldala, ha a területe 10 m^2?
Meg kéne keresnünk azt a számot, aminek a négyzete 10.
Ismerjük a függvény értékét, keressük azt a helyet, ahol felveszi ezt az értéket.

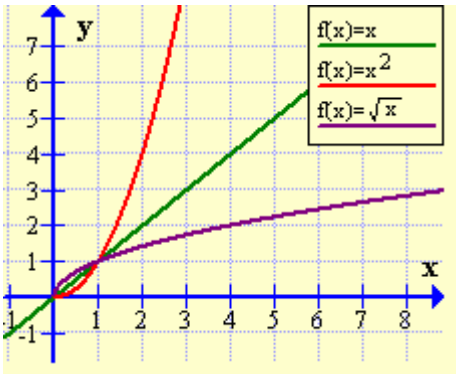


wsuf

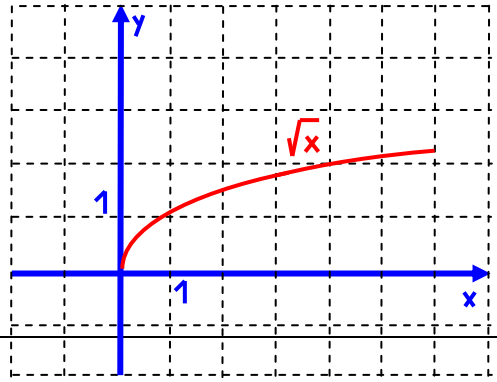
a négyzetfüggvény értelmezési tartománya a szűkítés után:



Az előző függvény grafikonját az y=x egyenesre tükrözve kapjuk meg a négyzetgyök függvényt!



Elemzés:

	$f(x) = \sqrt{x}$
	$D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ ÉT : $x \geq 0$
	$R_f = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ ÉK : $y \geq 0$
	ZH : $x = 0$ ZH : $x = 0$
	SZÉ : $\min(0;0)$ SZÉ : $\min(0;0)$
	SZMN SZMN

A függvények különböző tulajdonságai alapján az osztályozás:

- *korlátos függvények*
- *monoton függvények*
- *periodikus függvények*
- *páros és páratlan függvények*
- *folytonos és szakaszosan folytonos függvények*
- *konkáv és konvex függvények*
- *integrálható függvények*

Függvények ábrázolása transzformációval

Adott f: $R \to R$ függvény és a, b, $c \in R$ és 3 valós szám ($a \neq 0$)
$g(x) = af(x+b)+c$. Ekkor a g függvény képét az f függvény képéből úgy kapjuk, hogy elvégezzük a következő transzformációkat az f függvény képén (sorrend fontos).

1. lépés: fölvesszük az f függvény képét
2. lépés: az f függvény képét eltoljuk az x tengely mentén b-vel
3. lépés: ha az $a \geq 0$, akkor a-szorosra nyújtás a függőleges tengely mentén,
   ha az $a<0$ (negatív az a), akkor a-t abszolút értékére kell nyújtani és tükrözni a vízszintes tengelyre
4. lépés: eltolás c-vel a függőleges tengely mentén

<u>Például</u>

$g(x) = 2(x+3)^2-5$

$f(x) = x^2$ függvényből indulunk ki:

1. lépés: fölvesszük az alapfüggvényt az f függvény képét: $f(x) = x^2$
2. lépés: „b” szerinti transzformáció eltolás b-vel: 3-mal az x mentén (előjelet kell változtatni)
3. lépés: „a” szerinti transzformáció nyújtás 2-szeresére a függőleges tengely mentén
4. lépés: „c” szerinti transzformáció eltolás 5-tel a függőleges tengely mentén

Többváltozós függvények

A valóságban egy-egy gazdasági mutatót több tényező is meghatározhat, több tényezőtől is függ. Ezt matematikailag un. többváltozós függvény segítségével tudjuk leírni:
Pl. egy órabéres dolgozó havi munkabére (B) függ attól, hogy hány órát dolgozott (x) és hány Ft az órabére (y).

$B=xy$ vagy $B(x,y)=xy$ alakban írható fel

Pl. A vállalatnál az órabérek 500 és 2000 Ft között vannak; a ledolgozott órák pedig 100 és 200 között.
A kétváltozós függvény értelmezési tartománya részhalmaza azon (x,y) elempárok halmazának, melyeknél $100 \leq x \leq 200$ és $500 \leq y \leq 2000$

A rendezett (a,b) számpárok halmazát, ahol $a \in A$ és $b \in B$ AxB halmaznak (A és B halmaz Descartes féle szorzatának) nevezzük.

RxR halmaz elemei a sík pontjai. RxR halmazt jelöhetjük R^2 tel.

az RxRxR halmaz elemei rendezett számhármasok, a tér pontjai. RxRxR = R^3

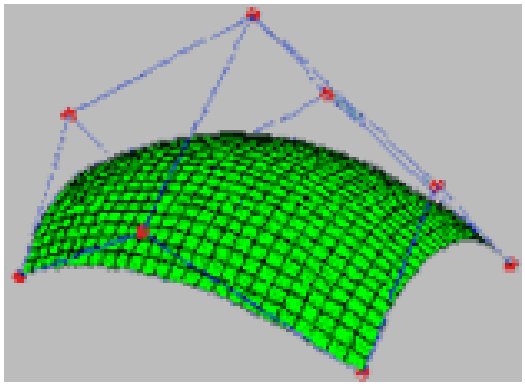
R^n halmaz elemei pedig rendezett szám n-esek. $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

Példa:

Többváltozós másodfokú függvény

Kétváltozós eset:

$Y=a+b\,X_1+c\,X_2+d\,X_1^2+e\,X_2^2+f\,X_1X_2$



SOROZATOK

Definíció: A végtelen számsorozat olyan speciális függvény,
amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, vagy annak részhalmaza, függvényértékei pedig valós számok.

Speciális jelölése: ha $n \in N$, akkor f(n) helyett az a_n jelölés is használatos

Megadási módok:

pl.: általános taggal, szöveges utasítással, stb.

Általános taggal történő megadás.
Megadjuk a szabályt, hogy az N természetes számhoz mit rendelünk hozzá.
Pl.: a_n=

Rekurzióval történő megadás.
Azt adjuk meg, hogy a sorozat valamely tagját, hogyan kell meghatározni az előző tagok ismeretében.

Elemek megadásával.
A sorozat elején megadunk néhány elemet.

Ábrázolása, szemléltetése:

síkbeli koordinátarendszerben, számegyenesen.

A sorozatok tulajdonságai

Monotonitás
- monoton növő (csökkenő) , ha an< an+1,

Korlátosság
- korlátos, alulról korlátos, felülről korlátos

Konvergencia

Határérték

Definíció Az (a_n) sorozat határértéke *A* szám, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan küszöbszám, amelynél nagyobb sorszámú tagjai a sorozatnak már mind beleesnek az *A* ε sugarú környezetébe.
(a_n-nek az A-tól vett eltérése kisebb, mint ε).

Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.

Nevezetes sorozatok:

Számtani sorozat

Definíció: az olyan sorozatot, melyben a szomszédos tagok különbsége állandó érték <u>számtani</u> <u>sorozat</u>nak nevezzük. A 2 szomszédos tag különbségét a sorozat <u>differenciájának</u> vagy <u>különbségének</u> nevezzük. <u>Jele</u>: d

legyen adott egy a_n számtani sorozat, amelyeknek különbsége d.

$a_n = a_{n-1} + d$ (ez a rekurzív megadása a sorozatnak)
$a_n = a_1 + (n-1)d$ (ez a szabállyal történő megadása a sorozatnak)
6; 10;14;18;22……(elemek megadása)

Mértani sorozat

Definíció: az olyan sorozatot, melyben a szomszédos tagok hányadosa állandó érték, <u>mértani</u> <u>sorozat</u>nak nevezzük. A 2 szomszédos tag hányadosát a sorozat hányadosának nevezzük.

Jele: q (quotiens)

legyen adott egy a_n mértani sorozat, melynek hányadosa q-val egyenlő:

$a_n = a_{n-1} \cdot q$ (ez rekurzív megadás)

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$(ez szabállyal történő megadás)

2; 4; 8;16.. (elemek megadása)

Fibonacci sorozat

Definíció: ha $a_1=1$, az 1 továbbá az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

A sorozat elemei: $a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = a_1 + a_2 = 3$
$a_4 = a_2 + a_3 = 4$
$a_5 = a_3 + a_4 = 5$ stb.

Nevezetes tételek számsorozatokra

A határérték unicitási tétele
Bármely sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.

Konvergens sorozat korlátosságára vonatkozó tétel
Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos is. (nem megfordítható.)

Monoton és korlátos sorozat konvergencia tétele
Ha egy sorozat növekvő és korlátos, akkor konvergens is, és határértéke a sorozat felső határával egyenlő.

Ha egy sorozat csökkenő és korlátos, akkor konvergens is, és határértéke a sorozat alsó határával egyenlő.

MONOTON, KORLÁTOS SOROZAT KONVERGENS. (nem megfordítható)

Műveletek konvergens sorozatokkal

Korlátos és 0-hoz tartó konvergens sorozat szorzatára vonatkozó tétel.

Konvergens sorozatok összegére, szorzatára és hányadosára vonatkozó tételek.

$\lim (a_n + b_n) = A + B$

$\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

$B \neq 0$. akkor $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

Nevezetes sorozatok és határértékeik

1. q^n típusú sorozat

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & ha \quad q > 1 \\ 1 & ha \quad q = 1 \\ 0 & ha \quad |q| < 1 \\ nincs & ha \quad q \leq -1 \end{cases}$$

2. Euler típusú sorozatok

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

3. Polinomok hányadosának határértéke

Megoldás: kiemelés, egyszerűsítés, műveleti szabályok alkalmazása

Tágabb értelemben vett határérték

Az a_n sorozat tágabb értelemben vett határértéke plusz (mínusz) végtelen, ha minden $P \in R^+$ számhoz létezik olyan $n_0 \in N^+$ küszöbszám, amelyre fennáll, hogy ha $n > n_0$, akkor $a_n > P$ $(a_n < -P)$

Az a_n sorozatot tágabb értelemben konvergens sorozatnak nevezzük.

További műveleti tételek tágabb értelemben vett határértékre

Ha $a_n \to \infty$; **és** $a_n \neq 0$, **akkor** $\frac{1}{a_n} \to 0$

Ha $b_n \to 0$ **és** $b_n > 0$, **akkor** $\frac{1}{b_n} \to \infty$

Ha $a_n \to \infty$ **és** $c_n \to c$, akkor pozitív c esetén $(a_n c_n) \to \infty$
negatív c esetén $(a_n c_n) \to -\infty$

Végtelen sor: fogalma; végtelen mértani sor.

Ha a végtelen számsorozat tagjait az összeadás jelével kapcsoljuk össze, akkor egy végtelen sort kapunk.

P*l. mértani sorozat tagjait összeadva, kapjuk a végtelen mértani sort*

A *sorok* olyan speciális sorozatok, melyek más sorozatok részletösszegeiként állnak elő.

Pl. legyen a_n sorozat; tekintsük az $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 1 sorozatot.

pl. $S_n \to b \in R$, akkor azt úgy is mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 2 *sor* konvergens, összege=b

ha az S_n sorozatnak $+\infty$ a határértéke, akkor a sorösszeg plusz végtelen azaz:

Végtelen sorozatokat összegzünk, és azt nézzük, mikor van ennek értelme,
mikor mondhatjuk hogy egy sorozatnak ez vagy az a szám az összege,
mikor mondhatjuk azt, hogy a sorozatnak plusz (vagy) mínusz) végtelen az összege, és
mikor kell azt mondanunk, hogy a sorozatnak nincs összege:

Definíció: A $\sum a_n$ végtelen sor konvergens és összege az A valós szám, ha az sn sorozat konvergens és határértéke A.

Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tétel: A végtelen mértani sor akkor és csak akkor konvergens,

ha $|q| < 1$, és ekkor $S = \frac{a_1}{1-q}$

Példa:

$$0,\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

$$a_1 = \frac{3}{10}; q = \frac{1}{10}$$

$$S = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Konvergenciakritériumok:

<u>Hiperharmonikus sor</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > 1$.

<u>Leibniz-kritérium</u>:

$\sum (-1)^k \cdot a_k$ ún. *alternáló sor* feltételesen konvergens, ha $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, és a_k monoton csökkenő.

<u>Hányadoskritérium</u>:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \sum a_k \begin{cases} konvergens, & ha \quad \lambda < 1 \\ divergens, & ha \quad \lambda > 1 \end{cases}$$

<u>I. Néhány nevezetes sor összege:</u>

1.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$ (harmonikus sor)

2.) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$

3.) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad ha \quad |q| < 1$ (mértani sor)

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

A függvénytulajdonságok csoportjai:

lokális tulajdonságok *(pl. ilyen az előjel váltása)***,**
amikor elég a függvényt egy adott pont bármilyen kicsi környezetében ismerni

globális tulajdonságok *(pl.* mononoton növekszik)
amikor a függvényt valamely intervallumban vagy nem egyelemű halmazon kell ismerni

Függvény határértéke véges helyen

Legyen az ***f*** függvény az $x_0 \in R$ valamely környezetében (esetleg x_0-t kivéve) értelmezve. Akkor mondjuk, hogy az ***f*** függvénynek az x_0 helyen a **határértéke** az $A \in R$ szám, ha minden olyan (x_n) számsorozat esetén,

amelyre $\lim x_n = x_0$; $x_n \neq x_0$ $x_n \in D_f$ igaz, hogy $\lim f(x_n) = A$

Jelölések: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x_0} f(x) = A$

Jobb- és baloldali határérték fogalma

Legyen az ***f*** függvény az $x_0 \in R$ valamely jobb oldali (bal oldali) környezetében (esetleg x_0-t kivéve) értelmezve.
Akkor mondjuk, hogy az ***f*** függvénynek az x_0 helyen a **jobb oldal**i (bal oldali) **határértéke**
az $A \in R$ szám, ha minden olyan (x_n) számsorozat esetén,

amelyre $\lim x_n = x_0$;
$x_n > x_0$ $(x_n < x_0)$; $x_n \in D_f$ igaz, hogy $\lim f(x_n) = A$

Jelölések (jobb oldali)**:** $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$

*Az **f** függvénynek **akkor és csak akkor létezik a határértéke az x_0 pontban**, ha ott létezik a bal oldali határértéke is, a jobb oldali határértéke is, és ezek egymással egyenlők.*

Függvény folytonossága

Legyen f az x_0 pontban és egy környezetében értelmezett!

Az ***f*** **függvény az x_0 pontban akkor folytonos,** ha ott létezik a határértéke, és az egyenlő az x_0-beli helyettesítési értékkel, azaz $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$. .

Értelmezhető féloldali folytonosság is!

Ha az x_0 *pontban* értelmezett *f* függvénynek a *bal oldali határértéke létezik és az egyenlő a* helyettesítési értékkel, akkor **balról folytonosnak**,

ha *jobb oldali határértéke létezik és az egyenlő a* helyettesítési értékkel, akkor **jobbról folytonosnak** nevezzük ott.

Az *f* függvényt **folytonos függvénynek nevezzük,** ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Szakadási hely fogalma:
Ha *f* függvény az x_0 pontban nem folytonos, de az x_0 -nak van olyan környezete, melynek minden más pontjában folytonos, akkor x_0 pontot, az *f* függvény **szakadási helyének** nevezzük.

Határértékre vonatkozó műveleti tételek

⇒ Legyen *f* és *g* két függvény.
Ha *f*-nek és *g*-nek is létezik a határértéke x_0 pontban, akkor a két függvény összegének, szorzatának és hányadosának is létezik határértéke x_0 pontban. (Hányadosnál a nevező nem lehet nulla feltételre is, figyelni kell!)

$$\lim_{x_0} (f(x)+ g(x))= \lim_{x_0} f(x) + \lim_{x_0} g(x)$$

$$\lim_{x_0} (f(x)g(x))= \lim_{x_0} f(x) \lim_{x_0} g(x)$$

$$\lim_{x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x_0} f(x)}{\lim_{x_0} g(x)} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x_0} g(x) \neq 0$$

⇒ Összetett függvény határértékére vonatkozó tétel.
Legyen *f* és *g* két függvény, és legyen *g*-nek határértéke x_0 helyen *B*, valamint létezzen, x_0*-nak olyan* $K \subseteq D_f$ környezete, melyben $g(x) \neq 0$, ha $x \neq x_0$.
Tegyük fel, hogy *f* –nek létezik a határértéke a B pontban.
Ebben az esetben az $f \circ g$ összetett függvénynek is van határértéke az x_0 *pontban:* $\lim_{x_0} f(g(x))= \lim_{B} f(x)$

Folytonos függvényekre vonatkozó műveleti tételek

⇒ Ha *f* és *g* is folytonos x_0 pontban, akkor a két függvény összege, szorzata és hányadosa is folytonos x_0 pontban. (Hányadosnál a nevező nem lehet nulla feltételre is, figyelni kell!)

⇒ Ha a *g* függvény folytonos x_0 pontban, és *f* függvény folytonos a $g(x_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is folytonos az x_0 pontban.

Tétel: A valós számok halmazán értelmezett, $f(x)=c$ és $f(x)=x$ függvények mindenütt folytonosak.

Tétel: A polinom függvények, a racionális törtfüggvények, az exponenciális függvények és logaritmus függvények folytonosak az értelmezési tartományuk minden pontjában.

Zárt intervallumon folytonos függvények

Definició: az *f* függvény folytonos valamely zárt intervallumon, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos, a végpontokban pedig jobbról, ill. balról folytonos.

Tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit.

Bolzano tétel: Zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a közbülső értékeket.

Függvények határértéke a végtelenben

Legyen *f* függvény valamely K $\in$ R-nél nagyobb számokra értelmezve.
Ha bármely $x_n \to \infty$ ($x_n \in D_f$) esetén $f(x_n) \to A$, akkor a függvénynek a plusz végtelenben a határértéke A szám.

Jelölése: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{\infty} f(x) = A$

Tágabb értelemben vett határérték

Legyen *f* függvény az $x_0 \in$ R valamely környezetében (esetleg x_0*-t kivéve) értelmezett. Az f* függvénynek x_0 *helyen a plusz végtelen a határértéke, ha bármely* x_n sorozat tart az x_0*-hoz* ($x_n \in D_f$ és $x_n \neq x_0$)

Jelölése: $\lim\limits_{x_0} f(x) = \infty$ vagy $\lim f(x) = \infty$

Póluspont

Az *f* függvény*nek* x_0 *a szakadási pontja és* $\lim\limits_{x_0} |f(x)| = \infty$*, akkor az* x_0 *pontban a* függvény*nek azt mondjuk, hogy póluspontja van.*

Nevezetes tételek a függvény határérték meghatározásához:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \infty$ $\lim\limits_{0} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ nem létezik határértéke

$\lim\limits_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Tágabb értelemben vett határérték:

$\lim_{a} f(x) = +\infty$	$\lim_{a} f(x) = -\infty$
$\lim_{a+0} f(x) = +\infty$	$\lim_{a+0} f(x) = -\infty$
$\lim_{a-0} f(x) = +\infty$	$\lim_{a-0} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

L'HOSPITAL-szabály:

f és g függvények differenciálhatók egy x_0 pont környezetében és a $g'(x) \neq 0$

ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ és $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ és $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$,

és $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

akkor $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{A}$

Gyakorlati tanácsok függvény határérték megállapításhoz, néhány konkrét esetben

Végtelenben : A határérték vizsgálata megegyezik a sorozatoknál tanultakkal, de az előjelre figyelni kell!

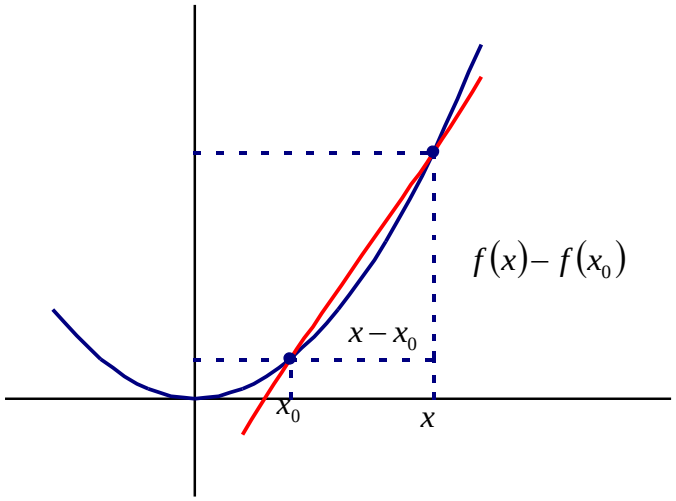
Véges helyen : Behelyettesítéssel meghatározzuk a függvény értékét az „**a**" helyen, vagyis az **f(a)**-t.

A behelyettesítéskor problémás esettel is találkozhatunk:

„$\frac{0}{0}$" vagy „$\frac{\infty}{\infty}$" alak: Ilyenkor számlálót és nevezőt is szorzattá alakítjuk, majd egyszerűsítünk, ha lehet.
Továbbá: L' Hospital szabály alkalmazása

„$\frac{c}{0}$" alak: Ebben az esetben jobbról, balról közelítéssel vizsgáljuk a függvény határértékét az adott pontban.

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS



Differenciahányados függvény

$$m_{szelő} = tg\alpha_{szelő} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Differenciahányados függvény fogalma:

Legyen az x_0 az f függvény értelmezési tartományának egy pontja, és a függvény legyen értelmezve legalább egy x_0 - tól különböző pontban.

$$m_{szelő} = tg\alpha_{szelő} = \quad d(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

A ***d(x)*** függvényt az *f* függvény x_0 ponthoz tartozó **differenciahányados** (különbségi hányados) függvényének nevezzük.

Differenciálhányados függvény

$$m_{érintő} = tg\alpha_{érintő} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Definíció: az *f* függvény **differenciálható** az értelmezési tartományának egy *„a”* belső pontjában, ha differenciahányados függvényének az *„a”* pontban van véges határértéke.

Intervallumon differenciálható függvények

Az f függvény **differenciálható** egy nyílt intervallumon, ha a nyílt intervallum minden pontjában differenciálható.

Derivált-függvény fogalma;
(differenciálhányados függvény, derivált)

Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya az f függvény értelmezési tartományának nem üres A részhalmaza, ahol az f függvény differenciálható, és az értelmezési tartomány minden pontjához az f e pontbeli differenciálhányadosát rendeljük f derivált – (differenciálhányados-) függvénynek vagy csak deriváltjának nevezzük.

Jelölése: f'

$$f'(x_0)=\lim_{x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad x_0 \in A$$

Jobb- és baloldali differenciálhányadosok;

Legyen az f függvény az x_0 pontban és annak jobb oldali (és bal oldali) környezetében értelmezve.
Ha az f függvény az x_0 ponthoz tartozó differenciálhányados függvényének az x_0 pontban létezik jobb oldali (és bal oldali) véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **jobbról (balról) differenciálható** az x_0 pontban, és a számot az f függvény x_0 ponthoz tartozó **jobb oldali (és bal oldali) differenciálhányadosának nevezzük.**

$$\lim_{x_0+0}\frac{(f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{és} \quad \lim_{x_0-0}\frac{(f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Zárt intervallumon differenciálhatónak mondjuk az f függvényt, ha a belső pontokban differenciálható és a végpontokban jobbról illetve balról differenciálható.

Legyen az f függvény az értelmezési tartományának x_0 belső pontjában differenciálható.
Az f függvény grafikonja (x_0; $f(x_0)$) pontjában húzható
érintő iránytangense egyenlő: $f'(x_0)$.

Az érintő egyenlete: $e(x)= f(x_0)+ f'(x_0)(x- x_0)$

A folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata

Ha az f függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonos is ebben a pontban.

A tétel nem megfordítható!!!

A differenciálhatóságnak a folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétele.

Elemi függvények deriváltjai

<u>konstans függvény</u>: $\boxed{(c)' = 0}$

<u>hatvány függvény</u>: $\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

Exponenciális függvény:

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x} \qquad \boxed{\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a}$$

Logaritmus függvény

$$\boxed{\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}} \qquad \boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Differenciálási szabályok
Feltétel: *f* és *g* függvények legyenek differenciálhatók valamely x_0 pontban

Függvény szám-szorosának differenciálása

$$\boxed{\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)}$$

Összeg-, különbség függvény differenciálása

$$\boxed{\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)}$$

Szorzat függvény deriváltja:

$$\boxed{\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Hányados függvény deriváltja

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Összetett függvény deriváltja

$$\boxed{\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}$$

Függvényelemzés

Függvények tulajdonságai:

Korlátosság
A függvényt **korlátos**nak nevezzük, ha értékkészlete korlátos.
Az értékkészlet legnagyobb alsó korlátja a függvény **alsó határ**a - **infimum**a, legkisebb felső korlátja a függvény **felső határ**a - **szuprémum**a.
Amennyiben az alsó. ill. felső határok maguk is függvényértékek, rendre az **abszolút minimum**, ill. **abszolút maximum** elnevezést használjuk.

Helyi szélsőértékek
Az $f(x)$ függvénynek a-ban **helyi (lokális) minimuma** van, ha van az a-nak olyan környezete, amelyben $f(a)$ a legkisebb függvényérték.
Az $f(x)$ függvénynek a-ban **helyi (lokális) maximuma** van, ha van az a-nak olyan környezete, amelyben az $f(a)$ a legnagyobb függvényérték

Függvény monotonitása
Az $f(x)$ függvényt az (a,b) intervallumon **növekvő**nek nevezzük,
ha minden $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ teljesül.
Az $f(x)$ függvényt az (a,b) intervallumon **csökkenő**nek nevezzük, ha minden $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a,b))$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$ teljesül.
Amennyiben *minden* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *esetén* $f(x1) < f(x2)$, *illetve* $f(x1) > f(x2)$; **szigorú monoton növekvő**nek, illetve **csökkenő**nek nevezzük a függvényt az (a,b) intervallumon.

Függvény konvex, konkáv tulajdonsága (geometria értelmezés)
Az $f(x)$ függvényt, az (a,b) intervallumon **konvex**nek nevezzük, ha ehhez az intervallumhoz tartozó grafikon bármely pontjához tartozó érintő a grafikon alatt halad.
A $f(x)$ függvényt, az (a,b) intervallumon **konkáv**nak nevezzük, ha ehhez az intervallumhoz tartozó grafikon bármely pontjához tartozó érintő a grafikon felett halad.

Konvex és konkáv ívek találkozási pontját **inflexiós pont**nak nevezzük

A differenciálhatóság, a derivált-függvény fogalmának megismerés után:

Monotonitás

- Az (a,b)- on differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor **növekvő** az (a,b)-on, ha minden $x \in (a,b)$- re $f'(x) \geq 0$. („Első derivált pozitív.”)
- Az (a,b)-on differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor **csökkenő** az (a,b)-on, ha minden $x \in (a,b)$- re $f'(x) \leq 0$. („Első derivált negatív.”)

Szélsőérték
Egy függvénynek egy adott, - értelmezés tartománybeli pontban - (a) csak akkor lehet szélsőértéke, ha $f'(a) = 0$.
Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére.
(a)-t stacionárius pontnak nevezzük.

Azt, hogy valóban van-e itt szélsőérték, kétféleképpen is el lehet dönteni:

1. Monotonitás alapján, az első derivált előjelváltásának vizsgálatával.

vagy

2. Második derivált előjelének vizsgálatával is következtethetünk a szélsőértékekre. (Ha $f''(a) > 0$ akkor $f(x)$-nek a-ban helyi minimuma, $f''(a) < 0$ esetén $f(x)$-nek a-ban helyi maximuma van.)

/*Megjegyzés*: Az itt megállapított szélsőértékeket, helyi szélsőértékeknek tekintjük./

Konvexitás, vizsgálat

- Egy (a,b)-on kétszer differenciálható $f(x)$ függvény az (a,b)-on akkor és csak akkor **konvex**, ha minden $x \in (a,b)$ esetén $f''(x) \geq 0$.
- Egy (a,b)-on kétszer differenciálható $f(x)$ függvény az (a,b)-on akkor és csak akkor **konkáv**, ha minden $x \in (a,b)$ esetén $f''(x) \leq 0$

Inflexiós pont

Egy függvénynek egy adott, - értelmezés tartománybeli pontban - (a) csak akkor lehet inflexiós pontja, ha $f''(a) = 0$.
Szükséges feltétel az inflexiós pont létezésére.

Azt, hogy valóban van-e itt inflexiós pont, kétféleképpen is l el lehet dönteni:

1. A konvexitás alapján, a második derivált előjelváltásának vizsgálatával.

vagy

2. A harmadik derivált előjelének vizsgálatával is következtethetünk a szélsőértékekre. (Ha $f'''(a)$ *0-tól* különbözik, akkor $f(x)$-nek a-ban inflexiós pontja van.)

Teljes függvényvizsgálat lépései:

1. Értelmezési tartomány meghatározás, (ha nem jelzik). /*Df* /

2. Zérushely meghatározás.

3. Monotonitás, helyi szélsőérték vizsgálat

4. Konvexitás, inflexiós pont vizsgálat

5. Határértékek megadása a $\pm\infty$ - ben, vagy az értelmezési tartomány végpontjaiban, valamint a szakadási helyeken.

6. Értékkészletének a meghatározása. /*Rf* /

7. Az abszolút (globális) szélsőértékek megadása

8. A grafikon felvázolása.

Függvénydiszkusszió
(teljes függvényvizsgálat)

Vizsgáljuk meg az f(x)= $\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ ***függvényt ($x \in R$) !***

1. lépés: Oldjuk meg az f(x)=0 egyenletet $\Rightarrow$ x=0

2. lépés: f első 3 deriváltfüggvényét állítsuk elő!

- f' $=x^2-6x+8$
- f'' $=2x-6$
- f'''=2

f' =0 egyenlet megoldásai: 2, 4

f''=0 egyenlet megoldása: 3

f' zérushelyei az értelmezési tartományt részintervallumokra bontják.
az f' részintervallumokban felvett értékeinek előjeléből következtetünk az f függvény monotonítására:

f'>0 ha $x \in]-\infty,2[$ és ha $x \in]4,+\infty[$ $\Rightarrow$ az f monoton nő

f'<0 ha $x \in [2,4]$ $\Rightarrow$ az f monoton fogy

f''(2)=-2<0 $\Rightarrow$ az f –nek lokális min van, f(2)=$6\frac{2}{3}$

és f''(4)=2>0 $\Rightarrow$ az f –nek lokális max van, f(4)=$5\frac{1}{3}$

3. lépés: f'' zérushelye az értelmezési tartományt két részintervallumra bontja.
az f'' részintervallumokban felvett értékeinek előjeléből következtethetünk az f függvény alakjára

f'' <0 ha $x \in]-\infty,3[$ $\Rightarrow$ az f konkáv

f''>0 ha $x \in]3,+\infty[$ $\Rightarrow$ az f konvex

f'''(3) $\neq 0$ $\Rightarrow$ az f -nek inflexiós pontja van

4. lépés: az f folytonos, D_f=R, ezért csak a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben kell vizsgálni

$\lim_{-\infty} f = -\infty$ és $\lim_{+\infty} f = +\infty$ f-nek nincs abszolút szélsőértéke

5. lépés : f(D_f)=R vagy R_f=R

x	$]-\infty,2[$	2	]2,3[	3	]3,4[	4	$]4,+\infty[$
f'	+	0	-	-	-	0	+
f	nő	Max=$6\frac{2}{3}$	fogy	fogy	fogy	Min=$5\frac{1}{3}$	nő
f	Konkáv($\cap$)			Infexiós(6)	Konvex($\cup$)		
f''	-	-	-	0	+	+	+

Gazdasági alkalmazások

A gazdasági életben sokszor kerülünk szembe a következő problémával: valamit úgy kell megterveznünk, hogy közben bizonyos mennyiség optimális (minimális vagy maximális) legyen. Gyakoriak az olyan követelmények, hogy valamely munkafolyamat a lehető legkevesebb időt vegye igénybe, hogy adott mennyiségű termelés mellett a termékegységre jutó összköltség minimális legyen, hogy adott mennyiségű anyagból a lehető legtöbb, bizonyos feltételeknek eleget tevő termék készüljön stb.

Az ilyen feladatokat szélsőérték-(extrémum, optimum) feladatoknak nevezzük.

A gyakorlati problémából kiindulva keressük az f függvény szélsőértékét az $a \leq x \leq b$ feltétel mellett.

Ez azt jelenti, hogy az adott probléma szempontjából csak az [a, b] intervallum jöhet szóba, és itt érdekel bennünket az f függvény maximuma vagy minimuma.

A közgazdaságtudomány a derivált függvény elnevezés helyett az egyes függvények változásainak leírására a határ terminológiát használja.

Például:

határköltség (x mennyiségű árú előállításának költségét meghatározó költségfüggvény deriváltja

határbevétel(x mennyiségű árú eladási értékét meghatározó árbevétel függvény deriváltja)

határhaszon (az x terméknek a fogyasztó által megállapított értékét meghatározó hasznossági függvény deriváltja)

határprofit (az árbevétel és a költségfüggvények különbségeként adódó profit függvény deriváltja)

Más típusú feladat:

Az ***f*** függvény azt mutatja meg, hogy mekkora lesz a kereslet bizonyos cikkből az egységártól függően.
Az egységár I intervallumban változhat
Az ***a*** egységárhoz tartozó különbséghányados-függvény $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
az (x - a) árváltozáshoz tartozó relatív kereslet-változást mutatja meg .
(Egységnyi árváltozás mekkora keresleti változást von maga után)

A kereslet jellemzésére igen alkalmas mutató a
különbséghányados-függvény ***a*** pontbeli határértéke
(keresleti függvény differenciálhányadosa, a egységár mellett) : $\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Ezt a differenciálhányadost az ***a*** egységárhoz tartozó határkeresletnek nevezzük.

Hasonlóan beszélhetünk határbevételről, határköltségről, határhatékonyságról.

A kereslet alakulásának jellemzésére más mérőszám is van, például az elaszticitás.

Az elaszticitás megmutatja, hogy 1 %-os árváltozás (vagy jövedelemváltozás) hány százalékos keresletváltozást okoz.

Az f függvény valamely árucikk keresletét mutatja az egységártól függően,
$D_f=I$,
$a, x \in I$.

A d(x)= $\frac{f(x)-f(a)}{f(a)}$ függvény az f(a)-hoz tartozó relatív keresletváltozást mutatja.

Az $\frac{x-a}{a}$ hányados az egységárhoz tartozó relatív árváltozást jelzi.

A relatív változások összehasonlítására képezzük az $\boldsymbol{a} \in I$ egységárhoz tartozó függvényt:

$$h(x) = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{f(a)}}{\frac{x-a}{a}} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{a}{f(a)}$$

Az f függvény $\boldsymbol{a} \in I$ egységárhoz tartozó elaszticitásán a h függvény a-hoz tartozó határértékét értjük: $\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{a}{f(a)} = f'(a)\frac{a}{f(a)}$

Gazdasági függvények elemzése

A gazdasági függvények képletét általában tapasztalati úton állítjuk elő, vagyis elemezve a statisztikai adatokat képet kapunk arról, hogy a különböző gazdasági mutatók között milyen jellegű összefüggés áll fenn. Közismert például, hogy a ráfordítás növelésével eleinte lassabban, majd kissé gyorsabban növekszik a hozam, ami elér egy maximális értéket és további ráfordítás esetén már inkább csökkenni fog a hozam. Az ilyen típusú összefüggés matematikai leírására gyakran harmadfokú függvényt alkalmazunk, melynek értelmezési tartománya értelemszerűen a feladatból következik (x>0).

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$D_f = R^+$

Kérdés: Hol lesz maximális a hozam?

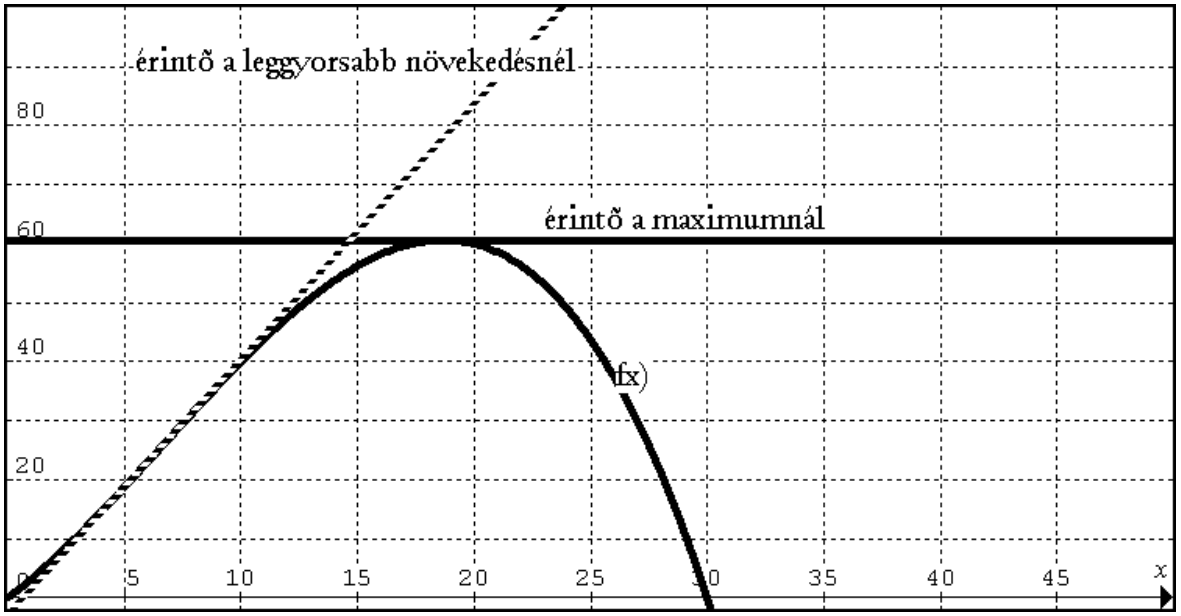
Válasz: ott, ahol a függvénynek maximuma van: f'(x) =0; f''(x)<0

Kérdés: Mekkora ráfordításnál növekszik leggyorsabban a hozam?

Válasz: Ott, ahol a függvény a legmeredekebb: f'(x) függvénynek maximuma van, itt f''(x)=0 és előjelet vált pozitívból negatívba.

Legyen például egy ráfordítás-hozam függvény az alábbi formulával megadva:

$f(x)=-0{,}01x^3+0{,}2x^2+3x$



$f'(x)= -0{,}03x^2+0{,}4x+3$ $\qquad$ $f''(x)=-0{,}06x+0{,}4$

$f'(x)=0$ $\quad$ $x=18{,}685$ $\qquad$ $f''(x)=0$ $\quad$ $x=6{,}66$

Példa 1

x mennyiségű termelt alma esetén az alma egységára:

P(x)=100-0,01x keresleti függvény adja meg

x mennyiségű alma előállításának költségfüggvénye:

C(x)=50x+30000

Mekkora a maximális profit?

***Megoldás*:**

Árbevétel(áru mennyiség*egységár): **R(x)**=xP(x)=**100x-0,01x**^{2}

Profit((árbevétel- költség): **Q(x)**=R(x) - C(x)= **-0,01x**^{2}**+50x-30000**

Határprofit: Q'(x)= -0,02x+50

Szélsőérték Q'=0 $\qquad$ **x=2500**

Q''(x)= - 0,02 a második derivált negatív, ezért maximum van

Q(2500)=32500

Azaz az optimális termelés 2500 egység, és a profit 32500 egység

Példa 2

Egy termék raktározási költsége két részből áll:
Minden termék 20 egységnyi pénzbe kerül és az állandó fenntartási költség 30000 egységnyi pénz. Átlagosan 1000 terméket tárolnak.
Számítsuk ki a költség elaszticitását!

***Megoldás*:**

raktározási költség : C(x)=20x+30000

A függvény elaszticitása : $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{C(x)}} C'(x) = \frac{x}{20x + 30000} 20$

Ha x=1000, akkor az elaszticitás értéke 20/23=0,87

Jelentése: amennyiben a raktározott mennyiségtől kis mértékben eltérünk, akkor 0,87-szeres arányban változik a költség (pl. 1%-kal változik a raktározott mennyiség, akkor kb. 0,87%-kal módosul a költség)-

Példa 3

Egy termék keresletét az egységár függvényében a következő összefüggés adja meg:

$f(p) = \frac{5}{p}$.

Hogyan változik a kereslet, ha az egységárat a=3-ról 1%-kal megnöveljük?

***Megoldás*:**

$a = 3 \quad f(3) = \frac{5}{3} \quad f'(p) = \frac{-5}{p^2} \quad f'(3) = \frac{-5}{3^2}$

Az elaszticitás képletébe helyettesítve:

$E = \frac{3}{\frac{5}{3}} \cdot \frac{-5}{3^2} = -1$

1%-kal csökken a kereslet, ha a termék árát 3-ról 1%-kal megnöveljük.

INTEGRÁL
(A deriválás inverze)

Legyen f(x)= x^2

Kérdés: Melyik az a függvény, amelyiknek a deriváltja: x^2

$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

F'(x)=f(x)

Primitív függvény fogalma, jellemző tulajdonsága

DEFINÍCIÓ:

Ha az F függvény folytonos az I intervallumon és I minden belső pontjában, akkor azt mondjuk, hogy F ***primitív függvénye*** *f-nek az I intervallumban.*

Tétel: *A primitív függvények csak konstansban térnek el egymástól. (F+C alakúak)*

Írjuk fel néhány függvény legalább egy primitív függvényét!

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Általában, ha egy függvény értelmezési tartománya több közös pont nélküli részintervallum egyesítése, akkor a primitív függvényeket ezekben, a részintervallumokban csak külön-külön lehet értelmezni

Alapintegrálok

$$\int k\,dx = kx + C, \qquad k \in \mathbf{R}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad 0 < a \neq 1$$

Alapműveletek integrálokkal

Tétel: *Ha f-nek és g-nek az I intervallumban léteznek primitív függvényei, akkor* $k \cdot f$ *-nek,* $(k \in \mathbf{R} - \{0\})$ *valamint* $(f+g)$ *- nek is van primitív függvénye, és*

a) $\int k \cdot f = k \cdot \int f$; b) $\int (f+g) = \int f + \int g$

Szavakkal:
a) a konstans tényező kiemelhető az integráljel elé;
b) összegfüggvény határozatlan integrálja a tagok határozatlan integráljainak összegével egyenlő. (összeget tagonként integrálhatunk).

Az integrálás egyszerű módszerei
I. szabály

Ha F primitív függvénye f-nek az I intervallumban, akkor

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

ahol a és b állandó $a \neq 0$ *és* $ax+b \in I$

II. szabály: Speciális szorzat integrálja
1. típus:

$$\boxed{\int f'(x) \cdot f^{c}(x)dx = \frac{f^{c+1}(x)}{c+1} + C}$$

2. típus:

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C}$$

III. szabály: Speciális hányados integrálja

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C}$$

HATÁROZOTT INTEGRÁL

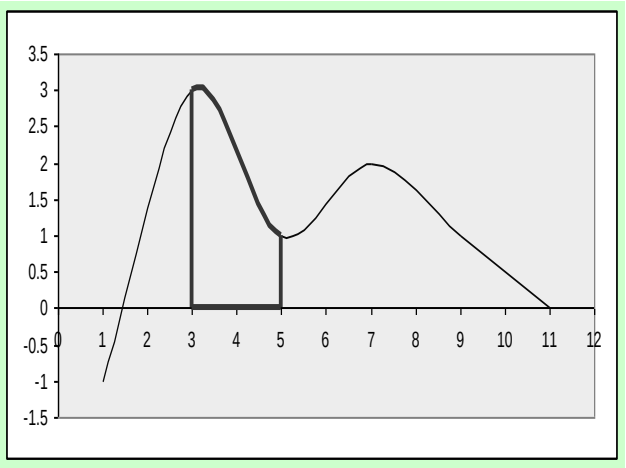
DEFINÍCIÓ:
Legyen *f* függvény [a,b] intervallumon korlátos.
Az *f* függvényt az [a,b] intervallumon integrálhatónak mondjuk, ha a felosztás minden határon túli finomításával keletkező alsó- és felső összegek sorozata közös határértékhez konvergál.
Ezt a határértéket nevezzük az *f* függvény [a,b] intervallumon vett határozott integráljának.
(Riemann integrál)

A határozott integrál tulajdonságai

$$\int_a^a f(x)dx := 0 \qquad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$



TÉTEL: Zárt intervallumon folytonos függvény integrálható.

A határozott integrál kiszámítási módja (Newton-Leibniz formula) :

TÉTEL: Ha *f* függvény integrálható az [a,b] intervallumon és *F* függvény primitív függvénye itt *f*-nek, akkor:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

A határozott integrál alkalmazása

- **Területszámítás**
  - függvénygrafikon és x tengely által közbezárt terület kiszámítása adott határok között
  - két függvény grafikonja által közrefogott terület kiszámítása

- **Improprius integrál meghatározása**
  - az integrációs intervallum végtelen
  - az [a,b] véges intervallumon az *f* függvény nem korlátos

Improprius integrál

A határozott integrált véges intervallumra és az ezen intervallumon korlátos függvényekre értelmeztük.
Az integrál fogalmát most kiterjesztjük végtelen intervallumra illetve az [a, b] intervallumban nem korlátos függvényre is.

Az integrálási határ végtelen

Ha f függvény integrálható az [a, +∞) intervallum minden [a,b] részintervallumán, akkor az $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integrált az f függvény [a, +∞) intervallumon vett *improprius* integráljának nevezzük.
Ha létezik az alábbi határérték, és *az véges*, akkor az improprius integrált konvergensnek mondjuk, különben divergens.

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Hasonlóan definiálható a $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ improprius integrál is.

Nem korlátos függvény integrálása

Ha az *f* függvény az [a, b] intervallumban nem korlátos, akkor nem integrálható. Legyen azonban integrálható bármely [a, b-ε] részintervallumban (ahol b-ε>a). (Vagy [a+ε, b] részintervallumban (ahol a+ε<b))

Ha létezik a

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx} \qquad \text{illetve} \qquad \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$$

határérték, és az egy véges szám, akkor ezt az *f* függvény [a, b] intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

például: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2-0=2$;

Mintazh1

1. **10 pont**

a) Hogyan helyezkedik el egymáshoz képest f és f^{-1} grafikonja?

b) Adottak az A= {1; 2}, B={a; b;c},C={α;β;γ;δ} halmazok.

Döntse el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás!
a1, AxB halmaznak 5 eleme van,
a3, AxC halmaznak 7 eleme van,
a6, AxC halmaznak 8 eleme van

c) Adjon meg olyan f és g függvényt, amelyek esetén az $f \circ g$ függvény nem értelmezhető!

d) Mi a szükséges feltétele, hogy az f(x) függvénynek az x_0 pontban szélsőértéke legyen?

e)Igaz –e: Ha egy függvény folytonos az x_0 pontban, akkor ott létezik a határértéke is.

2. Egy zeneiskolában 30-an tanulnak. Zongoráznak 15-en, hegedülnek 6-an, ketten pedig zongoráznak és hegedülnek. Hányan választottak más hangszert? **3 pont**

3. Határozza meg a következő halmaz elemeit, , ha A={2;3} és B={1;3;5}! **3 pont**

$B \times A =$
$A \cup B =$
$A \cap B =$

4. Számítsa ki az $a_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}$ sorozat határértékét,
majd állapítsa meg, hogy a sorozat tagjai milyen értéktől kezdve esnek a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetébe !? **4 pont**

5. Vizsgáljuk meg, hogy monotonok és korlátosak e a következő sorozatok és melyiknek van határértéke! **8 pont**

$a_n = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)$ és a $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

6. **Határozzuk meg a következő függvények határértékét!** **6 pont**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 - 5x^3 + x - 8}{8x^3 - x^2 + 12} = ?$

b) $\lim\limits_{-2} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 24}{x^2 - 4} = ?$

7. **Legyen az f függvény** **6 pont**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 7x} & \text{ha } x \in \mathrm{R}\{-7;0\} \\ 2 & \text{ha } x = -7 \\ 5 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Az a=-7 abszcisszájú pontban folytonos az f(x)?

Az a=0 abszcisszájú pontban folytonos az f(x)?

Mintazh2:

1. a) Mikor nevezzük az *F* függvényt, az *f* primitívfüggvényének az *I* intervallumon?6 **pont**

b) Milyen kapcsolat van egy függvény szélsőérték helye és első deriváltja között?

c) Milyen kapcsolat van a költség és a határköltség függvény között?

2. Integrálja a következő függvényeket:! **7 pont**

$$\int 2xe^{2x}dx =$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

3. Határozzuk meg a *g(x)* és az *f(x)* görbék által bezárt terület nagyságát! **9 pont**

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^2$$

4. Egy vállalat termelése a $C(x) = -x^2 + 2000x + 11000$ költségfüggvénnyel és az $R(x) = -0{,}006x^2 + 7{,}2x - 146$ bevételfüggvénnyel jellemezhető.
Határozza meg, hogy milyen x mennyiségű árucikk termelésével lesz a profit maximális!

9 pont

5. Végezzen teljes függvényvizsgálatot a következő függvényre! **14 pont**

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

Mintazh(100pont):

1. a) Adja meg az $f(x)$ függvény rugalmasságát, és értelmezze azt! **18 pont**

   b) Soroljon fel néhány elemi függvényt és tulajdonságait, amelyeknek értelmezési tartománya a $[0,\infty[$ intervallum!

   c) Egy függvénynek hány primitív függvénye lehet?

   d) Adjon meg egy sorozatot, mely monoton csökkenő!

   e) Ismertesse a függvény tulajdonságait!

f) Soroljon fel 3 halmazműveletet és ábrázolja Venn-diagramm segítségével!

2. Határozza meg az $a_n = \left(\frac{3n+6}{3n+8}\right)^{n+1}$ sorozat határértékét! **8 pont**

3. Adott az $a_n = \frac{n-1}{3n-2}$ sorozat.
   Állapítsa meg, hogy a sorozat tagjai n milyen értékétől kezdve esnek a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetébe! 6 **pont**

4. **Legyen az f függvény** **12 pont**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+8x+15}{x+5} & \text{ha } x \in \mathrm{R}\{-5\} \\ -2 & \text{ha } x = -5 \end{cases}$$

Az x=-5 abszcisszájú pontban folytonos az f(x)?

Az x=3 abszcisszájú pontban folytonos az f(x)?

5. Integrálja a következő függvényeket! **12 pont**

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx =$$

$$\int (3x-2)4^{x}\,dx =$$

6. Határozza meg az $y=x^2-x+1$ parabola, az y tengely és a parabola (2;3) pontjához húzott érintő által határolt terület nagyságát! **16 pont**

7. Adott egy termék keresleti függvénye: $D(p) = 200p^{-1,5}$, $p > 0$, ahol p a termék egységárát, $D(p)$ pedig a p árhoz tartozó keresletet jelenti megfelelő mennyiségi egységben. Határozzuk meg a kereslet ár-elaszticitását (árrugalmasságát) p=9 pontban. Értelmezze a kapott eredményt! **12 pont**

8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot a következő függvényre! **16 pont**

$$f(x) = 4x^3 - x^4$$

Felhasznált irodalom

ANALÍZIS - MATEMATIKA A KÖZGAZDASÁGI ALAPKÉPZÉS SZÁMÁRA
CSERNYÁK LÁSZLÓ

GAZDASÁGMATEMATIKAI FELADATGYŰJTEMÉNY - ANALÍZIS
BÁNHALMI ÁRPÁD - FEJES FERENC - FENYVES FERENC - PERGE GÁBOR

ANALÍZIS FELADATGYŰJTEMÉNY
SZENTELEKINÉ PÁLES ILONA
FELADATGYŰJTEMÉNY a gazdasági matematikához, BGF-VIFK, Bp. 2001. (SZ.: F-402).
Czétényi-Felber-Rejtő-Zimányi

Analízis Gyakorlatok Nemzeti Tankönyvkiadó Bp. 2003.
Denkinger-Gyurkó

Differenciálszámítás: Példatár, Bolyai-könyvek, Műszaki Kvk., Bp. 2002.
Bárczy Barnabás

Integrálszámítás: Példatár, Bolyai-könyvek, Műszaki Kvk., Bp. 2003
Bárczy Barnabás

KÉPLETTÁR

Gazdasági matematika I. (Analízis)

1. Sorozatok, sorok

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718 \quad , \quad \lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad , \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} \quad \text{, ha } q \in \left]-1;1\right[\quad , \quad a \in \mathbf{R}$$

2. Differenciálszámítás, integrálszámítás

Deriválási szabályok:

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\left(f(x)^{\alpha}\right)' = \alpha(f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x), \alpha \in \mathbf{R}$$

Elemi függvények deriváltja:

$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbf{R}$	0
$x^{\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$a^x, a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$, x>0	$\frac{1}{x}$
$\log_a x, a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

Elemi függvények határozatlan integrálja:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$c, c \in \mathbf{R}$	$c \cdot x + C, C \in \mathbf{R}$
$x^{\alpha}, \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbf{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, C \in \mathbf{R}$
e^x	$e^x + C, C \in \mathbf{R}$
$a^x, a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C, C \in \mathbf{R}$
$\ln x, x > 0$	$x \cdot \ln x - x + C, C \in \mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert + C, C \in \mathbf{R}$

Az érintőfüggvény egyenlete: $e(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

Az elaszticitás-függvény: $E(f(x)) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$

Integrálási szabályok:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int f^{\alpha}(x) \cdot f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

A parciális integrálási szabály: $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$

A kétváltozós függvény lokális szélsőértékének meghatározása:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P(a,b) \text{ stacionárius pont esetén}$$

a) ha $D(a,b) = f''_{xx}(a,b) \cdot f''_{yy}(a,b) - \left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 > 0$,
akkor f -nek az (a,b) pontban lokális szélsőértéke van:
$f''_{xx}(a,b) < 0$ esetén maximuma,
$f''_{xx}(a,b) > 0$ esetén minimuma;
b) ha $D(a,b) < 0$,
akkor f -nek az (a,b) pontban nincs szélsőértéke;
c) ha $D(a,b) = 0$,
akkor annak eldöntésére, hogy van-e lokális szélsőérték P (a,b)-ben, további vizsgálat szükséges.

Pénzügyi számítások

Kamatos kamatszámítás**:**

$$k_n = k_0 \cdot r^n, \qquad r = 1 + i = 1 + \frac{I}{100}, \text{ ahol } I \text{ a kamatláb.}$$

Diszkontálás:

$$k_0 = k_n \cdot \frac{1}{r^n} = k_n \cdot v^n,\ v = \frac{1}{r},\ k_n = k_0 \cdot (1-d)^n,\ d = \frac{D}{100}, \text{ ahol } D \text{ a diszkontláb.}$$

Járadékszámítás (gyűjtő-, illetve törlesztő-járadék):

$$S_n^{(1)} = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ ahol } a \text{ az annuitás,} \qquad V_n^{(1)} = a \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}, \text{ vagy } V_n^{(1)} \cdot r^n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Nevezetes azonosságok:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

A hatványozás azonosságai:

Azonos kitevő és azonos alap esetén:

$$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b \qquad a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$$

$$a^{b \cdot c} = \left(a^b\right)^c = (a^c)^b$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

A gyökvonás azonosságai:

Azonos kitevő és azonos alap esetén:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{n-k}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\left(\sqrt[k]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{k}}$$

Megoldó-képlet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (ax^2+bx+c=0)$$