Matematika III. 2.

Eseményalgebra

Prof. Dr. Závoti , József

Matematika III. 2. : Eseményalgebra

Prof. Dr. Závoti , József
Lektor : Bischof , Annamária

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010

Kivonat

Ez a modul az Eseményalgebra alapismereteit foglalja össze. A hallgatók elsajátítják az eseménytér fogalmait, megismerik az eseményekkel végezhető műveleteket, és jártasságot szereznek a Boole-algebra témakörében.

Tartalom

2. fejezet - Eseményalgebra

1. 2.1 Bevezetés

Jelen modul a Matematika III. tárgy második fejezete, modulja. Az itt következő ismeretek megértéséhez javasoljuk, hogy olvassa el a Tárgy korábbi moduljánál írottakat. Amennyiben ez még nem lenne elég a megértéshez, akkor forduljon a szerzőhöz segítségért.

Jelen modul célja, hogy az Olvasó megismerkedjen az Eseményalgebra alapvető kérdésköreivel, és képessé váljon azok valószínűségszámítási feladatok megoldásában való felhasználására.

A természetben, a gazdaságban és a társadalomban milyen jellegű szabályok, törvények léteznek?

A természeti törvények (szabadesés, Ohm törvény, bolygók mozgása, stb) általában meghatározottak. Emellett léteznek véletlen jelenségek (pénzfeldobás, lottó, stb.), amelyeknél a figyelembe vehető körülmények nem határozzák meg egyértelműen a jelenség kimenetelét. Azonos körülmények között a jelenség kimenetele lehet különböző, véletlenszerű. A jelenség feltételrendszere lehet olyan bonyolult, hogy minden feltételt nem tudunk figyelembe venni. Tehát léteznek determinisztikus (a körülmények ismeretében a jelenség kimenete meghatározható) és sztochasztikus (a körülmények nem határozzák meg az események végeredményét) jelenségek.

Véletlen tömegjelenség: az események nagy számban fordulnak elő, azonos körülmények között tetszőleges sokszor megismételhetők.

Kísérlet: véletlen tömegjelenség megfigyelése.

Minden kísérletnek több, akár végtelen sok kimenetele lehet. Azt nem tudjuk, hogy a kísérlet melyik kimenete következik be, de azt tudhatjuk, milyen lehetséges kimenetek vannak. (Kockadobás, hőmérsékletmérés, lottóhúzás, stb.)

2. 2.2 Alapfogalmak

Definíció:

Egy kísérlet összes lehetséges kimeneteinek halmaza az **eseménytér**.

Jele: Ω

Példa:

1. kockadobás Ω = lehetséges kimenetek $= \{1,2,3,4,5,6\}$
2. pénzérme feldobása $\Omega = \{f,i\}$
3. 2 kocka feldobása $\Omega = \{(i,j) \mid i = 1,2,\ldots,6; j = 1,2,\ldots,6\}$

A kísérlettel kapcsolatba megfogalmazhatunk különböző állításokat:

- 4-nél nagyobb számot dobunk $\{5,6\}$
- írást dobunk $\{i\}$
- egyforma számot dobunk $\{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$

Definíció:

Az Ω eseménytér részhalmazait **eseményeknek** $(\text{Jele}: A, B, \ldots)$ nevezzük.

Az Ω eseménytér egyelemű részhalmazait **elemi eseményeknek** $(\text{Jele}: \omega_1, \omega_2, \ldots)$ nevezzük.

Az elemi események alkotják az **eseményeket** : $\omega \in A$

Megjegyzés:

Tehát egy elemi esemény a kísérlet egy lehetséges kimenetele. Egy elemi esemény csak egyféleképp, egy esemény többféleképp is bekövetkezhet.

Példa 1:

Kockadobás esetén

elemi esemény: 4-est dobunk

esemény: páros számot dobunk A= 2,4,6

eseménytér: = 1,2,3,4,5,6

Példa 2:

Legyen az A esemény az, hogy páratlan számot dobunk.

Ekkor A = $\{1, 3, 5\}$. Például $1 \in A$.

Definíció:

Ω , mint esemény a **biztos esemény**,

$\varnothing$ (üres halmaz), mint esemény a **lehetetlen esemény**.

Példa:

Három papírcetlire felírjuk az a, b és c betűket, majd elhelyezzük a papírdarabkákat egy urnában. Ha kihúzunk az urnából cetliket, milyen események fordulhatnak elő?

Megoldás:

Eseménytér: $\Omega = \{a, b, c\}$

Összes esemény: $\begin{matrix} & \{a\} & \{a, b\} & \\ \varnothing, & \{b\} & \{a, c\} & \{a, b, c\} \\ & \{c\} & \{b, c\} & \end{matrix}$

Tehát az összes esemény száma: $2^3 = 8$.

Következmény:

Általánosan is mondhatjuk, hogy *n* elemi eseményből összesen 2^n esemény származtatható, amelyekből $2^n - n - 1$ darab esemény összetett esemény.

3. 2.3 Műveletek eseményekkel

Definíció:

Az A esemény maga után vonja B eseményt $(A \subseteq B)$: Ha az A esemény bekövetkezése, maga után vonja a B esemény bekövetkezését is.

Példa 1:

Mit jelent A = B ? (Válasz: $(A \subseteq B)$ és $(B \subseteq A)$)

Példa 2:

$A = \{\text{két kockával 2 hatost dobunk}\}$

$A \subseteq B$

$B = \{\text{a dobott számok összege páros}\}$

Azonosságok:

Mindig fennállnak az alábbi azonosságok:

1. $\varnothing \subseteq A$
2. $A \subseteq A$
3. $A \subseteq \Omega$
4. Az is igaz, hogy ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.
5. $A = B$, akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$ is.

Definíció:

Az $A \subset \Omega$ esemény **komplementer eseménye** $\bar{A}$ esemény, amely akkor következik be, ha A nem következik be és $\bar{A} \subset \Omega$.

Példa 3:

Kockadobásnál legyen $A = \{\text{3-nál kisebbet dobunk}\} = \{1, 2\}$

Ekkor $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Azonosságok:

Nagyon fontos, triviális azonosságok:

1. $\bar{\Omega} = \varnothing$
2. $\bar{\varnothing} = \Omega$
3. $\bar{\bar{A}} = A$

Definíció:

Tetszőleges $A, B \subset \Omega$ eseményekhez hozzárendeljük az $A + B$ eseményt − az **összegüket** −, amely akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik.

Példa 4:

$A =$ { páros szám } $= \{2,4,6\}$

$B =$ { legalább 4-t dobunk } $= \{4,5,6\}$

Ekkor $A + B = \{2,4,5,6\}$.

Tétel:

Az események összeadására fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} &A + B = B + A \quad (\text{kommutatív}) \\ &(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{asszociatív}) \\ &A + A = A \quad (\text{idempotens}) \\ &A + \Omega = \Omega \\ &A + \emptyset = A \\ &A + \overline{A} = \Omega \end{aligned}$$

Feladat 1:

Hogyan értelmezzük végtelen sok esemény összegét?

$A_1 + A_2 + .. = ?$

Feladat 2:

Bizonyítsuk be a fenti azonosságokat!

Definíció:

Tetszőleges $A, B \subset \Omega$ eseményekhez hozzárendeljük az AB eseményt − **szorzatukat** −, amely akkor következik be, ha A és B esemény is bekövetkezik.

Példa 5:

Az előző példa A és B eseményére:

$AB = \{4,6\}$

Tétel:

Az események szorzására fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} &AB = BA \quad (\text{kommutatív}) \\ &(AB)C = A(BC) \quad (\text{asszociatív}) \\ &A \cdot A = A \quad (\text{idempotens}) \\ &A \cdot \Omega = A \\ &A \cdot \emptyset = \emptyset \\ &A \cdot \overline{A} = \emptyset \end{aligned}$$

Feladat 3:

Hogyan értelmezhető végtelen sok esemény szorzata $A_1 \cdot A_2 \cdot .. = ?$

Feladat 4:

Bizonyítsuk be a fenti azonosságokat!

Tétel:

Az Ω eseménytér tetszőleges A és B eseményére igazak az alábbi egyenlőségek:

1. A+AB=A
2. A(A+B)=A.

Tétel:

De Morgan azonosságok:

Az Ω eseménytér tetszőleges A és B eseményére igazak az alábbi egyenlőségek:

1. $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$
2. $\overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$

Tétel:

Az események összeadására és szorzására nézve fennáll az u.n. disztributív tulajdonság:

$(A+B)\cdot C = AC + BC$
$(A+B)\cdot(A+C) = A + BC$ tetszőleges A, B és C eseményekre.

Bizonyítás:

$$\overline{A+BC} = \overline{A}\cdot\overline{BC} = \overline{A}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right) = \overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot\overline{C} = \overline{A+B}+\overline{A+C} = \overline{(A+B)(A+C)}$$

Definíció:

Tetszőleges $A,B \subset \Omega$ eseményekhez hozzárendeljük az $A \setminus B$ eseményt − a **különbségüket**, amely akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik, de B esemény nem.

Példa 6:

Az előző példákban: $A \setminus B = \{2\}$

Példa 7:

Legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobtunk:

A= 1,3,5

B az az esemény, hogy 4-nél kisebb számot dobtunk: B= 1,2,3

Ekkor A + B = 1,2,3,5 az az esemény, hogy összes 6-nál kisebb prímszámot dobhattunk.

AB = 1,3 az az esemény, hogy vagy 1-et, vagy 3-at dobtunk.

$A \setminus B = \{5\}$ az az esemény, hogy 5-öt dobtunk.

$\overline{A}$ = 2,4,6 az az esemény hogy páros számot dobtunk.

4. 2.4 Boole-algebra (halmazok és események)

Definíció:

Amennyiben halmazokon, eseményeken értelmezve van, az A + B összeadásnak és AB szorzásnak nevezett két $\overline{A}$ $\overline{\Omega} = \emptyset$ továbbá minden A elemhez létezik komplementer elem, valamint az alaphalmaz komplementere az üres halmaz. És igazak a következő azonosságok:

A+B=B+A AB=BA

A+(B+C)=(A+B)+C A(BC)=(AB)C

A+A=A A = A

A(B+C)=AB+AC A+BC=(A+B)(A+C)

A+ $\emptyset$=A A=A

A+ = A $\emptyset$ = $\emptyset$

A+$\overline{A}$ = $A \cdot \overline{A} = \emptyset$

akkor ezt a struktúrát **Boole algebrának** nevezzük.

Megfeleltetés:

Létezik egy 1-1 értelmű megfeleltetés az események és a halmazok között, amely nagyon hasznos az események és halmazok kapcsolatának vizsgálatában (az eseményeket lehet halmazként szemléltetni):

esemény halmaz

eseménytér alaphalmaz

véletlen esemény részhalmaz

elemi esemény egy elemű részhalmaz

biztos esemény alaphalmaz

lehetetlen esemény üres halmaz

ellentett esemény halmaz komplementer halmaza

$A + B$ összeg $A \cup B$ unio

AB szorzat $A \cap B$ metszet

$A \setminus B$ különbség $A \setminus B$ különbség

$A \subseteq B$ következik $A \subset B$ részhalmaz

Definíció:

Tetszőleges $A,B \subset \Omega$ események egymást kizáró események, ha együtt nem következhetnek be, azaz $A \cdot B = \emptyset$.

Példa 1:

Legyen a kockadobásnál $A = \{1,3,5\}$ és $B = \{2,4,6\}$, azaz

$A = \{páratlan számot dobunk\}$

$B = \{\text{párosszámotdobunk}\}$

A és B események egymást kizáró események.

Tétel:

Az Ω eseménytér tetszőleges A és B eseményére igaz az alábbi egyenlőség:

$$A = AB + A\overline{B}$$

ahol $AB \text{ és } A\overline{B}$ egymást kizáró események.

Bizonyítás:

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A\Omega = A$$

Egymást kizáró események:

$$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A\Omega = A$$

Definíció:

Az $A_2, A_2, \ldots, A_n \ldots$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha

1) egyik esemény sem lehetetlen esemény: $A_i \neq \varnothing \quad i = 1, 2, \ldots$ 2) egymást páronként kizáró események: $A_i \cdot A_j = \varnothing \quad i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots$ 3) összegük a biztos esemény: $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = \Omega$

A definíció azt jelenti, hogy a teljes eseményrendszer eseményei közül mindig egy és csak egy következik be.

Példa 2:

Az A és $\overline{A}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, mert $A\overline{A} = \varnothing$ és $A + \overline{A} = \Omega$.

Példa 3:

Az elemi események teljes eseményrendszert alkotnak, mert együtt kiadják az eseményteret, és egymást kizáró események.

Definíció:

Legyen az Ω eseménytér bizonyos részhalmazaiból képezett H (nem üres) halmazrendszer.

Az Ω eseménytér részhalmazaiból képezett H eseményrendszert **eseményalgebrának** nevezzük, ha

1. $\forall A, B \in H \quad A + B \in H$
2. $\overline{A} \in H$

Következmények:

1. $\Omega \in H$, mert $A \in H$, akkor $\overline{A} \in H$ és $A + \overline{A} = \Omega \in H$
2. $\varnothing \in H$, mert $\Omega \in H$ és $\overline{\Omega} = \varnothing \in H$
3. $\forall A, B \in H$ esemény esetén $A \cdot B \in H$, mert $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$

4. $\forall A, B \in H$ esemény esetén $A \setminus B \in H$, mert $A \setminus B = A\overline{B} \in H$

Példa 4:

A következő halmazok eseményalgebrát alkotnak: $\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.

Példa 5:

Az Ω eseménytér összes részhalmazai eseményalgebrát alkotnak.

5. 2.5 Összefoglalás

1. Az egész számok között választunk egy számot. Az A esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott szám 5-tel osztható, B pedig azt, hogy a szám zérussal végződik. Adja meg, mit jelent

   a. A+B

   b. AB

   i. A-B esemény!

2. Egy cég vasúton is, teherautón is szállíthat árut. Legyen A az az esemény, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, B pedig jelentse azt, hogy teherautón van szállítás. Mit jelentenek az alábbi események?

AB	A+B	B-A	$\overline{A}$	$\overline{A}$ +B
$\overline{A+B}$	A$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{A}$ $\overline{B}$	$\overline{A}$ + $\overline{B}$

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges két esemény összege két egymást kizáró esemény összegére bontható!

2. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat áll fenn az A és B események között, ha teljesül az AB=A egyenlőség!

3. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat áll fenn az A és B események között, ha teljesül az A+B=A egyenlőség!

4. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat áll fenn az A és B események között, ha teljesül az A+B=AB egyenlőség!

5. Hozzuk egyszerűbb alakra az $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$ (A+B) kifejezést

Irodalomjegyzék

Csanády V., Horváth R., Szalay L.: *Matematikai statisztika,* EFE Matematikai Intézet, Sopron, 1995

Csernyák L.: *Valószínűségszámítás,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

Obádovics J. Gy.: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika,* Scolar Kiadó, Budapest

Reimann J.- Tóth J.: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991

Rényi A.: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966

Solt Gy.: *Valószínűségszámítás,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971

Denkinger G.: *Valószínűségszámítás,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1978