MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

SIMON KÁROLY

MATEMATIKA MSC ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

2011

Ismertető
Tartalomjegyzék
Pályázati támogatás
Gondozó
Szakmai vezető
Lektor
Technikai szerkesztő
Copyright

A jegyzet az Építőmérnöki MSc matematikához készült, élő előadások tapasztalatainak alapján. Elkészítését mérnök konzulens is segítette. A jegyzet főbb fejezetei: Lineáris algebra I., Lineáris algebra II., Parciális differenciálegyenletek, Vektoranalízis.

Kulcsszavak: Lineáris algebra, Parciális differenciálegyenletek, Fourier-sorok, Laplace-egyenlet, Vektoranalízis.

Támogatás:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Készült:
a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:
Ferenczi Miklós

Lektorálta:
Bojtár Imre

Az elektronikus kiadást előkészítette:
Torma Lídia Boglárka, Simon Bakos Erzsébet

Címlap grafikai terve:
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-450-1

Copyright: (cc) 2011–2016, Simon Károly, BME

„A (cc) terminusai: A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.”

Tartalomjegyzék

1. Az A2-ben tanult lineáris algebra összefoglalása **3**
1.1. Az $\mathbf{R}^n$ és alterei . . . 4
1.2. Lineáris egyenletrendszerek . . . 6
1.2.1. Gauss-elimináció . . . 6
1.2.2. Vektorok lineáris függetlensége . . . 8
1.2.3. Cramer-szabály . . . 9
1.3. Áttérés egyik bázisról a másikra . . . 11
1.4. Lineáris transzformációk . . . 13
1.4.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban . . . 15
1.5. Sajátértékek, sajátvektorok . . . 16
1.6. Ortogonális mátrixok . . . 17
1.7. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása . . . 18

2. Lineáris algebra II. **23**
2.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz . . . 23
2.1.1. Determináns . . . 23
2.1.2. A determináns geometriai jelentése . . . 24
2.1.3. Mátrix nyoma . . . 25
2.1.4. Mátrixok kétpontos szorzata . . . 26
2.1.5. Ferdén szimmetrikus mátrixok . . . 27
2.1.6. Gauss–Jordan-elimináció . . . 27
2.1.7. Kifeszített altér bázisának meghatározása . . . 31
2.2. A mátrix fundamentális alterei . . . 33
2.3. Dimenziótétel mátrixokra . . . 34
2.4. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$-ben . . . 37
2.5. Altérre vonatkozó projekció mátrixa . . . 39
2.5.1. Alkalmazás – lineáris egyenletrendszerek . . . 42
2.5.2. A hatványmódszer . . . 43

3. Parciális differenciálegyenletek **45**
3.1. Ismétlés: Fourier-sorok . . . 45
3.1.1. Általánosságban a Fourier-sor definíciója . . . 45
3.1.2. A tiszta szinuszos Fourier-sor definíciója . . . 47
3.2. Rezgő húr . . . 49

3.2.1. I. megoldás – Dávid Bernoullitól: . . . 51
3.2.2. II. megoldás D'Alamberttől . . . 55
3.2.3. A végtelen hosszú húr esete . . . 57
3.3. A hővezetés egyenlete . . . 60
3.3.1. Hővezetés véges hosszúságú rúdban . . . 60
3.3.2. Fourier-transzformált . . . 65
3.3.3. Hővezetés végtelen hosszú rúdban . . . 67
3.4. Laplace-egyenlet . . . 69
3.4.1. Dirichlet-probléma téglalapon . . . 69

4. Vektoranalízis **73**
4.1. Vektorterek . . . 73
4.2. Vonalmenti integrál . . . 75
4.2.1. Vonalintegrál függetlensége az úttól . . . 78
4.2.2. Curl-teszt a síkban . . . 82
4.2.3. Curl-teszt a térben . . . 82
4.2.4. Potenciálfüggvény meghatározása . . . 83
4.3. Felületmenti integrál . . . 84
4.3.1. Gauss-féle divergenciatétel . . . 89
4.3.2. Stokes tétel . . . 92
4.4. Green-tétel . . . 97
4.5. Néhány feladat a vektoranalízisből . . . 102
4.5.1. Vektor-differenciálkalkulus . . . 104
4.5.2. A gradiens, a divergencia és a rotáció kifejezése gömbi és henger-koordináta-rendszerekben . . . 106

Irodalomjegyzék **115**

1. fejezet

Az A2-ben tanult lineáris algebra összefoglalása

Egy olyan egyenletet, amely felírható

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots a_n \cdot x_n = b \tag{1.1}$$

alakban, ahol $a_1, \ldots, a_n, b$ adott valós vagy komplex számok, **lineáris egyenletnek** hívunk. Az ilyen egyenletekből álló

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

alakú egyenletrendszereket **lineáris egyenletrendszereknek** hívjuk. Egész pontosan n ismeretlenből és s egyenletből álló lineáris egyenletrendszereknek hívjuk.

Ezen fejezet egyik fontos célja lineáris egyenletrendszerek megoldásának tanulmányozása. Egy olyan egyenletet, amely felírható

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots a_n \cdot x_n = b$$

alakban, ahol $a_1, \ldots, a_n, b$ adott valós vagy komplex számok, **lineáris egyenletnek** hívunk. Az ilyen egyenletekből álló

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

alakú egyenletrendszereket **lineáris egyenletrendszereknek** hívjuk. Egész pontosan n ismeretlenből és s egyenletből álló lineáris egyenletrendszereknek hívjuk.

1.1. Az $\mathbf{R}^n$ és alterei

1. DEFINÍCIÓ $\mathbf{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\ 1 \le i \le n\}$. *Vagyis az* $\mathbf{R}^n$ *a rendezett valós szám n-esek halmaza.*

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor a sík pontjai leírhatók a számpárok segítségével. Tehát a sík azonosítható az $\mathbf{R}^2$-nel. Hasonlóan, a tér azonosítható az $\mathbf{R}^3$-nal. Az $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n)$ vektorai között, ugyanúgy mint a síkban vagy a térben, értelmezhetjük az

összeadást: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$,

a *számmal való szorzást*: $5\mathbf{x} = (5x_1,\dots,5x_n)$ vagy $-3,5\mathbf{x} = (-3,5x_1,\dots,-3,5x_n)$,

a *skaláris szorzást:* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1+\dots+x_ny_n$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektor *merőleges* az $\mathbf{y}$ vektorra, ha $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ (jele: $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$).

Ebben a fejezetben a vektorok **lineáris kombinációjának** fogalma központi szerepet játszik:

2. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ) *Adottak az* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^s$*-beli vektorok és valamely* $\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{R}$ *számok. Ekkor a* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$

$$\boxed{\beta_1\cdot\mathbf{a}_1+\beta_2\cdot\mathbf{a}_2+\dots+\beta_m\cdot\mathbf{a}_m = \mathbf{b}} \tag{1.4}$$

vektort az $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^s$*-beli vektorok* ***lineáris kombinációjának*** *nevezzük. A* $\beta_1,\dots,\beta_m \in \mathbb{R}$ *számokat a lineáris kombinációban előforduló* ***együtthatóknak*** *nevezzük.*

A vektorok lineáris kombinációinak fontos szerepe van a többváltozós lineáris egyenletrendszerek megoldásában. Nézzük ezt egy példán keresztül: az

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & = & 16 \end{array} \tag{1.5}$$

egyenletrendszer felírható mint

$$x_1\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1}+x_2\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\16\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \tag{1.6}$$

Továbbá, a (2.3) egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\5 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\16\end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Vagyis amikor az (2.3) egyenletrendszert oldjuk meg, akkor keressük azokat az x_1 és x_2 együtthatókat, amelyekkel az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorokból képzett lineáris kombináció éppen a $\mathbf{b}$ vektor. Geometrialag ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektort felbontjuk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos összetevők összegére.

Általánosságban: az

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array}\right\}} \tag{1.8}$$

egyenletrendszer megoldása azzal ekvivalens, hogy megtaláljuk azon $x_1,\dots,x_n$ számokat, melyekkel mint együtthatókkal az

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}$$

vektorokból lineáris kombinációival előáll a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}$$

vektor, vagyis

$$\boxed{x_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{b}}. \tag{1.9}$$

Ez pedig a következő mátrixegyenlet megoldásával ekvivalens:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}, \tag{1.10}$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{bmatrix}.$$

3. DEFINÍCIÓ *Az* $\mathbf{R}^n$ *egy* lineáris alterének *hívjuk az* $L \subset \mathbf{R}^n$ *halmazt, ha abból, hogy* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m \in L$*, következik, hogy az* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ *vektorok* összes *lehetséges lineáris kombinációja is L-ben van. Ez geometriailag azt jelenti, hogy L azon* $\mathbf{R}^n$*-beli vektorok halmaza, amelyeket fel lehet bontani az* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ *vektorokkal párhuzamos vektorok összegére.*

1. PÉLDA A legegyszerűbb lineáris altér az, ami az origóból áll: $L = \{(0,\dots,0)\}$ és az, amikor $L = \mathbf{R}^n$ maga a teljes tér. Ezeket *triviális lineáris altereknek* nevezzük.

2. PÉLDA A sík *nem triviális alterei* az origón átmenő egyenesek.

3. PÉLDA A tér *nem triviális lineáris alterei* az összes, origón átmenő egyenesek és az összes, origót tartalmazó síkok.

1.2. Lineáris egyenletrendszerek

Ebben a fejezetben egyenletrendszeren **mindig** lineáris egyenletrendszert értünk.

4. PÉLDA
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 5 \end{array}$$
Ekkor az egyenletrendszer *kiegészített mátrixának* hívjuk a
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
mátrixot. Az egyenletrendszer *mátrixa*:
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása során az adott egyenletrendszert helyettesíthetjük egy másik egyenletrendszerrel, melynek ugyanazok a megoldásai, de könnyebb megoldani. A helyettesítés során lépések sorozatát hajtjuk végre. Ezek a lépések a következők lehetnek:

1. A rendszer valamely egyenletét megszorozzuk egy nem nulla számmal.
2. Két egyenletet felcserélünk.
3. Az egyik egyenlet valahányszorosát egy másik egyenlethez hozzáadjuk.

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixában a fenti lépések a következő műveleteknek felelnek meg:

1. Egy sort megszorzunk egy nem nulla számmal.
2. Két sort felcserélünk.
3. Az egyik sor számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

4. DEFINÍCIÓ *A fenti három műveletet* elemi sortranszformációnak *nevezzük.*

1.2.1. Gauss-elimináció

A Gauss-eliminációt a lineáris egyenletrendszerek megoldására használjuk. Két lépésből áll:

1. lépés: az egyenletrendszer kiegészített mátrixát ún. *sor-echelon* alakra hozzuk elemi sortranszformációk alkalmazásával.

2. lépés: a sor-echelon alakból megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.

5. DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa sor-echelon alakú, ha*

1. *a csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai,*
2. *ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes,*
3. *két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).*

5. PÉLDA Sor-echelon alakú mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adott a következő mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

A sor-echelon alakra hozás módszerének **első lépése**:

1. Kiválasztjuk balról az *első nem csupa nulla* oszlopot.
2. Megcseréljük az első két sort úgy, hogy az előbb kiválasztott oszlop tetején *ne nulla* legyen:
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$
3. Elosztjuk az első sort *kettővel*, hogy a mátrix bal felső sarkában lévő szám *egy* legyen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$
4. Az első sor egy megfelelő konstansszorosát adjuk a többi sorhoz, hogy az első oszlop *minden* eleme *nulla* legyen, *kivéve* a bal felső sarokban lévő *egyet.* Ezért az első sor -2-szeresét adjuk a harmadik sorhoz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}.$$

5. Most takarjuk le a mátrix első sorát, és a maradékon ismételjük meg a fenti eljárást. A második sort elosztjuk -2-vel, hogy a harmadik oszlop második eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}.$$

A következő lépésben a második sor -5-szörösét adjuk a harmadik sorhoz, hogy a harmadik oszlop harmadik eleme *nulla* legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután a harmadik sornak vesszük a kétszeresét, hogy az ötödik oszlop utolsó eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az eredmény egy *sor-echelon alak*. Innen az egyenletrendszer megoldása: $x_5 = 2$; $x_3 - \frac{7}{2}2 = -6 \Rightarrow x_3 = 1$; $x_1 + 2x_2 - 5 \cdot 1 + 3x_4 - 6 \cdot 2 = 14$ vagyis

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & -2x_2 & - & 3x_4 & + & 31 \\ x_3 & = & 1 & & & & \\ x_5 & = & 2 & & & & \end{array}.$$

Ez azt jelenti, hogy *végtelen sok* megoldás van, amit úgy kapunk, hogy az x_2 és x_4 értékét tetszőlegesen választjuk; ezután $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 31$, a $x_3 = 1$, és az $x_5 = 2$.

Tehát az egyenletrendszer egy megoldása:

ha $x_2 = 1$ és $x_4 = 3$, akkor $x_1 = 20$ és $x_3 = 1$, továbbá $x_5 = 2$.

1.2.2. Vektorok lineáris függetlensége

6. DEFINÍCIÓ *Az* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ *vektorok* lineárisan függetlenek*, ha egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ *vektorokat* lineárisan függőnek *hívjuk, ha valamelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.*

1. TÉTEL *Az* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ *vektorok lineárisan függetlenek akkor és csak akkor, ha* $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ *csak abban az esetben lehetséges, ha* $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

1. FELADAT Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok valamelyike a $\mathbf{0}$ vektor, akkor az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektor rendszer semmi esetre sem lehet lineárisan független.

7. DEFINÍCIÓ *Egy $L \subset \mathbf{R}^n$ lineáris altér egy* bázisa $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in L$, *ha a*

1. *a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok lineárisan* függetlenek,
2. *a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi kiadják az L összes vektorát.*

6. PÉLDA Az $\mathbf{R}^2$ egy bázisát adja bármely két *nem* párhuzamos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektor. Az $\mathbf{R}^3$ egy bázisát adja bármely három *nem* egy síkba eső vektor (úgy értve, hogy közös kezdőpontból mérjük fel őket).

2. TÉTEL *Ha a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ vektorok az $L \subset \mathbf{R}^n$ altér egy bázisa, akkor az L altér bármely másik bázisának ugyancsak k vektora van.*

8. DEFINÍCIÓ *Ha az $L \subset \mathbf{R}^n$ altérnek a bázisai k vektorból állnak, akkor azt mondjuk, hogy az L altér* dimenziója k. *Jele:* $\dim(L) = k$.

3. TÉTEL *Ha $\dim(L) = k$, akkor bármely lineárisan független k vektor bázist alkot.*

Tehát, például ha L az $\mathbb{R}^3$-nak kétdimenziós altere (vagyis L egy olyan sík, amely az origón átmegy), akkor L-nek bázisa minden olyan $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ tetszőleges $\mathbf{0}$-tól különböző nem párhuzamos vektorok.

1.2.3. Cramer-szabály

9. DEFINÍCIÓ *Legyen* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *egy $n \times n$-es mátrix. Legyen B_i az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy az A mátrixból kidobjuk az első sort, és az i-edik oszlopot:* $\begin{bmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2(i-1)} & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(i-1)} & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, *ez egy B_i $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix.*

Ekkor az A mátrix determinánsát definiálhatjuk a kisebb méretű B_i mátrixok determinánsával, azaz

$$\det(A) = a_{11}\det(B_1) - a_{12}\det(B_2) + a_{13}\det(B_3) - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(B_n).$$

A B_i $(1 \leq i \leq n)$ mátrixok determinánsait még kisebb méretű mátrixokkal definiálhatjuk a fenti elv szerint. Így végül a méretek minden lépésben való csökkentésével eljutunk a 2×2-es mátrixok determinánsához, amit már definiáltunk a következő módon: $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(D) = ad - bc$.

4. TÉTEL *(Cramer-szabály): Tegyük fel,hogy az*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszer $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *mátrixának determinánsa nem egyenlő nullával.*

Legyen $A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_2 & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, *a* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *az i-edik oszlopban van. Ekkor az egyenletrendszer megoldása egyértelmű:*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)};\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)};\ \dots;\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

A Cramer-szabály olyan egyenletrendszerekre alkalmazható, ahol az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, és az egyenletrendszer mátrixának determinánsa **nem egyenlő nullával.**

Ezt a tételt akkor érdemes alkalmazni, mikor *n kicsi*, azaz $n = 2, 3$. *Nagyobb* n-ekre a sok $(n+1)$ determináns kiszámítása nagyon sok műveletet igényel. *Nagy* n-ekre a Cramer-szabálynak elméleti jelentősége van, ugyanis a Cramer-szabály garantálja, hogyha $\det(A) \neq 0$, akkor létezik és egyértelmű a megoldás.

7. PÉLDA Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & & & + & 4x_3 & = & -3 \end{array}\right. .$$

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 6 \neq 0$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ \det(A_1) = 6;\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix},\ \det(A_2) = 0;$$

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\det(A_3) = -12$. Tehát

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1;\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 0;\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -2.$$

A Cramer-szabály egy fontos következménye:

Tekintsük a következő ún. homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}.$$

Ennek az egyenletrendszernek legalább egy megoldása **mindig** van. Nevezetesen az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. A Cramer-szabály szerint, ha az egyenletrendszer $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ determinánsa nem nulla, akkor a megoldás egyértelmű. Tehát, ha $\det(A) \neq 0$, akkor az

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek **csak a triviális**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ a megoldása.}$$

10. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{R}^n$. *Az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *vektorok által kifeszített* L *(jele:* $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$*) altér azon* $\mathbf{b}$ *vektorokból áll, amelyek előállnak az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *lineáris kombinációiként.*

1. LEMMA $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *egy lineáris altere az* $\mathbf{R}^n$*-nek.*

11. DEFINÍCIÓ *Az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *rendszer* rangja *definíció szerint az* $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *altér dimenziója.*

1.3. Áttérés egyik bázisról a másikra

Az $\mathbf{R}^n$ természetes bázisának hívjuk a $T = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázist, ahol

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \ldots \ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{v}$ vektor természetes bázisban vett koordinátáit vagy $[\mathbf{v}]_T$-vel jelöljük, vagy egyszerűen csak $\mathbf{v}$-t írunk.

Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

alakban. Ekkor azt mondjuk, hogy a B bázisban a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. Jelben:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

8. PÉLDA Ha $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{2}\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$$

tehát $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, ahol a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a bázis.

5. TÉTEL *Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy tetszőleges bázisa az $\mathbf{R}^n$-nek, akkor $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektorra:*

$$[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B,$$

ahol $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ egy mátrix, melynek első oszlopa $\mathbf{u}_1$, második oszlopa $\mathbf{u}_2, \ldots$, n-edik oszlopa $\mathbf{u}_n$. Ezt a jelölést később is használjuk.

BIZONYÍTÁS Ha $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, akkor

$$[\mathbf{v}]_T = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{u}_n = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B. \qquad \square$$

1. KÖVETKEZMÉNY *Egy $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ vektor koordinátáit a $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bázisban a következő formula adja:*

$$[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_T. \tag{1.11}$$

2. KÖVETKEZMÉNY *Ha $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ és $B' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$ bázisai az $\mathbf{R}^n$-nek és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, akkor*

$$[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B. \tag{1.12}$$

12. DEFINÍCIÓ *Az* $[\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ *mátrixot a B bázisról a B′ bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.*

9. PÉLDA Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektor koordinátáit a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban!

Megoldás: Legyen $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Az 1. Következmény miatt $[\mathbf{v}]_B = P^{-1}\mathbf{v}$. Mivel $\det(P) = 10$, ezért $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8 \\ -0.4 \end{bmatrix}.$$

10. PÉLDA Adottak a következő bázisok:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{1.13}$$

Ha a $\mathbf{w}$ vektor koordinátái a B-ben $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, kérdés: mik a $\mathbf{w}$ koordinátái a B'-ben?

Megoldás: Alkalmazhatjuk a (1.12) formulát:

$$[\mathbf{w}]_{B'} = \left[\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\right]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot [\mathbf{w}]_B. \tag{1.14}$$

Legyen $P := [\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$! Ekkor $\det(P) = 2$, tehát $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Tehát $[\mathbf{w}]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{2} \\ -\frac{99}{2} \end{bmatrix}$.

1.4. Lineáris transzformációk

13. DEFINÍCIÓ *Az* $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ *leképezést lineáris transzformációnak hívjuk, ha*

a. $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$;

b. $F(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u}); \forall c \in \mathbf{R}$ *és* $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

11. PÉLDA A sík és az egyenes lineáris transzformációi:

1. A számegyenes lineáris transzformációi az $F(x) = cx$ alakú függvények.
2. A sík lineáris transzformációi például az origó körüli forgatások, az origón átmenő egyenesre tükrözések, vagy $F(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$.

12. PÉLDA Határozzuk meg az origó körüli (pozitív irányú) 30°-os szöggel való forgatás mátrixát, majd ennek segítségével számítsuk ki a $\mathbf{v} = [1,5]$ vektor 30°-os szöggel való elforgatásával kapott $\mathbf{w}$ vektort!

Megoldás: Mivel *nem* specifikáltuk, melyik bázisról van szó, ezért az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ természetes bázisban dolgozunk. Itt először meghatározzuk a $\mathbf{b}_1 = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ és $\mathbf{b}_2 = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ értékeket, majd ezekből képezzük a $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$ mátrixot $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Tehát $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Ennek segítségével megkaphatjuk annak a $\mathbf{w}$ vektornak a koordinátáit, amit a $\mathbf{v} = (1,5)$ vektor origó körüli (pozitív irányú) 30^0-os forgatásával kapunk:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

14. DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy a $B := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisban az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa M_B, ha minden*

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$$

vektorra

$$[F(\mathbf{a})]_B = M_B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_B \cdot [\mathbf{a}]_B \tag{1.15}$$

teljesül.

Alkalmazva a definíciót az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokra, kapjuk, hogy

$$\boxed{M_B = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{u}_1)]_B & [F(\mathbf{u}_2)]_B \end{bmatrix}}, \tag{1.16}$$

vagyis a 2×2-es M_B mátrix első oszlopa $[F(\mathbf{u}_1)]_B$ és második oszlopa $[F(\mathbf{u}_2)]_B$.

13. PÉLDA Legyen $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$. Találjuk meg a T mátrixát

a) a természetes bázisban;

b) az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban.

Megoldás:

a) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, így a T mátrixa a természetes bázisban $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $T\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1}\right)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $T\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2}\right)=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$, ahol $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ a koordináták a természetes bázisban.

$T(\mathbf{u}_1)=2\mathbf{u}_1$; $T(\mathbf{u}_2)=3\mathbf{u}_2$ és $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$.
$[T(\mathbf{u}_1)]_B=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$; $[T(\mathbf{u}_2)]_B=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, így $[T]_B=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$.

1.4.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban

6. TÉTEL *Legyen $P:=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]$, és legyen M_T a F lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázis ban, illetve M_B a B bázisban. Ekkor*

$$\boxed{M_B=P^{-1}\cdot M_T\cdot P}. \tag{1.17}$$

BIZONYÍTÁS Rögzítsünk egy tetszőleges

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2=P\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}$$

vektort. Fel kell majd használnunk azt, hogy $i=1,2$-re

$$[F(\mathbf{u}_i)]_B=P^{-1}\cdot[F(\mathbf{u}_i)]_T=P^{-1}\cdot M_T\cdot[\mathbf{u}_i]_T. \tag{1.18}$$

Az első azonosság a (2.20) Tételből, míg a második azonosság az M_T definíciójából adódik. Továbbá

$$[F(\mathbf{a})]_B=M_B\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[F(\mathbf{u}_1)]_B & [F(\mathbf{u}_2)]_B\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

□

Felhasználva (2.19)-et:

$$\begin{aligned}[[F(\mathbf{u}_1)]_B,\,[F(\mathbf{u}_2)]_B] &= \left[P^{-1}\cdot M_T\cdot[\mathbf{u}_1]_T,P^{-1}\cdot M_T\cdot[\mathbf{u}_2]_T\right]\\ &= P^{-1}\cdot M_T\cdot[\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2]\\ &= P^{-1}\cdot M_T\cdot P.\end{aligned}$$

Innen és (2.21)-ből következik, hogy

$$M_B=P^{-1}\cdot M_T\cdot P.$$

1.5. Sajátértékek, sajátvektorok

15. DEFINÍCIÓ *Adott egy A $n \times n$-es mátrix. Az $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort az A mátrix* sajátvektorának *nevezzük, ha az $A\mathbf{x}$ vektor az $\mathbf{x}$ vektornak valamilyen λ-szorosa, azaz $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Ekkor a λ egy* sajátértéke *az A mátrixnak.*

Vegyük észre, hogy

a) ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektora az A mátrixnak, akkor $2\mathbf{x}$, $3\mathbf{x}$ és általában $c\mathbf{x}$, ahol $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ is egy sajátvektora az A-nak,

b) abban az esetben is, ha az A összes eleme valós, mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok komponensei lehetnek *komplex számok*.

14. PÉLDA 1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ekkor, ha $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ és $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$, vagyis $\mathbf{u}_1$ a λ_1-hez, $\mathbf{u}_2$ a λ_2-höz tartozó sajátvektorok.

2. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ és $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ekkor látható, hogy $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ és $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$, vagyis $\mathbf{u}_1$ egy a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, $\mathbf{u}_2$ pedig egy olyan sajátvektor, ami a λ_2-höz tartozik.

Kérdés: Hogyan határozhatjuk meg egy A $n \times n$-es mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat?

Válasz: Abból indulunk ki, hogy $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Használva az

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

egységmátrixot kapjuk, hogy $\lambda\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, vagyis $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$, innen

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

A kapott homogén lineáris egyenletrendszernek az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$-tól különböző megoldása (mint ezt a Cramer-szabály egy következményeként láttuk) *pontosan* akkor van, ha

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tehát az A mátrix sajátértékei a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet λ-ra történő megoldásai. A sajátvektorokat ezután az $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletből határozzuk meg.

15. PÉLDA $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg a sajátvektorokat és a sajátértékeket!

Megoldás: A $\det(A-\lambda I) = 0$ egyenletet felhasználva

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)+5 = \lambda^2-9+5 = \lambda^2-4.$$

Tehát $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -2$.

Felhasználva az $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet a λ_1 és a λ_2 értékekhez tartozó $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ sajátvektorok meghatározására.

$\underline{\lambda_1 = 2 \text{ esetén:}}$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Így $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ megoldása $x_1 = x_2$. Tehát egy, a λ_1-hez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = -2 \text{ esetén:}}$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tehát $(A-\lambda I)\mathbf{x} = 0$ az $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ennek megoldása: $5x_1 = x_2$. Tehát egy, a $\lambda_2 = -2$-höz tartozó sajátvektor: $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

1.6. Ortogonális mátrixok

16. DEFINÍCIÓ *Egy **valós** $n \times n$-es Q mátrixot* ortogonálisnak *hívunk, ha*

$$Q^{-1} = Q^T,$$

vagyis ha

$$Q^T Q = QQ^T = I.$$

Legyen $Q = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_n]$, ekkor $Q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix}$. A $Q^T Q$ mátrix (i,j)-edik helyén

$$i \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{q}_i^T & \cdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ & \bullet\,(\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j) & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} i.$$ Az (i,j)-edik helyen

a $Q^TQ = I$ értéke $\begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \end{cases}$.

Tehát $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$, ha $i \neq j$ és $|\mathbf{q}_i| = 1$. Az ilyen tulajdonságú $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ vektorrendszert *ortonormált rendszernek* nevezzük.

17. DEFINÍCIÓ *Egy* $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ *vektorrendszer* ortonormált, *ha*

- $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$ *minden* $i \neq j$*-re és*
- $|\mathbf{q}_i| = 1$ *minden i-re.*

Vagyis azt kaptuk, hogy egy mátrix akkor és csakis akkor ortogonális, ha az oszlopvektorok rendszere ortonormált. Ez viszont azt jelenti, hogy ha egy mátrix ortogonális és felcseréljük az oszlopvektorok sorrendjét, akkor az így kapott új mátrix is ortogonális lesz.

16. PÉLDA Az $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix ortogonális, mivel $I^{-1} = I$ és $I^T = I$, így $I^{-1} = I^T$. Az előbbi megjegyzés miatt az $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixok is ortogonálisak.

Miért szeretjük az ortogonális mátrixokat?

Azért szeretjük az ortogonális mátrixokat, mert a velük való szorzás *megőrzi* a *hosszat* és a *térfogatot.* Vagyis:

7. TÉTEL *Legyen* Q *egy* $n \times n$*-es ortogonális mátrix és* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *tetszőleges vektorok.*

(a) $|Q\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ *megőrzi a hosszat,*

(b) $(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ *megőrzi a szöget (hiszen megőrzi a skalárszorzatot is),*

(c) $|\det(Q)| = 1$ *megőrzi a térfogatot.*

BIZONYÍTÁS Csak az (a) részét bizonyítjuk a tételnek.

$$|Q\mathbf{x}| = \sqrt{(Q\mathbf{x})^T (Q\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^T \underbrace{Q^T Q}_{I} \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = |\mathbf{x}|. \qquad \square$$

1.7. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása

Egy $n \times n$-es A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A szimmetrikus a főátlójára, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, $\left(A^T = A\right)$.

A szimmetrikus mátrixok egy nagyon fontos tulajdonsága a következő.

8. TÉTEL *Egy szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós.*

Ennek felhasználásával be lehet bizonyítani a következő tételt.

9. TÉTEL *Legyen az A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Ekkor létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^T AQ = D$, ahol D egy diagonális mátrix.*

BIZONYÍTÁS Ha az A egy $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, akkor az A minden sajátértéke valós, de nem feltétlenül különböző. Az egynél nagyobb multiplicitású gyökökhöz tartozó sajátvektorok terében ki szeretnénk valasztani egy ortogonális bázist; erre szolgál az ún. „ortogonalizációs eljárás” □

Ortogonalizációs eljárás

Legyen $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ az $\mathbf{R}^n$ tér lineárisan független vektorrendszere (nyilván $k \leq n$). Mint mindig, $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ jelöli a kifeszített alteret vagyis az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorokból képezhető összes lineáris kombinációk halmazát.

17. PÉLDA Határozzuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ egy ortonormált bázisát (azaz k db vektort az $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$-ban, melyek hossza 1 és páronként merőlegesek)!

Megoldás: Ha $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független, akkor először egy ortogonális $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ bázisát adjuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$-nak, majd a kívánt ortonormált rendszert a $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|}$ adja.

Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Határozzuk meg azt az α_1-et, amire

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$$

teljesíti a $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$ feltételt, vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1.$$

Innen

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_2 \in L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ és $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$.

Határozzuk meg azt a β_1, β_2 értéket, amire a

$$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$$

vektorra teljesül, hogy $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$, vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1 = \beta_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \underbrace{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1}_{0} + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Továbbá,

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 = \beta_1 \underbrace{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}_{0} + \beta_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_3 \in L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$; $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$. Az eljárást ugyanígy folytatjuk, amíg $\mathbf{b}_k$-t is meghatározzuk.

18. PÉLDA $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-nak egy ortonormált bázisát!

Megoldás: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$, ahol $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$, így $\mathbf{b}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$, ahol $\beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$, így $\mathbf{b}_3 = \underbrace{\beta_1}_{-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_1 + \underbrace{\beta_2}_{-\frac{1}{3}} \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$. Tehát a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ortogonális bázisa az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$-nak. Azért, hogy ortonormált bázist kapjunk, a hosszakkal le kell osztani:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Tehát az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ egy ortonormált bázisa

$$\left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

10. TÉTEL *A egy $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix. Ekkor az A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek egymásra.*

Ha az A-nak minden sajátértéke különböző, akkor a sajátvektorait egység hosszúnak választva, azonnal kapunk egy sajátvektorokból álló ortonormált rendszert.

Ha az A valamely sajátértékének multiplicitása nagyobb mint 1, akkor az ilyen sajátértékekhez tartozó sajátvektorokra alkalmazni kell az ortogonalizációs eljárást, hogy megkapjuk a sajátvektorok egy ortonormált rendszerét.

Tehát egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrixnak mindig van $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sajátvektorokból álló ortonormált rendszere!

19. PÉLDA Határozzuk meg az $\mathbf{R}^4$ térnek az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátvektorából álló ortonormált bázisát!

Megoldás: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ és $\lambda_4 = -2$. Könnyen találhatunk négy sajátvektort.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{w}_i$ a λ_i-nek felel meg és $i = 1,2,3,4$.

Ezután az $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ altér egy ortonormált bázisát az ortogonalizálási eljárással meghatározzuk, és a $\mathbf{w}_4$-et normáljuk.

$\mathbf{c}_4 = \frac{\mathbf{w}_4}{|\mathbf{w}_4|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Az „Ortogonalizálási eljárás” című fejezet példájának eredményét felhasználva:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ez egy ortonormált bázisa R^4-nek, mely az A sajátvektoraiból áll.

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Legyen $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ az A mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer. Ekkor

(i) a diagonalizálás fejezetben leírtak alapján a $Q = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ mátrixra $Q^{-1}AQ = D$. D diagonális mátrix, melynek főátlójában az A mátrix sajátértékei vannak,

(ii) mivel $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ egy ortonormált rendszer, így Q egy ortogonális mátrix, $Q^{-1} = Q^T$. Tehát $Q^T AQ = D$, ami egy diagonális mátrix.

20. PÉLDA Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor az A sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1,\ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ és } \lambda_2 = 3,\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Innen

$$A = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot Q^T.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldali szorzat közepén álló diagonális mátrix főátlójának első eleme $\lambda_1 = 1$, második eleme $\lambda_2 = 3$. Ennek a felbontásnak egyik alkalmazása a következő: legyen

$$F(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}.$$

Ekkor az F lineáris transzformációnak a természetes bázisban a mátrixa az A. Ha áttérünk a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisra, akkor a fenti F lineáris transzformációnak a mátrixa a B bázisban a $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ diagonális mátrix lesz. Mivel ez a mátrix sokkal egyszerűbb mint az A mátrix, ezért például ezen F lineáris transzformáció iteráltjainak vizsgálata sokkal egyszerűbben elvégezhető a B bázisban.

2. fejezet

Lineáris algebra II.

A Lineáris algebra rész tárgyalásakor az [1] könyvet követjük. Ebben a könyvben rengeteg további feladat és érdekes gyakorlati alkalmazás, található.

2.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz

2.1.1. Determináns

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy $n \times n$-es mátrix. Az A mátrix a_{ij} elemének **minorja** M_{ij} annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból eldobjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot. A

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

számot az a_{ij} elem **cofactorának** hívjuk. Ekkor

$$det(A) = a_{i1}C_{i_1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}. \tag{2.1}$$

Ezt a kifejezést a **determináns i-edik sor szerinti cofactor-kifejtés**ének mondjuk.

21. PÉLDA Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Ekkor tekinthetjük az utolsó sor szerinti cofactor-kifejtést:

$$det(A) = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = -16$$

A 3×3-as mátrix determinánsát meg kaphatjuk a következő módon is:

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ aa_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ennek egy elmés általánosításaként egy tetszőleges $n \times n$-es determináns kiszámítható. Ennek leírásához szükség van a következő fogalomra: ha az $\{1,2,\dots n\}$ számok sorrendjének tetszőleges felcserélésével a $\{j_1,\dots,j_n\}$ számokat kapjuk, akkor azt mondjuk, hogy a $\{j_1,\dots,j_n\}$ számok az $\{1,2,\dots n\}$ egy **permutációja**. Azt mondjuk, hogy a $\{j_1,\dots,j_n\}$ permutáció páros, ha azon cserék száma, amivel a $\{j_1,\dots,j_n\}$–ből az $\{1,2,\dots n\}$ visszanyerhető, páros szám. Egyébként a permutáció páratlan. Például: ha $n=3$, az

$$\{1,2,3\} \quad ,\{2,3,1\}, \quad \{3,1,2\}$$

permutációk párosak, míg a

$$\{3,2,1\}, \quad \{2,1,3\}, \quad \{1,3,2\}$$

permutációk páratlanok. **Előjeles elemi szorzat**nak nevezzük a

$$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

alakú szorzatokat, ahol a $+$ jelet akkor választjuk, ha a $\{j_1,\dots,j_n\}$ permutáció páros, egyébként a mínusz jelet választjuk.

11. TÉTEL *$det(A)$ egyenlő az összes lehetséges előjeles elemi szorzatok összegével.*

Vegyük észre, hogy ez éppen (2.2) általánosítása. Ezen tételt használva be lehet látni, hogy

12. TÉTEL *Minden A négyzetes ($n \times n$-es valamilyen n-re) mátrixra*

$$det(A) = det(A^T).$$

Ez azt is jelenti, hogy a (2.1)-ben adott sor szerinti cofactor-kifejtés helyett az oszlop szerinti cofactor-kifejtést is használhatjuk, vagyis minden $1 \le j \le n$-re

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots A_{nj}C_{nj}. \tag{2.3}$$

2.1.2. A determináns geometriai jelentése

Egy (négyzetes) mátrix determinánsa mindig egy szám. Ennek van abszolút értéke és előjele. Először megértjük a determináns abszolút értékének geometriai jelentését, azután pedig a determináns előjelének a geometriai jelentését.

A determináns abszolút értékének a jelentése:

Jelöljük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix j-edik oszlop vektorát $\mathbf{u}_j$-vel, vagyis

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n].$$

Vegyük észre, hogy

$$A \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i,$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik koordináta-egységvektor, vagyis az a vektor, amelynek minden koordinátája 0, kivéve az i-edik koordinátát, ami viszont 1-gyel egyenlő. Ezért az

$$\mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y} \tag{2.4}$$

leképezés az $\mathbb{R}^n$ egységkockáját vagyis a

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : 0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 1\}$$

halmazt egy-egy értelműen ráképezi az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorok által kifeszített

$$P\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$$

parallelepipedonra. **A determináns abszolút értéke éppen ezen $P\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ parallelepipedon térfogata.** Vagyis az A mátrix determinánsának abszolút értéke azt mondja meg, hogy az

$$f : \mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y}$$

lineáris leképezés esetén egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz $f(H)$ képének térfogata hányszorosa a H térfogatának. Képletben:

$$\text{térfogat} f(H) = |\det(A)| \cdot \text{térfogat}(H).$$

A determináns előjelének jelentése:

Ha a determináns előjele pozitív, akkor az

$$f : \mathbf{y} \to A \cdot \mathbf{y}$$

leképezés irányítástartó (például a forgatások). Ha a determináns előjele negatív az f irányításváltó (például a tükrözések).

2.1.3. Mátrix nyoma

Legyen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{d}$ egy négyzetes ($d \times d$-es) mátrix. Ekkor az A mátrix nyoma (jelben: $\mathrm{tr}(A)$ vagy $\mathrm{sp}(A)$) az A mátrix főátlójában álló elemek összege:

$$\mathrm{tr(A)} = \sum_{k=1}^{d} a_{kk}.$$

22. PÉLDA Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Ekkor $\mathrm{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

A mátrix nyomának legfőbb tulajdonságai: Legyenek A és B tetszőleges $d \times d$-es mátrixok. Ekkor

1. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$;
2. minden c konstansra: $\mathrm{tr}(c \cdot A) = c \cdot \mathrm{tr}(A)$;
3. $\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$;
4. $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$;
5. ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ az A mátrix összes sajátértékei (multiplicitással, vagyis minden sajátérték annyiszor felsorolva, ahányszoros sajátérték), akkor

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\det(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d.$$

Vagyis mind a mátrix nyoma, mind a determinánsa csak a mátrix sajátértékeitől függ. Ebből az következik, hogy ha A és B két olyan mátrix, melyek ugyanazon lineáris transzformációnak a mátrixai más-más bázisban, akkor mind $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ mind pedig $\det(A) = \det(B)$.

2.1.4. Mátrixok kétpontos szorzata

A mérnöki matematikai szakirodalomban gyakran előfordul a mátrixok kétpontos szorzata (matematikakönyvekben nem). Legyenek adva a következő $d \times d$-s mátrixok:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{d} \text{ és } B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{d}.$$

Az A és B mátrixok kétpontos szorzata (jelben $A : B$) a skalárszorzat mintájára van definiálva. Vagyis:

$$\boxed{A : B = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} b_{i,j}.} \tag{2.5}$$

23. PÉLDA Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.
Ekkor $A : B = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 70$.

Vegyük észre, hogy az $A^T \cdot B$ mátrix k-adik sorának k-adik eleme $\sum_{i,j=1}^{d} a_{k,i}^T b_{i,k} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,k} b_{i,k}$.
Ezt összegezve minden $1 \leq k \leq d$-re kapjuk, hogy

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,k} b_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{d} a_{k,i}^T b_{i,k} = \mathrm{tr}(A^T \cdot B). \tag{2.6}$$

2.1.5. Ferdén szimmetrikus mátrixok

Legyen $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{d}$ egy $d \times d$-s mátrix. Azt mondjuk, hogy az A ferdén szimmetrikus mátrix, ha $A = -A^T$. Vagyis, ha tükrözzük az A elemeit az A főátlójára (arra az átlóra, ami a bal felső sarokból megy a jobb alsó sarokba), akkor ezen tükrözés eredményeképpen az A mátrix mínusz egyszeresét kapjuk.

13. TÉTEL *Ha A négyzetes mátrix, akkor A előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.*

BIZONYÍTÁS Legyen $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ és $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Ekkor S szimmetrikus, R pedig ferdén szimmetrikus mátrixok. Nyilván $A = S + R$. □

2.1.6. Gauss–Jordan-elimináció

Az A2 előadáson tanult Gauss-elimináció során a mátrixot sor-echelon alakra hoztuk elemi sortranszformációk egymás utáni alkalmazásaival. Emlékeztetek, hogy egy mátrix sor-echelon alakban van ha

1. a csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai;
2. ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes;
3. ha két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

Nevezzük a fenti definícióban szereplő minden nem csupa nulla sor elején álló egyeseket pivot-elemeknek és ezen elemek oszlopait pivot-oszlopoknak. A sor-echelon alakból a redukált sor-echelon alakot úgy kapjuk, hogy a sor-echelon alakból indulva, a pivot-elemek sorainak megfelelő többszöröseit a felettük lévő sorokból levonva elérjük, hogy a mátrixban a pivot-elemek felett csak nullák legyenek.

24. PÉLDA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Az A mátrixból sor-echelon alakra hozás után kapjuk az

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol a pirossal írt elemek a pivot-elemek. Most alakítsuk ki a redukált sor-echelon formát:

Az utolsó nem csupa nulla sor (vagyis a mi esetünkben a harmadik sor) megfelelő számszorosait hozzáadjuk a megelőző sorokhoz, hogy az utolsó nem csupa nulla sor pivot-eleme felett csak nullák legyenek.

Vagyis az utolsó sor $\frac{7}{2}$-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, és ugyanebben a lépésben az utolsó sor -6 szorosát hozzáadjuk az első sorhoz. Kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol a kék szín jelöli az újonnan kialakított nullákat az utolsó sor pivot-eleme (piros 1-es) felett. Most az így kapott mátrix második sorának pivot-eleme feletti pozíción akarunk nullát kialakítani. Ehhez hozzáadjuk a második sor 5-szörösét az első sorhoz. Ennek eredményeként kapjuk a redukált sor-echelon alakú mátrixot:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az A' sor-echelon alakban és az A'' redukált sor-echelon alakban a pivot-elemek ugyanazok.

Azt a folyamatot, amelynek során az A mátrixból a redukált sor-echelon alakú A'' mátrixot létrehoztuk **Gauss–Jordán-eliminációnak** hívjuk.

```
> with(linalg):
```

```
> A:=matrix(3,6,[0,0,-2,0,7,12,2,4,-10,6,12,28,2,4,-5,6,-5,-1]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

25. PÉLDA Adott a síkon 4 pont, melyek x koordinátái különbözőek. Ehhez létezik egyetlen olyan legfeljebb harmadfokú polinom, amely mind a négy adott ponton átmegy. Határozzuk meg ezt a polinomot, ha a pontok

$$P_1 = (-2,-2),\ P_2 = (-1,4),\ P_3 = (1,2),\ P_4 = (2,3).$$

Megoldás: Jelöljük a keresett (legfeljebb) harmadfokú polinomot $p(x)$-szel. Ekkor

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Azt hogy a $p(x)$ polinom átmegy az adott négy ponton, a következő négy egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} a_0+(-2)a_1+(-2)^2a_2+(-2)^3a_3 &= -2 \\ a_0+(-1)a_1+(-1)^2a_2+(-1)^3a_3 &= 4 \\ a_0+(1)a_1+(1)^2a_2+(1)^3a_3 &= 2 \\ a_0+(2)a_1+(2)^2a_2+(2)^3a_3 &= 3. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

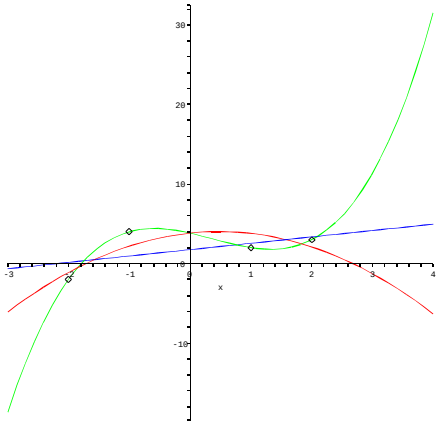
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezt Gauss–Jordan-eliminációval redukált sor-echelon alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó oszlopban álló elemek adják rendre a_0, a_1, a_2, a_3 értékét. Vagyis a keresett polinom:

$$p(x) = \frac{23}{6} - \frac{7}{4}x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3.$$



2.1. ábra. A $P_1, \ldots, P_4$ pontokat legjobban megközelítő első- (kék) másod- (piros) és harmadfokú (zöld) polinomok

Ezt az ábrát a következő MAPLE program eredményezi:

```
> x1:=[-2,-1,1,2]:

> y1:=[-2,4,2,3]:

> #corresponding data points:

> with(stats):with(plots):

Warning, these names have been redefined: anova, describe, fit,
importdata, random, statevalf, statplots, transform


> pts:=zip((x,y)->[x,y],x1,y1):

> pt_plot:=pointplot(pts):
```

```
> inter_poly:=interp(x1,y1,x):

> ip_plot:=plot(inter_poly, x=-3..4,color=GREEN):

> ls_fit1:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b, {a,b}]]([x1,y1]):

> ls_plot1:=plot(rhs(ls_fit1),x=-3..4,color=blue):

> ls_fit2:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2+b*x+c, {a,b,c}]]([x1,y1]):

> ls_plot2:=plot(rhs(ls_fit2),x=-3..4,color=red):

> display([pt_plot,ls_plot1,ls_plot2,ip_plot]);
```

2.1.7. Kifeszített altér bázisának meghatározása

Adottak az $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\} \in \mathbb{R}^d$-beli vektorok. Legyen $W \subset \mathbb{R}^d$ az S által kifeszített altér. Vagyis W azon vektorok összesége, amelyek előállnak S-beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$W = \{\mathbf{w} : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_s;\ \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{v}_s\}.$$

Két természetes probléma fordul elő nagyon gyakran:

1. Találjuk meg W egy *tetszőleges* bázisát.
2. Találjuk meg W egy olyan bázisát, *amely S-beli vektorokból áll*.

Az első problémát megoldottuk A2-ben. Nevezetesen az S-beli vektorokból mint sorvektorokból alkottunk egy B mátrixot. Ezt a B mátrixot Gauss-eliminációval sor-echelon alakra hoztuk. A nem nulla sorvektorok alkották a W egy bázisát. Ez így egyszerű és nagyon gyors, viszont az ilymódon kapott bázisvektorok általában nem az S-beli vektorok közül kerülnek ki, tehát ez a módszer megoldja az első problémát, de nem oldja meg a nehezebb második problémát. A második probléma megoldásához szükséges a következő észrevétel:

Észrevétel:
Legyen A egy $k \times s$ méretű mátrix, melynek oszlopvektorai $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^k$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Tegyük fel, hogy az oszlopvektorok között fennáll a

$$\mathbf{c}_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}_k$$

összefüggés. Hajtsunk végre egy tetszőleges elemi sortranszformációt az A mátrixon. Így kapjuk az A' mátrixot, melynek oszlopvektorait jelöljük $\mathbf{c}'_1, \dots, \mathbf{c}'_s \in \mathbb{R}^k$-vel. Vagyis az elemi sortranszformáció eredménye:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_1 & \dots & \mathbf{c}'_s \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

14. TÉTEL *Használva a fenti jelöléseket:*

$$\mathbf{c}'_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}'_k.$$

Vagyis az A' mátrix oszlopvektorai között ugyanazok az összefüggőségi viszonyok vannak mint az A mátrix esetén.

A fenti 2. probléma megoldása az Észrevétel segítségével:

Legyen A az a $k \times s$ méretű mátrix, melynek oszlopvektorai az S elemei ugyanazon sorrendben:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_s \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Hajtsuk végre a Gauss–Jordan-eliminációt, vagyis az A mátrixból kiindulva hajtsuk végre elemi sortranszformációk azon sorozatát, melynek eredményeként kapunk egy redukált sor-echelon alakú mátrixot, melyet A'-nek nevezünk. Ennek a pivot-oszlopainak megfelelő S-beli elemek alkotják a W-nek S-beli bázisát.

26. PÉLDA Legyen W $\mathbb{R}^4$-nek a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektorok által kifeszített altere. Határozzuk meg a W egy olyan bázisát, melynek minden eleme ezen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ vektorok közül kerül ki.

Megoldás: Legyen A az a mátrix, melynek oszlopvektorai az adott vektorok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a Gauss–Jordan-eliminációt a MAPLE segítségével:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,5,[1,2,0,2,5,-2,-5,1,-1,-8,0,-3,3,4,1,3,6,0,-7,2]):
> gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a kékkel írt elemek a pivot-elemek, az oszlopaik a pivot-oszlopok. A tétel értelmében a pivot-oszlopoknak megfelelő sorszámú $\mathbf{v}$ vektorok alkotják a W bázisát. Vagyis a

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

a W egy bázisát adja.

2.2. A mátrix fundamentális alterei

A fejezet hátralévő része kiegészítő jellegű, a tananyagból általában – részben vagy egészben – kimarad.

18. DEFINÍCIÓ *Adott egy $k \times s$ méretű A mátrix, melynek oszlopvektorai $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^k$, sorvektorai $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^s$.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

1. *$\mathbb{R}^k$-ban azon alteret, melyet az A mátrix $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s\}$ oszlop vektorai feszítenek ki $\mathrm{col}(A)$-val jelöljük.*
2. *$\mathbb{R}^s$-ben azon alteret, melyet az A mátrix $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$ sorvektorai feszítenek ki $\mathrm{row}(A)$-val jelöljük.*
3. *A2-ben tanultuk, hogy a sorvektorok és az oszlopvektorok által kifeszített alterek (noha az első $\mathbb{R}^s$-beli a második $\mathbb{R}^k$-beli) dimenziói egyenlőek. Ezen közös dimenziót hívjuk a mátrix rangjának, jele: $\mathrm{rank}(A)$.*
4. *Az A mátrix nullterének hívjuk azon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$ vektorok alterét, melyekre $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, jele $\mathrm{null}(A)$. Az A nulltérének dimenziója az A nullity-je, jele $\mathrm{nullity}(A)$.*

Mivel az A mátrixszal együtt az A^T transzponált mátrix is fontos, ezért a transzponált mátrixra is fel akarjuk írni ugyanezeket a mennyiségeket. Viszont a transzponálás sort oszlopba visz és viszont, ezért

$$\mathrm{row}(A^T) = \mathrm{col}(A) \text{ és } \mathrm{row}(A) = \mathrm{col}(A^T).$$

19. DEFINÍCIÓ *Az A mátrix fundamentális alterei:*

$$\mathrm{row}(A), \qquad \mathrm{col}(A), \qquad \mathrm{null}(A), \qquad \mathrm{null}(A^T).$$

2.3. Dimenziótétel mátrixokra

15. TÉTEL (DIMENZIÓ TÉTEL MÁTRIXOKRA) *Legyen A egy $k \times s$ méretű (tehát nem feltétlen négyzetes) mátrix. Ekkor*

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = s.} \tag{2.11}$$

BIZONYÍTÁS Tekintsük az

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletet (itt $\mathbf{x}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^s$). Gauss-eliminációt alkalmazva ezen egyenlet kiegészített mátrixát sor-echelon alakra hozzuk. Tegyük fel, hogy a nem csupa nulla sorok száma r-rel egyenlő. Ekkor $\mathrm{rank}(A) = r$. Minden nem csupa nulla sor egy ki nem küszöbölhető egyenletet jelent, ami megköt egy változót. Tehát az összesen s változóból megkötünk r változót. Így tehát marad $s - r$ szabad változónk. Vagyis

$$\text{szabad változók száma } = s - \mathrm{rank}(A)$$

Más szavakkal:

$$\mathrm{rank}(A) + \text{ szabad változók száma } = s.$$

Másrészt a szabad változók száma éppen az $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldásai által meghatározott altér dimenziója. Más szavakkal:

$$\mathrm{nullity}(A) = \text{ szabad változók száma }.$$

Összetéve a két utolsó egyenletet, kapjuk a tétel állítását. □

Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor az S merőleges alterének hívjuk azon $\mathbb{R}^d$-beli vektorok halmazát, melyek az S **összes** elemére merőlegesek, jele $S^\perp$:

$$S^\perp := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : \forall \mathbf{v} \in S;\ \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \right\}.$$

16. TÉTEL (ALTEREKRE VONATKOZÓ DIMENZIÓTÉTEL) *Legyen W az $\mathbb{R}^s$ egy altere. Ekkor*

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = s.$$

BIZONYÍTÁS Ha W az $\mathbb{R}^s$-nek a két triviális altere $(\mathbf{0}, \mathbb{R}^s)$ közül az egyik, akkor a tétel triviálisan igaz. Egyébként pedig választunk egy bázist, legyen ez a W. Tegyük fel, hogy ez a bázis k elemű. Ebből a bázisból mint sorvektorokból képezzük a $k \times s$ méretű A mátrixot. Nyilván

$$\operatorname{row}(A) = W \text{ és } \operatorname{null}(A) = W^{\perp}. \tag{2.12}$$

□

Tehát az előző tételt használva:

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = s.$$

Házi feladat: Igazoljuk, hogy minden A mátrixra:

(a)

$$\boxed{\operatorname{col}(A)^{\perp} = \operatorname{null}(A^T).} \tag{2.13}$$

(b)

$$\boxed{\operatorname{row}(A)^{\perp} = \operatorname{null}(A).} \tag{2.14}$$

A fenti tételből következik az alábbi tétel.

17. TÉTEL *Legyen A egy $n \times n$-es (tehát négyzetes) mátrix. Legyen továbbá $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az A mátrixhoz tartozó lineáris leképezés, melyet a következőképpen definiálunk:*

$$\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(a) *Az A mátrix redukált sor-echelon alakja egyenlő az n-dimenziós egységmátrixszal, I_n-nel.*

(b) *Az A mátrixot felírhatjuk elemi mátrixok szorzataként.*

(c) *Az A mátrix invertálható.*

(d) *$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$-nak a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása.*

(f) *Minden $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$-re az $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek pontosan egy megoldása van.*

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) *$\lambda = 0$ nem sajátértéke az A mátrixnak.*

(i) *A T_A leképezés egy-egy értelmű.*

(j) *A T_A leképezés ráképezés $\mathbb{R}^n$-re.*

(k) *Az A mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek.*

(l) *Az A mátrix sorvektorai lineárisan függetlenek.*

(m) *Az A mátrix oszlopvektorai az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.*

(n) *Az A mátrix sorvektorai az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.*

(o) $\operatorname{rank}(A) = n$.

(p) $\operatorname{nullity}(A) = 0$.

A 16. Tétel egy másik következménye:

18. TÉTEL *Legyen W az $\mathbb{R}^n$-nek egy $n-1$ dimenziós altere. Ekkor létezik olyan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy*

$$W^\perp = \{c \cdot \mathbf{a} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Vagyis $W^\perp$ az $\mathbf{a}$ vektor által meghatározott egyenes. Az ilyen W altereket hipersíkoknak hívjuk.

BIZONYÍTÁS A 16. Tételből tudjuk, hogy ekkor $\dim(W^\perp) = 1$, vagyis $W^\perp$ az origón átmenő egyenes. □

A 16. Tétel alkalmazásaként kapjuk a következő tételt is, amelyet a későbbiekben használni fogunk:

19. TÉTEL *Legyen A egy tetszőleges mátrix. Ekkor*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T A).$$

BIZONYÍTÁS Jelöljük az A sorainak számát k-val és oszlopainak számát s-sel. Tehát az A egy $k \times s$ méretű mátrix. A 15. Tétel miatt elég azt belátni, hogy

$$\operatorname{nullity}(A) = \operatorname{nullity}(A^T A).$$

Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\operatorname{null}(A) = \operatorname{null}(A^T A). \tag{2.15}$$

Ehhez két dolgot kell megmutatni:

(a) Ha $\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A)$, akkor $\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A^T A)$.

(b) Ha $\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A^T A)$, akkor $\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A)$.

Az (a) triviális hiszen

$$\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A) \Leftrightarrow A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow A^T \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow (A^T A) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Most megmutatjuk, hogy a (b) rész is teljesül: legyen $\mathbf{a} \in \operatorname{null}(A^T A)$. Ez azt jelenti, hogy $A^T A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^s$ vektor merőleges a $\operatorname{row} A^T A$ altérre. Vegyük észre, hogy

$$(A^T A)^T = A^T A,$$

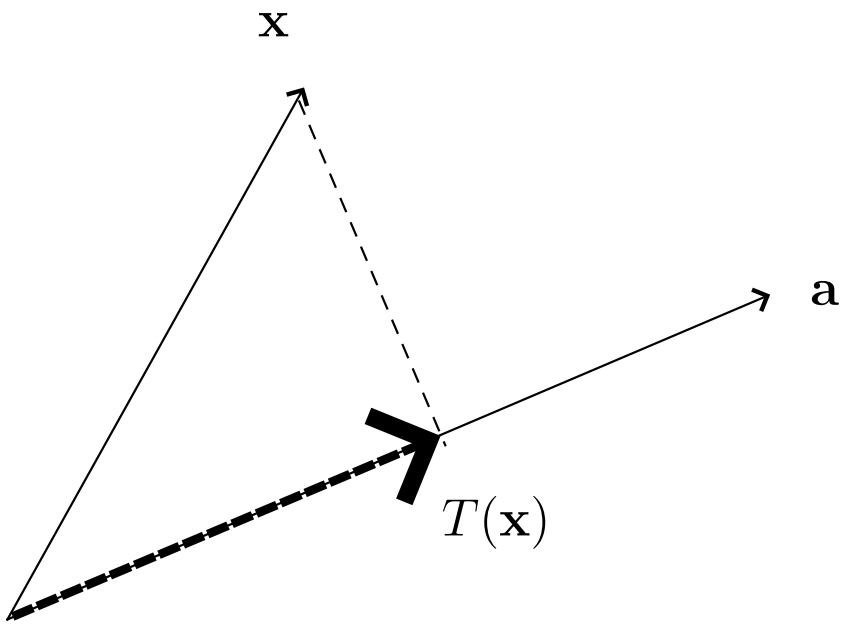
vagyis az A^TA mátrix szimmetrikus. Ezért az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a $\mathrm{col}(A^TA) = \mathrm{row}(A^TA)$ altérre is. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}$ vektor merőleges minden $A^TA \cdot \mathbf{y}$ alakú vektorra bármi is az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ vektor. Tehát az $\mathbf{a}$ vektor merőleges az $A^TA \cdot \mathbf{a}$ vektorra is. Ezért

$$0 = \mathbf{a}^T \cdot ((A^TA)\mathbf{a}) = (\mathbf{a}^TA^T) \cdot (A\mathbf{a}) = (A\mathbf{a})^T \cdot (A\mathbf{a}).$$

Innen pedig $\mathbf{0} = A\mathbf{a}$, vagyis $\mathbf{a} \in \mathrm{null}(A)$. □

2.4. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$-ben

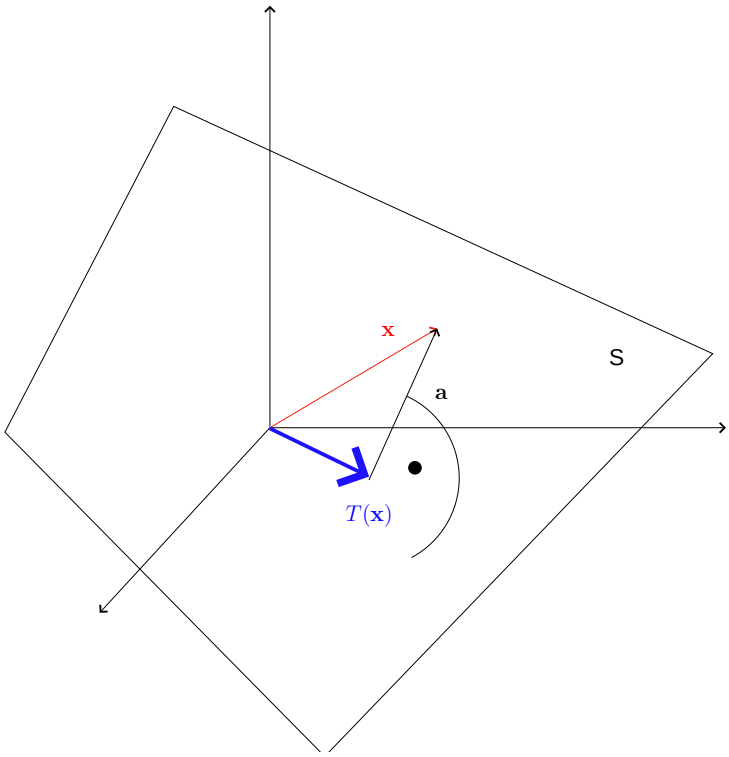
1. FELADAT (MERŐLEGES VETÍTÉS $\mathbb{R}^2$-BEN) Rögzítsünk egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ vektort. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz hozzárendeli ezen $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{a}$ vektor egyenesére vett merőleges vetület vektorát (l. 2.2 ábra).



2.2. ábra. $T(\mathbf{x})$ az $\mathbf{a}$ vektor egyenesére való merőleges vetület **vektor**

2. FELADAT (MERŐLEGES VETÍTÉS $\mathbb{R}^3$-BAN) Rögzítsünk $\mathbb{R}^3$-ban egy olyan S síkot, amely átmegy az origón. Legyen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz hozzárendeli ezen $\mathbf{x}$ vektornak az S síkra vett merőleges vetület vektorát (l. 2.3 ábra).

Most a fentiekhez hasonló feladatok megoldásait tanuljuk meg abban az esetben, amikor n dimenziós térben valamely $k < n$ dimenziós altérre vetítünk.



2.3. ábra. $T(\mathbf{x})$ az S síkra való merőleges vetület **vektor**

A fenti 2.2 **Feladat megoldása**:

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{x}\cdot\frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a}}_{\text{az } \mathbf{x}\text{-nek az } \mathbf{a}\text{-ra vett vetületének hossza}} \cdot\frac{1}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{a}$$

Tehát

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\cdot\mathbf{a}.$$

A nevezőt nyilvánvalóan felírhatjuk mint $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T\cdot\mathbf{a}$. Házi feladat meggondolni, hogyha tekintjük a

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

$n\times n$-es mátrixot, akkor erre

$$T(\mathbf{x}) = P\cdot\mathbf{x} \tag{2.16}$$

teljesül, vagyis a T lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban a P mátrix.

2.5. Altérre vonatkozó projekció mátrixa

20. TÉTEL (ALTEREKRE VONATKOZÓ PROJEKCIÓS TÉTEL) *Adott egy nem triviális W altere $\mathbb{R}^n$-nek. Legyen $T_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ az a lineáris transzformáció, amely minden $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ vektorhoz hozzárendeli az $\mathbf{x}$ vektornak a W altérre való merőleges vetületét. Ekkor a T lineáris transzformáció P mátrixát a természetes bázisban megkapjuk a következőképpen:*

$$P = M(M^TM)^{-1}M^T, \tag{2.17}$$

ahol M egy olyan mátrix, melynek oszlopvektorai a W egy bázisának elemei.

1. MEGJEGYZÉS Így persze az M mátrix választása nem egyértelmű, de attól függetlenül a P mátrix természetesen ugyanaz lesz az M minden lehetséges értékeire.

27. PÉLDA Legyen S az $x-4y+2z=0$ sík.

(a) Határozzuk meg az S-re való merőleges vetítés P mátrixát!

(b) Használva az előző rész eredményét, számítsuk ki az $A=(1,3,7)$ pontnak az S síkra eső merőleges vetületét!

Megoldás: (a) Vegyünk két nem párhuzamos vektort az S síkból. Ezek nyílván az S egy bázisát adják. Ezt megtehetjük úgy, hogy az egyik pont esetén $y=1$, $z=0$, majd a másik pont esetén $y=0$, $z=1$ értékeket választjuk. Ekkor az első esetben $x=4$, a másodikban pedig $x=-2$. Tehát az S sík egy bázisa:

$$\left\{\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Ezért az M mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple használatával:

```
> with(linalg):

> M:=matrix(3,2,[4,-2,1,0,0,1]):

> B:=inverse(multiply(transpose(M),M)):

> P:=multiply(M,B,transpose(M));
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 17 \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{25}{7} \\ \frac{47}{7} \end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS (20. TÉTEL BIZONYÍTÁSA) Legyen $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ egy bázisa W-nek. Legyen M az az $n \times k$ méretű mátrix, melynek oszlopai a $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ vektorok. Jelben:

$$M = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k].$$

Ekkor, mint azt (2.14)-ban láttuk,

$$W = \mathrm{col}(M) \text{ és } W^{\perp} = \mathrm{null}(M^T).$$

Tehát az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektort fel kell írni

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, \tag{2.18}$$

alakban, ahol $T(\mathbf{x}) \in \mathrm{col}(M)$ és $M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ teljesül. Vegyük észre, hogy

$$T(\mathbf{x}) \in \mathrm{col}(M) \Leftrightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : \; T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \tag{2.19}$$

és

$$M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow M^T \underbrace{(\mathbf{x} - T(\mathbf{x}))}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \tag{2.20}$$

Tehát HA be tudjuk látni, hogy létezik **egyetlen** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ amelyre

$$M^T \cdot (\mathbf{x} - M \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{2.21}$$

akkor

$$T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{a} = \mathbf{x} - T(\mathbf{x}) \tag{2.22}$$

adja a fent keresett megoldást, egyértelműen. Ehhez írjuk át a (2.21) egyenletet:

$$(M^T M) \cdot \mathbf{v} = M^T \cdot \mathbf{x}. \tag{2.23}$$

Ennek az egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra, mivel

- az $M^T M$ egy $k \times k$-as mátrix,
- $\mathrm{rank}(M^T M) = k$.

A második állítás abból jön, hogy egyrészt $\mathrm{rank}(M) = k$, másrészt minden B mátrixra $\mathrm{rank}(B^T B) = \mathrm{rank}(B)$ (ez a 19. Tétel). Tehát a (2.23) egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása az ismeretlen $\mathbf{v}$ vektorra. Nevezetesen:

$$\mathbf{v} = \left(M^T M\right)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

Innen és a (2.22) egyenletből adódik a keresett

$$T(\mathbf{x}) = M \left(M^T M\right)^{-1} M^T \mathbf{x}$$

összefüggés. □

2.5.1. Alkalmazás – lineáris egyenletrendszerek

Adott egy lineáris egyenletrendszer, amely m egyenletből és n ismeretlenből áll. Legyen ennek mátrixa A. Ekkor az egyenletrendszer leírható

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.24}$$

alakban. Ha ezt meg tudjuk oldani, akkor jó. Ha viszont nem megoldható, akkor is tehetünk valamit, nevezetesen meg lehet keresni azt az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektort, amire

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

a minimális. Mivel

$$\mathrm{col}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{y}\},$$

ezért értelemszerűen azt az $\mathbf{x}$ vektort, amire $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ értéke a minimális, megkapjuk mint a $\mathbf{b}$ merőleges vetületét a $\mathrm{col}(A)$ altérre. Nevezetesen, legyen

$$\mathbf{b}^* \text{ a } \mathbf{b} \text{ vektornak a } \mathrm{col}(A)\text{-ra vett merőleges vetülete.}$$

A 20. Tétel segítségével a $\mathbf{b}^*$ vektor meghatározható. Mivel definíció szerint $\mathbf{b}^* \in \mathrm{col}(A)$, ezért a

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \tag{2.25}$$

egyenletnek van legalább egy (esetleg végtelen sok) megoldása. Megoldva ezt az egyenletet meg kapjuk a (2.24) egyenlet ún. **legkisebb négyzetes** megoldását.

Egyszerűbb úton is eljuthatunk a (2.24) egyenlet **legkisebb négyzetes** megoldásához.

Nevezetesen, a (2.25) egyenlet ekvivalens a

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*$$

egyenlettel. Beszorozva mindkét oldalt A^T-vel:

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{b} - \mathbf{b}^*). \tag{2.26}$$

Házi feladat belátni, hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala a $\mathbf{0}$ vektorral egyenlő. Így a (2.24) egyenlet **legkisebb négyzetes x** megoldása kielégíti a

$$\boxed{(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.} \tag{2.27}$$

egyenletet, melyet a (2.24) egyenlet ún. normálegyenletének hívunk.

Legkisebb négyzetek módszere: Adottak az x, y változók,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

melyekről okunk van feltételezni, hogy lineáris kapcsolat van közöttük, vagyis valamilyen **meghatározandó, általunk még ismeretlen** $a, b \in \mathbb{R}$-re

$$y_i = ax_i + b \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Azonban az adatokat mérések eredményeként kapjuk, ezért azok hibával terheltek. Hogyan adhatjuk az adatok alapján elérhető lehető legjobb becslést az a és a b értékére?

Megoldás: Az a,b-nek mint **ismeretleneknek** ki kellene elégíteni az

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= ax_n + b \end{aligned} \tag{2.28}$$

egyenletrendszert, a mérési hibák miatt azonban ilyen a,b nem létezhet. Tehát keressük azt a megoldást, melyre legalább is a hibák négyzeteinek összege minimális. Ezt a (2.28) egyenletrendszer legkisebb négyzetek megoldása adja. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \tag{2.29}$$

Felírjuk tehát a (2.27) normálegyenletet:

$$(A^T A) \cdot \mathbf{x} = A^T \cdot \mathbf{b}. \tag{2.30}$$

Vegyük észre, hogy $A^T A$ egy 2×2-es mátrix, vagyis a (2.30) egyenletrendszer két egyenletből és két ismeretlenből álló rendszer. Mivel $\operatorname{rank}(A) = 2$, ezért a 19. Tétel miatt $\operatorname{rank}(A^T A) = 2$, tehát a 17. Tétel miatt létezik egyetlen megoldása. Ez a megoldás adja a keresett a,b értékeket.

2.5.2. A hatványmódszer

Elméletileg a mátrix sajátértékeit meghatározhatjuk mint a karakterisztikus egyenletének gyökeit. Azonban ez a módszer annyi számítási nehézséget tartalmaz, hogy a gyakorlatban szinte soha nem használjuk. Ebben a fejezetben egy olyan módszert tanulunk, mellyel jó becslést adható a legnagyobb sajátértékre és a hozzátartozó sajátvektorra. Ezt a módszert internetes keresőmotoroknál is alkalmazzák.

20. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. *Az*

$$\mathbf{x}_0, A \cdot \mathbf{x}_0, A^2 \cdot \mathbf{x}_0, \ldots, A^k \cdot \mathbf{x}_0, \ldots$$

vektorsorozatot az A mátrix által generált hatványsorozatnak hívjuk.

Ebben a fejezetben a hatványsorozat konvergenciájának segítségével számoljuk ki a legnagyobb sajátértéket és a hozzátartozó sajátvektorokat.

21. DEFINÍCIÓ *Ha az A mátrix λ_1 sajátértékének abszolút értéke nagyobb mint az A bármely más sajátértékének abszolút értéke, akkor azt mondjuk, hogy a λ_1 a domináns sajátérték, és a λ_1-hez tartozó sajátvektorokat domináns sajátvektoroknak hívjuk.*

21. TÉTEL *Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, melynek legnagyobb sajátértéke $\lambda > 0$. Ha $\mathbf{x}_0$ nem merőleges a λ sajátvektoraiból álló altérre, akkor a normalizált hatványsorozat,*

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \frac{A \cdot \mathbf{x}_0}{\|A \cdot \mathbf{x}_0\|}, \ldots, \mathbf{x}_k = \frac{A \cdot \mathbf{x}_{k-1}}{\|A \cdot \mathbf{x}_{k-1}\|}, \ldots \tag{2.31}$$

konvergál egy egységnyi hosszú domináns sajátvektorhoz, és az

$$\mathbf{x}_1^T \cdot A\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k^T \cdot A\mathbf{x}_k, \ldots$$

konvergál a λ domináns sajátértékhez. A tétel bizonyítása és annak elmagyarázása, hogy ez a tétel hogyan használható internetes keresőmotorokban, megtalálható a [2, 249-260. old.].

3. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenletek fejezetben sokszor kell majd kiszámolni függvények tiszta színuszos Fuorier-sorát. Ezért itt most összefoglaljuk az ehhez szükséges, az A2 tárgyban már tanult ismereteket, és azon túlmenően mutatunk néhány ügyes módszert speciális esetekben.

3.1. Ismétlés: Fourier-sorok

Akinek bővebb ismétlésre van szüksége, szám sorokról Fourier-sorokról és Taylor-sorokról olvashatnak bővebben a `http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/elso-masodik_het_a.pdf` jegyzet részletben.

3.1.1. Általánoságban a Fourier-sor definíciója

Adott egy $p > 0$ szám és egy korlátos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely $2p$ szerint periodikus. Feltesszük, hogy f-nek a $[-p, p]$ intervallumon belül (és így bármely intervallumon belül) csak véges sok szakadási pontja van. Az f-függvény Fourier-együtthatói az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ számok, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx,\ n \geq 1$$

és

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx,\ n \geq 1.$$

2. MEGJEGYZÉS Mivel az $x \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right)$ függvény páros és az $f(x)$ függvény páratlan, ezért az $x \mapsto f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right)$ függvény is páratlan. Mivel az integrál a függvény alatti előjeles terület, ezért az $x \mapsto f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cdot x\right)$ függvény integrálja a $[-p, 0]$ intervallumon éppen a mínusz egyszerese ugyanezen függvény $[0, \pi]$ intervallumon vett integráljának.

Ebből adódik, hogy:

$$\text{Ha az } f(x) \text{ páratlan, akkor } a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\dots . \tag{3.1}$$

Kihasználva, hogy páratlan $f(x)$ függvényre az $x \mapsto f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right)$ függvény páros, kapjuk, hogy

$$\text{ha az } f(x) \text{ páratlan, akkor } b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx. \tag{3.2}$$

28. PÉLDA Valamely adott $p > 0$ számra legyen $f(x)$ az a $2p$-szerint periodikus függvény, melyet a $[-p, p]$ intervallumon a következő formulával adunk meg:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } |x| < p; \\ 0, & \text{ha } x = -p \text{ vagy } x = p \end{cases} .$$

Határozzuk meg az $f(x)$ Fourier-együtthatóit!

MEGOLDÁS Csak a b_n („szinuszos”) együtthatókat kell meghatározni. Ennek céljából parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \sin(u \cdot x) dx = \frac{\sin(ux) - ux\cos(ux)}{u^2}. \tag{3.3}$$

Helyettesítsünk be $u = \frac{n\pi}{p}$-t és használjuk ki, hogy minden n természetes számra: $\sin(n\pi) = 0$ és $\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$. Innen kapjuk, hogy

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx = \frac{2p}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}. \tag{3.4}$$

□

Az f függvény Fourier-sorának n-edik részletösszege pedig:

$$\begin{aligned} s_n(x) := a_0 \quad + \quad & a_1 \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right) + \\ & + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + \\ & \vdots \\ & + a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right), \end{aligned}$$

vagyis

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) + b_k \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right). \tag{3.5}$$

Az $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right)\right). \tag{3.6}$$

29. PÉLDA Határozzuk meg a 28. Példában adott $f(x)$ függvény Fourier-sorát!

MEGOLDÁS Alkalmazva a (3.4) formulát kapjuk, hogy az $f(x)$ Fourier-sora

$$\frac{2p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{p}\cdot x\right).$$

A továbbiakban azt a fontos kérdést tárgyaljuk, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora mely x_0 pontokban konvergens, és ha konvergens, akkor teljesül-e, hogy

$$f(x_0)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{p}\cdot x_0\right)+b_k\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{p}\cdot x_0\right)\right). \tag{3.7}$$

Ha egy x_0 pontban (3.7) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény Fourier-sora az x_0 pontban előállítja az f-et.

22. TÉTEL *Ha egy $2p$ szerint periodikus $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvénynek csak véges sok szakadáspontja van a $[p,p]$ intervallumon, és a függvény a szakadáspontoktól eltekintve differenciálható, akkor az $f(x)$-et a Fourier-sora minden folytonossági helyen előállítja. Továbbá, ha a szakadási pontokban az $f(x)$ függvény féloldali érintői léteznek és **nem** függőlegesek, akkor*

$$s_n(x_0)\quad\to\quad\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Az $f(x_0+0)$ jelenti az $f(x)$ függvény jobboldali határértékét az x_0 helyen. Ha az $f(x)$-nek szakadása van az x_0-ban, attól még a jobb- és baloldali határérték létezhet. A fenti tétel azt mondja ki, hogy egy ilyen pontban, a tétel feltételeinek teljesülése esetén, a Fourier-sor a jobb- és baloldali határértékek átlagához konvergál.

Alkalmazva ezt a tételt látjuk, hogy a 28. Példabeli $f(x)$ függvényt a Fourier-sora minden pontban előállítja.

3.1.2. A tiszta szinuszos Fourier-sor definíciója

Legyen $f(x)$ egy olyan $f:[0,p]\to\mathbb{R}$ függvény, amely korlátos, véges sok szakadási pontja van és $f(0)=f(p)=0$. A továbbiakban az f-et kiterjeszthetjük az egész számegyenesre oly módon, hogy a kiterjesztett függvény (amit továbbra is $f(x)$-szel jelölünk) egy $2p$-szerint periodikus függvény lesz. Először értelmezzük az f függvényt a $[-p,0]$ intervallumon:

$$x\in[-p,0],\ f(x):=-f(-x). \tag{3.8}$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy tükröztük az f grafikonját az origóra. Második lépésben a most már a $[-p,p]$ intervallumon értelmezett f függvényt $2p$ periódussal kiterjesztjük a számegyenesre.

Az ily módon az egész $\mathbb{R}$-re kiterjesztett, $2p$-szerint periodikus és páratlan $f(x)$ függvénynek felírjuk a Fourier-sorát. Mint fent láttuk, ez egy tiszta szinuszos sor lesz, amit az

$f(x)$ eredeti f függvény tiszta szinuszos Fourier-sorának hívunk. Ennek együtthatói

$$\boxed{b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right)dx}, \tag{3.9}$$

és az $f(x)$ tiszta szinuszos sorfejtése a $[0,p]$ intervallumon

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{p}\cdot x\right) \text{ ha } 0<x<p.} \tag{3.10}$$

Tiszta szinuszos Fourier-együtthatók kiszámolásása speciális esetekben

Néhány speciális esetben (a 3.9) integrál kiszámolását megspórolhatjuk.

(i) Ha $k \geq \ell \geq 1$ egész számok és $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{p}x\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{p}x\right)$, akkor használhatjuk a $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ azonosságot. Innen

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(k+\ell)\pi}{p}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(k+\ell)\pi}{p}x\right)$$

a tiszta szinuszos sorfejtés. Tehát

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } n = k+\ell \text{ vagy } n = k-\ell\,; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(ii) Néhány függvény tiszta szinuszos Fourier-sorfejtése a $[0,\pi]$ intervallumon.

- A $0 \leq x < \pi$, $f(x) = x$ függvényre:

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right), \text{ ha } 0 \leq x < \pi.$$

- A $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ függvényre:

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \cdots\right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

- A $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi\,; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi \end{cases}$ függvényre:

$$h(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

- A $0 \leq x \leq \pi$, $\varphi(x) = x\cdot(\pi - x)$ függvényre:

$$\varphi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

(iii) A fenti esetekre való visszavezetéssel. Erre példa:

30. PÉLDA Határozzuk meg a $w(x) := x(1-x)$, tiszta szinuszos Fourier-sorát a $[0,1]$ intervallumon, felhasználva az előző pont megfelelő formuláját.

MEGOLDÁS Jelöljük b_n-nel a $\varphi(x)$ és a_n-nel a $w(x)$ tiszta szinuszos Fourier-sorának n-edik együtthatóját, vagyis legyen

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 w(x)\sin(n\pi x)dx \text{ és } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(s)\sin(ns)ds.$$

Vegyük észre, hogy

$$w(x) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\varphi(\pi\cdot x).$$

Ezért helyettesítéses integrálással adódik, hogy

$$a_n = \frac{1}{\pi^2}b_n.$$

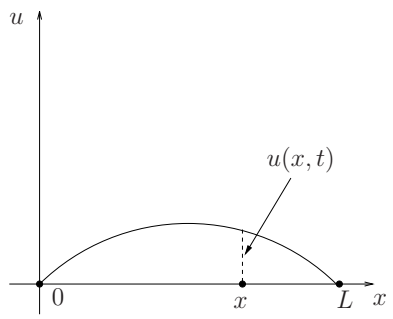
Viszont b_n-et az előző pontban megadták számunkra:

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Tehát kapjuk, hogy

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3}, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

3.2. Rezgő húr



3.1. ábra. A húr kitérése a t idő pillanatban

Tekintsük az L hosszúságú tökéletesen rugalmas húrt. Helyezzük ezt a húrt az x tengely $[0,L]$ szakaszára, és mozdítsuk ki az x-tengelyre merőlegesen. A húr az x-tengelyre merőlegesen az (x,u) síkban mozog. Azt, hogy a húr egy x abszcisszájú pontja hol van t idő múlva, az $u(x,t)$ függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha az $u(x,t)$ ismeretlen függvényt megtaláljuk.

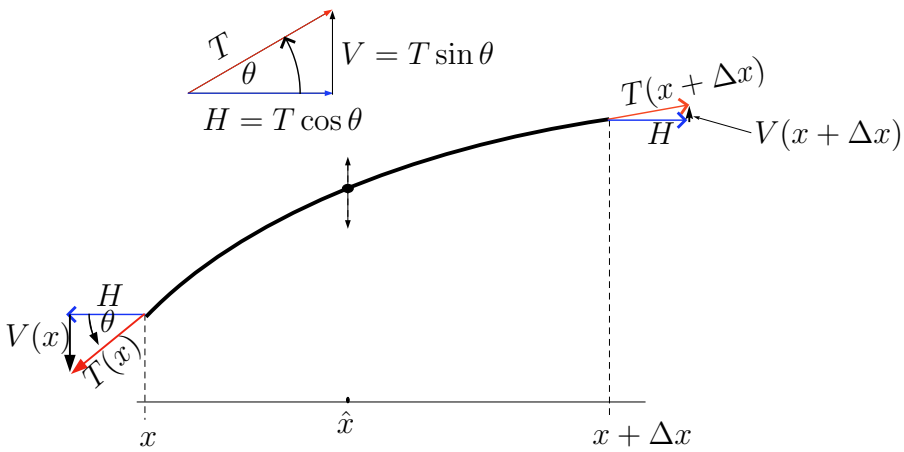
23. TÉTEL *A keresett $u(x,t)$ függvény kielégíti a*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.11}$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletet, ahol c egy konstans. A fenti (3.11) parciális differenciálegyenletet a ***rezgő húr parciális differenciálegyenletének*** *hívjuk.*

A tétel alábbiakban mellékelt bizonyítása [2, 653. old.]-ról származik.

BIZONYÍTÁS Képzeljük el, hogy a húr az x-tengelyen fekszik úgy, hogy a bal végpontja az $x = 0$. A húr egységnyi hosszra eső tömege ρ. Az egyenletet igazolásához tekintsük a húr egy picike Δx hosszú darabját, amely az $[x, x+\Delta x]$ szakasz felett található. Tegyük fel, hogy a húr már rezeg és t idő után ezen darabjának alakját a 3.2 ábra mutatja.



3.2. ábra. Rezgő húr egy pici darabkája. Ennek súlypont az $\widehat{x}$ felett mozog függőlegesen. Az ábra a ható erőket mutatja egy tetszőlegesen rögzített t pillanatban

Feltételek:

F1 Feltételezzük, hogy a húr könnyű, ezért számolásaink során a húr súlyát nem vesszük figyelembe.

F2 Továbbá az elmozdulások kicsik, ezért a súlypont csak függőlegesen mozog.

Newton törvényét ezen húr egy darabkájára alkalmazva kapjuk, hogy

A húzóerő különbsége a végpontokban = (a súlypont gyorsulása)∗(tömeg).

Legyen a húzóerő nagysága az x és az $x+\Delta x$ pontokban $T(x)$ illetve $T(x+\Delta x)$. A húzóerő (érintő irányú) szöge a vízszintes iránnyal θ. A fenti második feltétel miatt a súlypont csak vertikálisan mozog, tehát horizontális gyorsulása nincs. Ezért bármely két pontban a húzóerő

horizontális komponense ugyanolyan nagyságú. Nevezzük ezt H-nak. A húzóerő vertikális komponense az x pontban t idő után

$$V(x,t) = H \cdot \tan\theta = H \cdot u_x(x,t). \tag{3.12}$$

Newton törvénye szerint

$$V(x+\Delta x) - V(x) = \rho \Delta x u_{tt}(\hat{x}).$$

Elosztva Δx-szel és $\Delta x \to 0$-át véve

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = V_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t).$$

Innen és **??**-ből adódik, hogy

$$H \cdot u_{xx}(x,t) = \rho u_{tt}(x,t),$$

vagyis

$$\frac{H}{\rho} u_{xx} = u_{tt}. \tag{3.13}$$

Ezzel beláttuk az állítást $c^2 = \frac{H}{\rho}$ választással. □

Ahhoz, hogy ebből a húr helyzetét leíró $u(x,t)$-t megkapjuk, még tudnunk kell a húr alakját a $t = 0$ időpontban. Továbbá szükséges még tudnunk, hogy a $t = 0$-ban a húr egyes pontjait milyen sebességgel mozdítottuk el az u függőleges irányába. Vagyis a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differenciálegyenletnek adottak a

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

kezdeti feltételei. Továbbá megköveteljük, hogy a

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

peremfeltétel teljesüljön.

Tehát meg kell határozni azt az $u(x,t)$ függvényt, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 < t, 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, & 0 \leq t \end{cases}. \tag{3.14}$$

3.2.1. I. megoldás – Dávid Bernoullitól:

Dávid Bernoulli megoldásának ötlete, hogy a (3.14) megoldását kereshetjük olyan függvényekből álló végtelen függvénysor összegeként, amely függvények felírhatók

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{3.15}$$

alakban. Nevezetesen, ha $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, akkor nyilván

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\,T(t) \text{ és } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\,T''(t).$$

Ezeket a (3.11) egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy $X(x)\,T''(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$, vagyis

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Ugyanis az egyenlet bal oldala csak t-től, jobb oldala csak x-től függ, amiből adódik, hogy ők ugyanazzal az állandóval egyenlők, amit fizikai okból negatívnak kell feltételeznünk. Így tehát **két** egyenletünk van:

(1) $\frac{T''(t)}{T(t)} = -x$; és (2) $c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2$.

Átrendezve:

(1′) $T''(t) + \alpha^2 T(t) = 0$, és (2′) $X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0$.

Ezek általános megoldásai (tanulták az A3 tárgyban. **Kattintson ide az A3 jegyzethez**)

$T(t) = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$, és $X(x) = E\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + F\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$.

Ha ezt visszaírjuk (3.15)-be, akkor kapjuk, hogy

$$u(x,t) = \underbrace{(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))}_{T(t)} \cdot \underbrace{\left(E\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + F\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right)}_{X(x)}$$

Tudjuk,hogy

$$u(0,t) = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\,E \equiv 0.$$

Innen kapjuk, hogy

$$E = 0.$$

Felthetjük, hogy $F = 1$. Másrészt

$$0 \equiv u(L,t) = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\,F\sin\left(\frac{\alpha}{c}L\right).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\sin(\underbrace{\frac{\alpha}{c}L}_{k\pi}) = 0.$$

Ez teljesül, ha

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{L},\ k = 1,2,\dots\ .$$

Vagyis a megoldást az

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\left(\tfrac{kc\pi}{L}t\right) + B_k\sin\left(\tfrac{kc\pi}{L}t\right)\right)\cdot\sin\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right)} \tag{3.16}$$

alakban kereshetjük. Az egyetlen feladatunk, hogy az A_k és B_k együtthatókat meghatározzuk. Ezt fogjuk tenni a megoldás hátralévő részében. Az $\{A_k\}_{k=1}$ és $\{B_k\}_{k=1}$ együtthatókat a kezdeti feltételekből, pontosabban az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények tiszta szinuszos Fourier-sorának segítségével állíthatjuk elő. Mivel

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{L},$$

így A_k az $f(x)$ függvény $[0,L]$ intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának k-adik együtthatója, vagyis

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} t\right) dt. \tag{3.17}$$

Hasonlóan, a B_k együtthatókat a $g(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora *felhasználásával* határozzuk meg. Nevezetesen:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \alpha_k \sin \alpha_k t + B_k \alpha_k \cos \alpha_k t) \sin\left(\frac{\alpha_k}{c} x\right).$$

Innen $t = 0$ helyettesítéssel (felhasználva, hogy $\frac{\alpha_k}{c} = \frac{k\pi}{L}$):

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right). \tag{3.18}$$

Tehát meg kell határozni a $g(x)$ *függvény* tiszta szinuszos Fourier-sorát. A $[0,L]$ intervallumon legyen ez

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right). \tag{3.19}$$

Összevetve a (3.18) és (3.19) egyenleteket:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

kapjuk, hogy

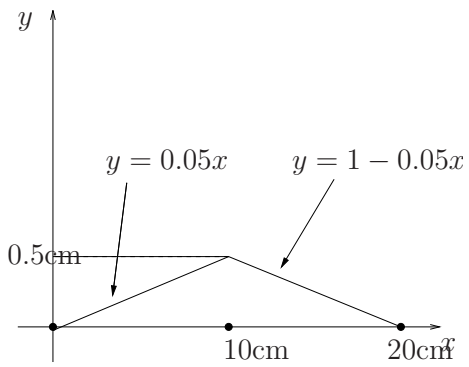
$$\alpha_k B_k = b_k.$$

Tehát

$$B_k = \frac{b_k}{\alpha_k} = \frac{L}{kc\pi} \cdot b_k = \frac{1}{kc\pi} \int_0^L g(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L} t\right) dt. \tag{3.20}$$

Tehát a (3.14) feltételeinek eleget tevő $u(x,t)$ függvényt úgy határozzuk meg, hogy minden $k \geq 1$-re kiszámíthatjuk az A_k együtthatókat a (3.17) egyenletből és a B_k együtthatókat a (3.20) egyenletből, majd ezeket behelyettesítjük a (3.16) egyenletbe.

31. PÉLDA Legyen az $u_{tt} = c^2 u_{xx}$-ben szereplő $c = 1$. A 20 cm hosszú, két végén rögzített húrt megfeszítjük úgy, ahogyan az ábra mutatja és azután elengedjük. Határozzuk meg a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt!



3.3. ábra. A húr kezdeti alakja

Megoldás:

Tudjuk, hogy $c = 1$ és $L = 20$. Mivel a húrt magára hagytuk (nem adtunk neki kezdeti sebességet), ezért a húr kezdeti sebessége 0. Tehát $g(x) \equiv 0$. Innen $\forall k \geq 1$-re $B_k = 0$, hiszen a $g(x) \equiv 0$ függvény szinuszos Fourier-sora minden b_k együtthatója 0 lesz. Az $\{A_k\}$ együtthatók kiszámolásához meg kell határozni az

$$f(x) = \begin{cases} 0.05x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0.05x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{cases} \tag{3.21}$$

függvény tiszta szinuszos sorfejtését!

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi}{L}x dx =$$

$$= \frac{2}{20}\int_0^{10} 0.05x \sin\left(\frac{k\pi}{20}x\right) dx + \frac{2}{20}\int_{10}^{20} (1 - 0.05x)\sin\frac{k\pi}{20}x dx =$$

$$= \frac{40}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

(A hiányzó részletszámítások Sch. 328.oldalán találhatok.)

Tehát:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{20}t\right)$$

Vagyis:

$$u(x,t) = \frac{40}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\left(\frac{\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{20}x\right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{20}x\right) + \frac{1}{5^2}\cos\left(\frac{5\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{20}x\right) - \ldots\right)$$

2. FELADAT Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, ha

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \sin(3x) - \frac{1}{\pi} \cdot x, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, & 0 < t \end{cases}.$$

3. FELADAT Határozzuk meg azt az $u(x,t)$ függvényt, melyre

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}; x \in [0,2] \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{40}x, & \text{ha } x \in [0,1] \\ \frac{2}{40} - \frac{1}{40}x & \text{ha } x \in [1,2] \end{cases} \\ u_t(x,0) = 3sin(\pi x); \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. \end{cases}$$

A $h(x) = 1 - \frac{2|x-L/2|}{L}$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora a $[0,L]$-en :

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) - \frac{\sin\left(\frac{3x\pi}{L}\right)}{3^2} + \frac{\sin\left(\frac{5x\pi}{L}\right)}{5^2} - \frac{sin\left(\frac{7x\pi}{L}\right)}{7^2} + \cdots\right)$$

4. FELADAT Oldja meg a rezgő húrra vonatkozó kezdetiérték-problémát Fourier-sorfejtéssel:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad x \in [0,1] \\ u(x,0) = \begin{cases} 0.1x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ 0.1 - 0.1x, & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \\ u_t(x,0) = \cos(3\pi x)\sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) \equiv 0 \end{cases}.$$

3.2.2. II. megoldás D'Alamberttől

Emlékeztetünk, hogy megint keressük azon $u(x,t)$ függvényt, melyre:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 < t, 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, & 0 \le t \end{cases}. \tag{3.22}$$

D'Alambert megoldása azon az észrevételen alapul, hogy ha $u_{1,}u_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható tetszőleges függvények, akkor az $u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$ mindig kielégíti a rezgő húr

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

parciális differenciálegyenletét.

Ugyanis, ha

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct),$$

akkor

$$u_t(x,t) = cu_1'(x+ct) - cu_2'(x-ct).$$

Innen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_1''(x+ct) + c^2 u_2''(x-ct).$$

Másrészt $u_x(x,t) = u_1'(x+ct) + u_2'(x-ct)$ és

$$u_{xx}(x,t) = u_1''(x+ct) + u_2''(x-ct).$$

A két előző kiemelt egyenletből adódik:

$$u_{tt}(x,t) = c^2\left[u_1''(x+ct) + u_2''(x-ct)\right] = c^2 u_{xx}(x,t).$$

Ekkor tehát a feltételekből kell meghatároznunk az u_1, u_2 függvényeket.

Megoldás: Az $u(x,0) = f(x)$ és $u_t(x,0) = g(x)$ kezdeti feltételek esetén az

$$u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$$

egyenletbe $t = 0$-t írva

$$f(x) = u(x,0) = u_1(x) + u_2(x).$$

Ha az $u(x,t) = u_1(x+ct) + u_2(x-ct)$ kifejezést t szerint deriváljuk, majd $t = 0$-t helyettesítünk, akkor

$$u_t(x,0) = cu_1'(x) - cu_2'(x).$$

Tehát kapjuk, hogy

$$f(x) = u(x,0) = u_1(x) + u_2(x) \text{ és } g(x) = u_t(x,0) = c\left(u_1'(x) - u_2'(x)\right),$$

s így

$$\left.\begin{array}{r} u_1'(x) + u_2'(x) = f'(x) \\ u_1'(x) - u_2'(x) = \frac{g(x)}{c} \end{array}\right\}$$

egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer, melynek megoldását tanultuk.

Innen adódik, hogy

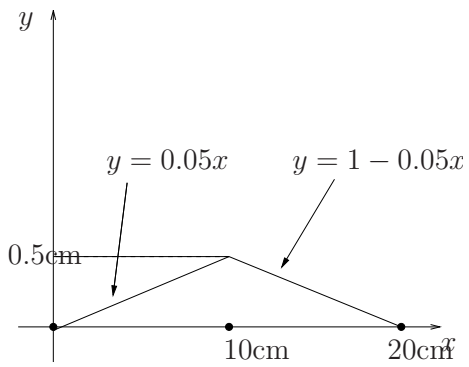
$$u_1(s) = \tfrac{1}{2}f(s) + \tfrac{1}{2c}\int_0^s g(\tau)\,d\tau + A,$$
$$u_2(s) = \tfrac{1}{2}f(s) - \tfrac{1}{2c}\int_0^s g(\tau)\,d\tau + B.$$

Ebből következik, hogy $A + B = 0$ kell legyen. Így tehát:

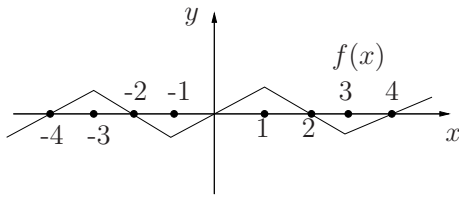
$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(x+ct) + u_2(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ebben a levezetésben *nem* használtuk azt a kerületi feltételt, hogy $u(0,t) = u(L,t) = 0$, tehát a fenti levezetés „végtelen hosszú” húr esetén is működik.

32. PÉLDA Tekintsük megint az előző példát, és oldjuk meg D'Alambert módszerével. A húr kezdeti alakját az ábra mutatja. Elengedve a húrt, adjuk meg a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt.



3.4. ábra. A húr kezdeti alakja



3.5. ábra. Az $f(x)$ „sátortető-függvény” kiterjeszése a $[0,2]$ intervallumról a számegyenesre

Megoldás:
$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]$, ahol $f(x)$ a következő függvénynek a kiterjesztése a számegyenesre:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0.05x & \text{ha} & 0 \le x \le 10 \\ 1-0.05x & \text{ha} & 10 \le x \le 20 \end{array} \right\}.$$

Tehát azt, hogy 10 időegység múlva az $x = 2$ cm-ben mi lesz a húr kitérése, úgy határozzuk meg, hogy

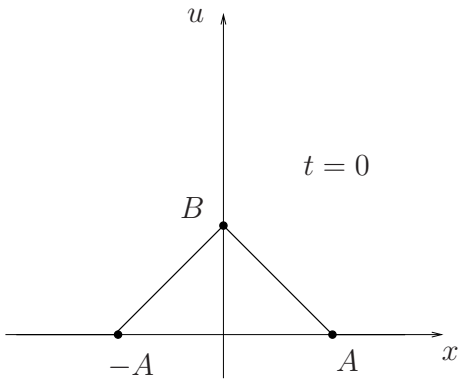
$$\begin{aligned} u(2,10) &= \frac{1}{2}[f(12)-f(-8)] = \frac{1}{2}\left[\underbrace{1-0.05\cdot 12}_{f(12)} - \left(\underbrace{-0.05\cdot 8}_{f(-8)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[1+0,4-0,6] = 0,9 \end{aligned}$$

3.2.3. A végtelen hosszú húr esete

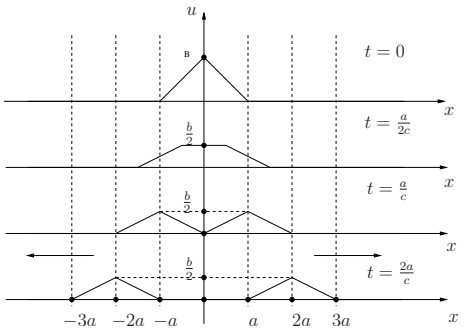
Mostantól az $u(0,t) = u(L,t) \equiv 0$ kerületi feltételt eldobjuk, ami marad, az a *végtelen hosszú húr esete*, vagy úgy is felfoghatjuk, hogy a hullám egyenlete. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Tehát, mint korábban a D'Alambert módszernél láttuk, ennek megoldása:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$



3.6. ábra. A kezdetben három ujjunkkal lefogott végtelen hosszú húr alakja $t = 0$-ban



3.7. ábra. A fenti végtelen hosszú húr mozgása

33. PÉLDA Ha $f(x) \equiv 0$ és $g(x) = \cos x$, akkor

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\left(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)\right) = \frac{1}{c}\cos x \sin ct.$$

(Itt felhasználtuk a $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ összefüggést.)

34. PÉLDA Tekintsünk egy végtelen hosszú húrt, amelyet három ujjunkkal lefogunk a $(-a,0)$; $(a,0)$; $(0,b)$ pontokban, majd elengedjük. Írjuk fel a húr mozgását leíró $u(x,t)$ függvényt.

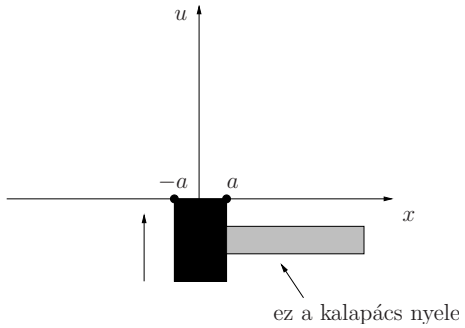
Megoldás: Ekkor $f(x) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & ha\ |x| \le a \\ 0 & ha\ |x| > a \end{cases}$ és $g(x) \equiv 0$, hiszen a húrt magára hagytuk.

A keresett $u(x,t)$ függvény: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$, melyet a következő ábrák szemléltetnek:

35. PÉLDA Kalapácsütés:

A húr az x tengelyen fekszik, és rávágunk egyet a kalapáccsal. Az ütés középpontja az $x = 0$ pont, és a kalapácsütés az $|x| < a$ pontoknak $g(x) = 1$ sebességet ad a $t = 0$-ban, a többi pontnak nem ad sebességet. Írjuk fel a húr alakját leíró $u(x,t)$ függvényt!

Megoldás:



3.8. ábra. A kalapáccsal megütjük az x-tengelyen fekvő végtelen hosszú húrt

$$f(x) \equiv 0;\ g(x) = \begin{cases} 1, & ha\ |x| < a \\ 0, & ha\ |x| \geq a \end{cases}.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds = \frac{1}{2c}\left\{\text{hossza az: } (x-ct, x+ct) \cap (-a,a)\text{-nak}\right\}.$$

Ekkor $u\left(x, \frac{a}{2c}\right) = \frac{1}{2c}\left\{\text{hossza az: } \left(x-\frac{a}{2}, x+\frac{a}{2}\right) \cap (-a,a)\text{-nak}\right\}$. Ez különböző $|x| < \frac{a}{2}$-re; $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$-re és $x > \frac{3a}{2}$-re.

A rezgő húr egyenlete megoldásának

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

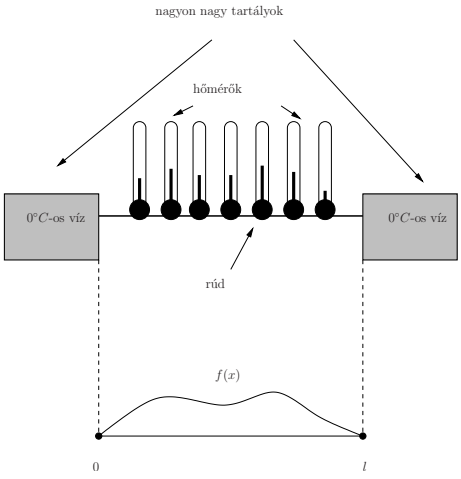
alakjából látszik, hogy az $(x_0, 0)$-beli kezdeti feltétel hatása c sebességgel, vagy legfeljebb c sebességgel terjed. Vagyis a megoldást a kezdeti feltételek az $(x_0, 0)$-ban csak a satírozott szektoron belül befolyásolják.

5. FELADAT Végtelen hosszú húr fekszik az x-tengelyen. A $t = 0$ pillanatban ráütünk egy kalapáccsal, alulról felfelé, egységnyi sebességgel. Tudjuk, hogy a kalapács feje 2cm széles, és a középpontja éppen az $x = 0$-ban üti meg a húrt. Rajzoljuk le a húr alakját a $t = 10$ pillanatban!

6. FELADAT Végtelen hosszú rúd rezgését a következőképpen írhatjuk le:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 0.2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0.2 - 0.2x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{ha } x \notin [0,1] \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Állapítsuk meg a rúd alakját $t = 1$-ben.



3.9. ábra. Ez az hőmérséklet $t = 0$-ban

3.3. A hővezetés egyenlete

3.3.1. Hővezetés véges hosszúságú rúdban

Képzeljünk el egy rudat, melynek mindkét végét 0°C-os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza l. Úgy képzeljük, hogy a rúd az x-tengelyen van, bal végpontja a *zéruspontban.* A rúd kezdeti hőmérsékletét az $f(x)$ függvény írja le. Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az x pontban t idő múlva.

Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott x pontban a rúdnak néha magasabb, néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladtával. Hogy egy adott x pontban t idő múlva mért $u(x,t)$ hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouriertől származó észrevételt, hogy a hőterjedést az

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l;\ 0 < t \tag{3.23}$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet írja le. (Ennek levezetését megtalálhatjuk Simonyi Károly: *A fizika kultúrtörténete* című könyvében.) A k konstans mértékegysége $\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$, angolul thermal diffusivity a neve.

anyag	k ($\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$)
ezüst	1.71
réz	1.14
aluminium	0.86
öntöttvas	0.12
gránit	0.011
tégla	0.0038
víz	0.00144

(A táblázat a [2] könyvből származik.)

A *kezdeti feltétel* a rúd hőmérséklete a $t=0$-ban, vagyis $u(x,0)=f(x)$. A *kerületi feltétel* pedig abból adódik, hogy a rúd két vége olyan nagy, 0°C-os vizet tartalmazó tartályokban van, melyeket a rúdból áramló hő nem tud felmelegíteni. (Ezért kell, hogy a tartályok nagyon nagyok legyenek.) Tehát a *kerületi feltétel:* $u(0,t)=u(l,t)\equiv 0$. Vagyis

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0<x<l, 0<t \\ u(0,t)=u(l,t)\equiv 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases} \tag{3.24}$$

Ezt a problémát is a Fourier-sorok alkalmazásával oldjuk meg. (A hővezetés elméletét Fourier alkotta meg, és a róla elnevezett sorokat pontosan ezen probléma megoldása céljából vezette be 1822-ben.)

Megoldás: A (3.24) egyenlet megoldását olyan végtelen függvénysor összegeként kereshetjük, amely függvénysor tagjaiban a változókat szét lehet választani:

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

Ezt (3.24)-be helyettesítve:

$$\frac{T'}{kT}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

Ez két darab közönséges differenciálegyenletet ad: $T'=-\lambda kT \Rightarrow T(t)=Ae^{-\lambda kT}$.

Továbbá:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l \text{ és } X(0)=X(l)=0.$$

Ez pontosan az a probléma, mint ami a rezgő húr esetén fordult elő. Amint ott láttuk, ennek megoldása:

$$X(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Tehát

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}, \tag{3.25}$$

feltéve, hogy $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora, vagyis

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)dt.} \tag{3.26}$$

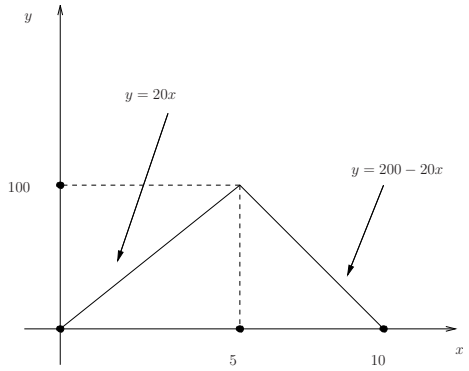
Az

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0<x<l, 0<t) \\ u(0,t)=u(l,t)\equiv 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

problémát tehát úgy oldjuk meg, hogy az $f(x)$ függvényt tiszta szinuszos Fourier-sorba fejtjük a $[0,l]$-en. (Ezt már gyakoroltuk a rezgő húr esetén.) Innen nyerjük az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ együtthatókat, majd ezek segítségével felírjuk az $u(x,t)$ képletét az $\{A_n\}$-nek értékeinek behelyettesítésével az

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

összefüggésbe.



3.10. ábra. Egy rúd kezdeti hőmérrséklete

36. PÉLDA Oldjuk meg a

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0 < x < 10, 0 < t) \\ u(t,0) = u(10,t) \equiv 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

feladatot, ha $l = 10$ és

$$f(x) = \begin{cases} 20x & ha\ 0 \le x \le 5 \\ 200 - 20x & ha\ 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

Legyen $k = 1$.

Vagyis $t = 0$-ban a rúd közepén a hőmérséklet 100°C-os, és a vége felé lineárisan csökken 0-hoz.

Megoldás:

Tiszta szinuszos Fourier-sorba kell fejteni az $f(x)$ függvényt. Vagyis meg kell találni az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ értékeket, melyekre $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ $(0 \le x \le l)$. A korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy $A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$.

$$A_n = \frac{1}{5}\int\limits_0^5 20x\sin\frac{n\pi}{10}xdx + \frac{1}{5}\int\limits_5^5 (200-20x)\sin\frac{n\pi}{10}xdx =$$

$$= -200\frac{-2\sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} + 200\frac{-2\sin(n\pi) + n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{800}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}). \quad (3.27)$$

Mivel

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & ha\ n = 4k \\ 1, & ha\ n = 4k+1 \\ 0, & ha\ n = 4k+2 \\ -1, & ha\ n = 4k+3 \end{cases},$$

így

$$f(x) = \frac{800}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{x\pi}{10}}{1^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}3)}{3^2} + \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}5)}{5^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10}7)}{7^2} + \cdots\right].$$

Használva az

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

összefüggést kapjuk, hogz

$$u(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{10}(2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}. \tag{3.28}$$

7. FELADAT Határozzuk meg a következő kezdetiérték-probléma $u(x,t)$ megoldását:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ u(x,0) = 4\sin(4\pi x)\cos(2\pi x) \\ u(0,t) = u(\frac{1}{2},t) \equiv 0 \end{cases}.$$

Inhomogén kerületi feltételek esete

Ugyanazt a problémát tekintjük mint (3.24)-ben, azzal az egyetlen különbséggel, hogy a kerületi feltételek a (3.24)-beli $u(0,t) = u(l,t) \equiv 0$ helyett most $u(0,t) \equiv T_1$, $u(l,t) \equiv T_2$-re változnak. Vagyis a következő problémát oldjuk meg:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \\ u(0,t) \equiv T_1 \text{ és } u(l,t) \equiv T_2 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}. \tag{3.29}$$

A megoldás alapgondolata az, hogy amint $t \to \infty$, a rúd hőmérséklete beáll egy $v(x)$ egyensúlyi hőmérséklet-eloszlásra. Ez tehát nem függ az időtől, vagyis $v_t \equiv 0$. Mivel viszont v megoldása a hővezetés egyenletének, kapjuk, hogy

$$v_{xx} = v_t = 0. \tag{3.30}$$

Vagyis $v(x)$ egy olyan függvény, amelynek második deriváltja minden pontban nullával egyenlő. Így $v(x)$ csak egyenes lehet. Mivel tudjuk, hogy

$$v(0) = T_1 \text{ és } v(l) = T_2, \tag{3.31}$$

ezért kapjuk, hogy

$$\boxed{v(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l}\cdot x.} \tag{3.32}$$

Első lépésben nem az ismeretlen $u(x,t)$ függvényt, hanem a

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x) \tag{3.33}$$

függvényt határozzuk meg. Vegyük észre ugyanis, hogy (3.30)-ból adódóan

$$w_t = kw_{xx}.$$

Továbbá, (3.31)-ből és (3.33)-ből következik, hogy egyrészt

$$w(0,t) \equiv 0 \text{ és } w(l,t) \equiv 0, \tag{3.34}$$

másrészt pedig

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = h(x) - \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x\right). \tag{3.35}$$

Tehát **első lépésként** megoldjuk $w(x,t)$-re a következő parciális differenciálegyenletet:

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \\ w(0,t) = w(l,t) \equiv 0 \\ w(x,0) = h(x) - v(x) = h(x) - \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot x\right) \end{cases}. \tag{3.36}$$

A (3.25) és a (3.26) képleteket alkalmazva az $f(x) = h(x) - v(x)$ helyettesítéssel:

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l},}$$

ahol

$$\boxed{C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(h(t) - \left[T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} \cdot t\right]\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right) dt.}$$

Második lépésként (3.33)-et használva felírjuk a keresett $u(x,t)$ függvényt:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x).$$

37. PÉLDA Legyen

$$h(x) = \begin{cases} 40x, & \text{ha } 0 \le x \le 5; \\ 200, & \text{ha } 5 \le x \le 10. \end{cases}$$

Határozzuk meg azt $u(x,t)$ függvényt, melyre

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 10, 0 < t \\ u(0,t) \equiv 0 \text{ és } u(10,t) \equiv 200 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}. \tag{3.37}$$

Megoldás:

Nyilván $T_1 = 0, T_2 = 200$ és $l = 10,\ k = 1$. Alkalmazva a (3.32) képletet kapjuk, hogy $v(x) = 20x$. Innen a $w(x,t) := u(x,t) - v(x)$, és kapjuk, hogy

$$\begin{cases} w_t = w_{xx}, & 0 < x < 10, 0 < t \\ w(0,t) = w(10,t) \equiv 0 \\ w(x,0) = h(x) - v(x) = \begin{cases} 20x, & \text{ha } 0 \le x \le 5; \\ 200 - 20x, & \text{ha } 5 \le x \le 10. \end{cases} \end{cases} \tag{3.38}$$

Ez viszont éppen a 36. Példában megoldott egyenlet. Innen

$$w(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{10}(2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}.$$

Így

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x) = 20x + \frac{800}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)^2 t}\sin\left(\frac{x\pi}{10}(2k+1)\right)}{(2k+1)^2}.$$

3.3.2. Fourier-transzformált

A következő probléma megoldásához a Fourier-transzformáltat használjuk, ezért összefoglaljuk annak definícióját, és egyes tulajdonságait.

Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre

1. $\exists\delta>0$ úgy, hogy az $\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$ integrál létezik és
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ létezik.

Ha az f függvény valamely $L>0$ szerint periodikus lenne, akkor felírhatnánk

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

alakban, ahol $a_0 = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)dt$, és $k\geq 1$-re

$$a_k = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right)dt, \quad b_k = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right)dt.$$

Összevonva:

$$f(x) \sim \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}t\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right)\right) \tag{3.39}$$

Alkalmazzuk a $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ azonosságot minden $k\geq 1$-re. Így adódik, hogy

$$f(x) \sim \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f(t)dt + \frac{\pi}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi}{L}(x-t)\right)dt}_{F_L(\lambda_k)}, \tag{3.40}$$

ahol, $\lambda_k := \frac{k\pi}{L}$ és $F_L(\lambda) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-L}^{L} f(t)\cos(\lambda(x-t))\,dt$. Mivel $\int\limits_{-L}^{L}|f(t)|dt$ létezik, ezért az első tag (3.40)-ben tart a nullához, amint $L\to\infty$. Vagyis nagy L-re körülbelül:

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} F_L(\lambda_k).$$

Ez pedig nagyon hasonlít az $\int\limits_0^{\infty} F_L(\lambda)d\lambda$ közelítő összegére. Ezért kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda=0}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda(x-t))\,dt d\lambda.$$

Mivel $\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda(x-t))\,dt$ egy páros függvénye λ-nak:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda(x-t))\,dt d\lambda. \tag{3.41}$$

Hasonló okokból (Cauchy-féle főérték értelemben):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda(x-t))\,dt d\lambda = 0. \tag{3.42}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-N}^{N}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda(x-t))\,dt\,d\lambda = 0.$$

Nevezetesen, a

$$\lambda \to \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda(x-t))\,dt$$

függvény (λ-ban) páratlan függvény, ezért minden olyan tartományon, amely szimmetrikus az origóra, ezen függvény integrálja egyenlő nullával. Az ún. Euler-formula szerint

$$\mathrm{e}^{iy} = \cos(y) + i\sin(y),$$

ahol i az imaginárius egység, vagyis $i = \sqrt{-1}$. Alkalmazzuk ezt $y = \lambda(x-t)$-re abban az egyenletben, amit úgy kapunk, hogy az (3.41)-hez hozzáadjuk az (3.42)-egyenlet i-szeresét. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{i\lambda(x-t)}dt d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt \cdot \mathrm{e}^{i\lambda x}d\lambda. \end{aligned}$$

A fenti képletben a szürke függvényt, vagyis a

$$F[f](\lambda) := \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\lambda t}dt$$

függvényt az f függvény **Fourier-transzformáltjának** hívjuk.

A Fourier-transzformált tulajdonságai:

(a) $F[f](\lambda)$ korlátos, folytonos függvény az $\mathbb{R}$-en.

(b) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} F[f](\lambda) = 0$.

(c) Ha f' folytonos és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,dx < \infty$, akkor $F[f'](\lambda) = i\lambda F[f](\lambda)$, és így $\forall n$-re $F\left[f^{(n)}\right](\lambda) = (i\lambda)^n F[f](\lambda)$ teljesül, ha $f^{(n)}$ folytonos, és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\,dx < \infty$.

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos (ez nem feltétlenül szükséges, most csak azért tesszük fel, mert Lebesgue-integrált még nem használtunk), továbbá $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. Az $f(x)$ *Fourier-transzformáltja:* $F[f](\lambda) = g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\lambda t}dt$.

3.3.3. Hővezetés végtelen hosszú rúdban

Ebben a fejezetben követjük a [3, 8. fejezet] gondolatmenetét. Az egyszerűség kedvéért legyen $u'_t = ku''_{xx}$, ahol $k = 1$, így

$$\begin{array}{ll} u'_t = u''_{xx} & -\infty < x < \infty \text{ és } t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & \end{array}.$$

Tegyük fel, hogy a $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx$ és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f''(x)|\,dx$ improprius integrálok mind léteznek $\left(f \in C^2(\mathbf{R})\right)$. A feladat megoldását azon $u(x,t)$ függvények körében keressük, melyekre $u \in C^2$ és

(i) $\forall x \in \mathbf{R}$-re $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u'_x(x,t)|\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u''_{xx}(x,t)|\,dx < \infty$.

(ii) Az $u_t(x,t)$ függvénynek minden $[0,r]$ intervallumon van egy (t-től független) integrálható majoránsa, $g(x)$, azaz $|u_t(x,t)| \leq g(x)$ és $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx < \infty$.

Megoldás:

Vegyük az $u_t' = u_{xx}''$ mindkét oldalának x-szerinti Fourier-transzformáltját: $v(\lambda,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\lambda x} dx = F[u]$. Ezzel

$$F\left[u_t'\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\lambda x} dx = v_t'(\lambda,t);$$

ehhez kellett a fenti (ii) feltétel az $u(x,t)$-re. Mivel $F[u_{xx}''] = -\lambda^2 v(\lambda,t)$, így megkapjuk $\forall\lambda$-ra a t változót tartalmazó *közönséges differenciálegyenletet* (a t változóban) és a kezdeti feltételt:

$$\left.\begin{aligned} v_t'(\lambda,t) &= -\lambda^2 v(\lambda,t) \\ v(\lambda,0) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx \end{aligned}\right\}$$

Ezen Cauchy feladat megoldása: (miként azt az A3 tárgyban tanulták):

$$v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx = e^{-\lambda^2 t} F[f](\lambda).$$

Előző tanulmányainkból (A2) tudjuk, hogy $F\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$. Az $a = \frac{1}{4a}$ helyettesítéssel kapjuk a következőt:

$$F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda) = e^{-\lambda^2 t}.$$

Ezt felhasználva, a $v(\lambda,t) = e^{-\lambda^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx = e^{-\lambda^2 t} F[f](\lambda)$ számolásánál adódik a következő:

$$F[u](\lambda) = v(\lambda,t) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\right](\lambda) F[f](\lambda) = F\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} * f(x)\right],$$

ahol *konvolúció* $[h*g](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u)\, g(x-u)\, du$.

Tehát

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty} e^{-\frac{v^2}{4t}} f(x-v)\, dv.$$

Tehát a Fourier-transzformált segítségével a parciális differenciálegyenlet megoldását közönséges differenciálegyenlet megoldására vetettük vissza.

3.4. Laplace-egyenlet

Ebben a fejezetben a a [2, 10.8. fejezet] módszerét követjük, ahol további érdekes példák találhatók. A hővezetés egyenlete a síkon:

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}). \tag{3.43}$$

Ha létezik egyensúlyi állapot, vagyis olyan helyzet amihez a hőmérséklet-eloszlás tart, amikor $t \to \infty$, akkor az egy olyan $u(x,y)$ függvény, amely nem függ az időtől, tehát erre az egyensúlyi állapotra $u_t \equiv 0$ teljesül. Ekkor viszont (3.43)-ből

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.44}$$

Ezt az egyenletet hívjuk Laplace-egyenletnek és, mivel a fizikában számtalanszor előfordul, ezért van egy másik neve is. Nevezetesen a (p23) egyenletet **potenciálegyenletnek** is hívják. Mivel ebben az egyenletben nincs időtől függés, ezért nincs is értelme kezdeti feltételről beszélni. Kerületi feltételre ellenben szükség van. Vagyis olyan feltételre, amikor azon tartománynak a határán, amin az egyenletet vizsgáljuk, előírjuk a függvény bizonyos típusú viselkedését. Ez két féle lehet:

1. Ha a tartomány határán az $u(x,y)$ értékeit írjuk elő, akkor **Dirichlet-problémát** oldunk meg.
2. Ha a tartomány határára merőleges deriváltat írjuk elő, akkor **Neumenn-problémáról** beszélünk.

Ha a tartomány határa és ezen kerületi feltételek közül bármelyik bizonyos (nem túl szigorú) feltételeknek megfelel, akkor a (2.18) egyenletnek és ezen kerületi feltételnek eleget tevő megoldása létezik, és a megoldás egyértelmű.

3.4.1. Dirichlet-probléma téglalapon

Adott a következő téglalap:

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le a \text{ és } 0 \le y \le b\} = [0,a] \times [0,b].$$

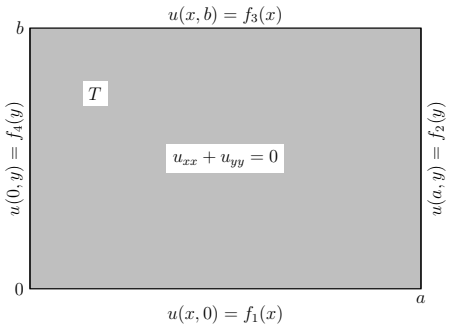
Ebben a fejezetben a (3.44)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in T.$$

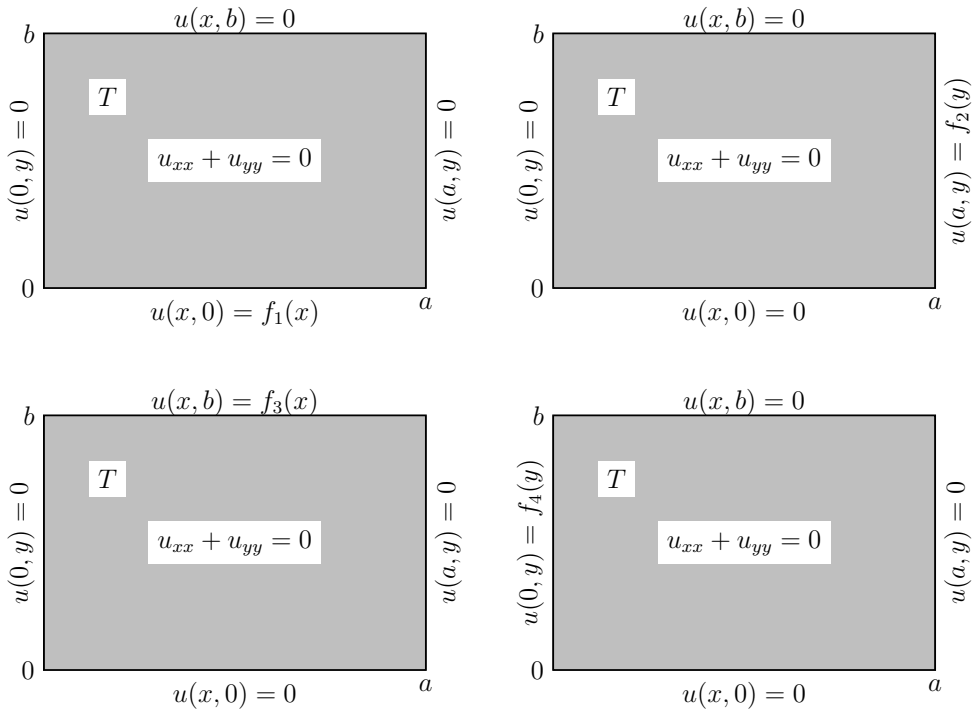
egyenletet akarjuk megoldani azzal a feltétellel, hogy az $u(x,y)$ függvény értékei a T téglalap határán elő vannak írva (l. 3.11 ábra)

Vagyis

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u(x,0) = f_1(x) & 0 < x < a \\ u(a,y) = f_2(y) & 0 < y < b \\ u(x,b) = f_3(x) & 0 < x < a \\ u(0,y) = f_4(y) & 0 < y < b \end{cases}. \tag{3.45}$$



3.11. ábra. Dirichlet-probléma téglalapon



3.12. ábra.

Ezt a problémát megoldhatjuk úgy, hogy megoldunk négy egyszerűbb problémát. Nevezetesen, tekintjük azt a négy esetet, amikor a keresett függvény a téglalap valamely három oldalán nulla, vagyis csak az egyik oldalon nullától különböző. A 3.12 ábrán látható ez a négy probléma. Megoldjuk ezen négy problémát, és az így kapott megoldások összege adja a (3.45) probléma megoldását. Tehát itt most elég ha megmutatjuk, hogyan kell a (3.45) egyenletet megoldani, amikor a téglalap három oldalán a keresett függvény nulla. Például megoldjuk a 3.12 ábra jobb felső rész ábrájának megfelelő egyenletet:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=0 & 0<x<a \\ u(a,y)=f_2(y) & 0<y<b \\ u(x,b)=0 & 0<x<a \\ u(0,y)=0 & 0<y<b \end{cases}. \tag{3.46}$$

A megoldás a változÓk szétválasztásának korábban már kétszer is látott módszerével történik, a tiszta szinuszos Fourier-sorfejtés alkalmazásával pontosan ugyanazt a gondolat menetet követve, mint a 3.2.1 fejezetben. Itt most nem részletezzük a levezetést. Az érdeklődő olvasó megtalálja a [2, 641. lapon]. A (3.46) probléma megoldása tehát

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{3.47}$$

ahol

$$b_n=\frac{2}{b\cdot\sinh\left(n\pi\frac{a}{b}\right)}\int_{y=0}^{b} f_2(y)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)dy. \tag{3.48}$$

Az x és y változókat (tehát az a és b-t is) felcserélve kapjuk, hogy az

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=0 & 0<x<a \\ u(a,y)=0 & 0<y<b \\ u(x,b)=f_3(x) & 0<x<a \\ u(0,y)=0 & 0<y<b \end{cases} \tag{3.49}$$

probléma megoldása:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right), \tag{3.50}$$

ahol

$$c_n=\frac{2}{a\cdot\sinh\left(n\pi\frac{b}{a}\right)}\int_{x=0}^{a} f_3(x)\sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)dx.$$

Hasonló levezetés eredményeként adódik, hogy a

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x) & 0<x<a \\ u(a,y)=0 & 0<y<b \\ u(x,b)=0 & 0<x<a \\ u(0,y)=0 & 0<y<b \end{cases} \tag{3.51}$$

probléma megoldása:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \tag{3.52}$$

ahol

$$a_n = \frac{2}{a\sinh\left(n\pi\frac{b}{a}\right)} \int_{x=0}^{a} f_1(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx. \tag{3.53}$$

Az x, y és az a, b cseréjével kapjuk, hogy a

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < a \\ u(a,y) = 0 & 0 < y < b \\ u(x,b) = 0 & 0 < x < a \\ u(0,y) = f_4(y) & 0 < y < b \end{cases} \tag{3.54}$$

probléma megoldása:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{3.55}$$

ahol

$$d_n = \frac{2}{b\sinh\left(n\pi\frac{a}{b}\right)} \int_{y=0}^{b} f_4(y) \sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right) dy. \tag{3.56}$$

Tehát a (3.45) probléma megoldását megkapjuk, mint a (3.47),(3.50),(3.52) és (3.55) formulákban adott függvények összegét.

4. fejezet

Vektoranalízis

4.1. Vektorterek

38. PÉLDA Forgassuk a teret a z tengely körül ω szögsebességgel! (Ez $\frac{\omega}{2\pi}$ körülfordulást jelent másodpercenként.)
Ekkor a tér egy P pontjának a pályája egy xy-síkkal párhuzamos kör. Ha $\vec{F}(P)$ a P pont sebességvektora, akkor amint a fizikában tanultuk:$F(x,y,z) = (-\omega y, \omega x, 0)$, ha $P(x,y,z)$. Ez egy úgynevezett *vektorteret* definiál. Vagyis a tér minden egyes (x,y,z) pontjához hozzárendelünk egy vektort az $(x,y,z) \to (-\omega x, \omega y, 0)$ szabállyal.

39. PÉLDA Legyen $f(x,y,z) = xyz$ (vagyis f:$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$). Ez NEM vektortér, hiszen az f a tér minden pontjának egy számot, (xyz)-t feleltet meg. Az ilyen függvényeket *skalártérnek* is hívjuk. Azonban a $grad(f)$ már egy vektortér, hiszen $grad(f) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Nevezetesen $grad(f)(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Az $\vec{F} = grad(f)$ (ahol $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$) alakú vektortereket *gradiens vektortereknek* hívjuk.

A továbbiakban gyakran használjuk az

$$\mathbf{r} = (x,y,z) \tag{4.1}$$

jelölést, azaz $\mathbf{r}$ jelenti az általános (x,y,z) pont helyvektorát. Ezt azért vezetjük be, hogy bizonyos vektorterek felírása egyszerűbb legyen. Az $\mathbf{r}$ hosszát r-rel jelöljük. Tehát

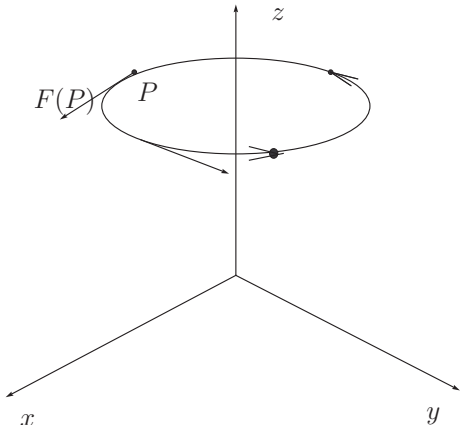
$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Legyen P egy egységnyi tömegű pont, melynek koordinátái (x,y,z) és az origóban a Föld középpontja, M legyen. Határozzuk meg azt az $\vec{F}(P)$ erőt, amellyel az M vonzza a P-t.

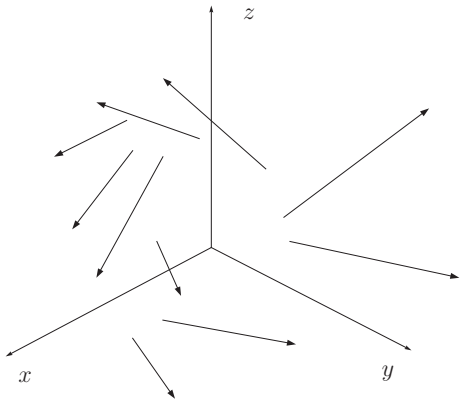
Newton törvénye szerint $\vec{F}(P)$ iránya a $\overrightarrow{PM}$ iránya és az $\vec{F}(P)$ hossza fordítva arányos r^2-tel. Ebből $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, következik, ahol $k > 0$. Vagyis

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

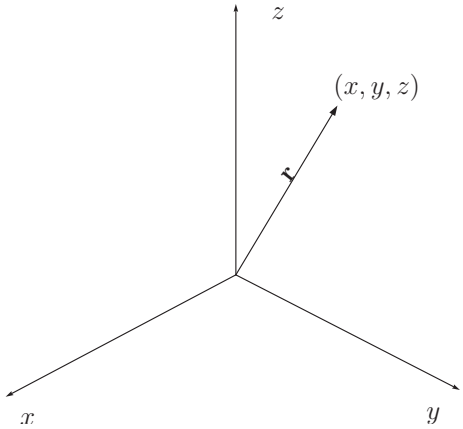
Az ilyen vektortereket erőtereknek is hívhatjuk.



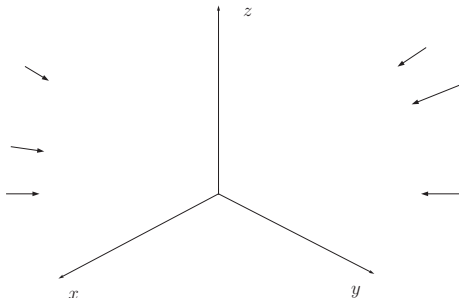
4.1. ábra. z-tengely körüli forgatás



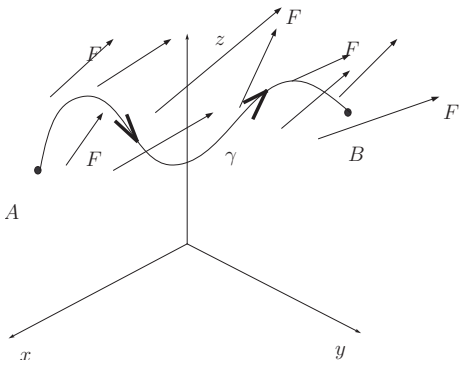
4.2. ábra. Egy általános vektortér



4.3. ábra. Az $\mathbf{r}(x,y,z) := (x,y,z)$ vektortér



4.4. ábra.



4.5. ábra.

Fordítva: Ha adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektortér, akkor ezt felfoghatjuk, mint egy térben áramló folyadék sebességterét vagy mint valamiféle erőteret. Ez segíti a szemléletet, mert ennek a vektoranalízis fejezetnek minden része fizikai indíttatású.

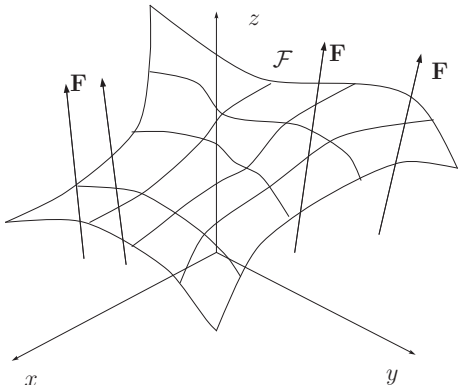
Két alapkérdést fogunk megválaszolni:

1. Kérdés: Adott egy γ irányított görbe a térben és egy erőtér, $\vec{F}$. Hogyan számolhatjuk ki a γ-án futó pontnak az erőtér ellenében végzett munkáját? (Vagy a ponton az erőtér által végzett munkát?)
2. Kérdés: Adott egy $\vec{F}$-sebességtér szerint áramló folyadék (időben állandó). Kérdés: Mekkora egy $\mathscr{F}$ felületen időegység alatt átáramló folyadék térfogata?

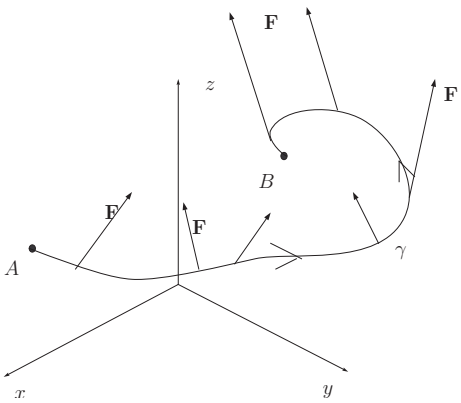
Ezt a térfogatot definíció szerint az $\vec{F}$-nek a $\mathscr{F}$-re vonatkozó *fluxusának* hívjuk.
A fenti *1. kérdésre* a vonalmenti integrál, míg a *2. kérdésre* a felületmenti integrál segítségével adjuk meg a választ.

4.2. Vonalmenti integrál

Adott egy γ irányított görbe, melynek paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ és $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. (Minden komponensfüggvény minden parciális deriváltja létezik, és kétszer



4.6. ábra.



4.7. ábra.

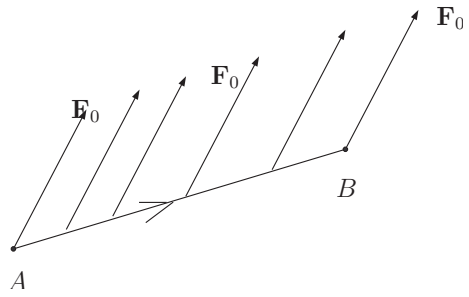
folytonosan deriválható a γ egy környezetében.) Ezek a feltételek a „Vonalmenti integrál” fejezetben mindig teljesülnek.

22. DEFINÍCIÓ *Az $\vec{F}$ erőtér által a γ-án A-ból B-be mozgó ponton végzett munkát vonalmenti integrálnak nevezzük (pontosabban az $\vec{F}$ vonalmenti integráljának a γ-án. Jele:* $\int\limits_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$.

Tehát a matematikában a *vonalmenti integrál* az a mennyiség, ami a fizikában tanult *munka* fogalmának felel meg.

Hogyan számoljuk ki a munkát?

Munka = (elmozdulás irányába eső erő)·(elmozdulás).
Első lépés: Tegyük fel először, hogy a γ görbe egy *egyenes AB* szakasz, az $\vec{F}$ erőtér pedig minden pontban egy *konstans* $\vec{F}_0$ erő.
Ekkor az $\vec{F}_0$-nak az $\overrightarrow{AB}$ irányába eső merőleges vetületvektora: $\vec{F}_0 \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. Ez az elmozdulás



4.8. ábra.

irányába eső erő, szorozva az elmozdulással: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$-vel, adja a munkát, ami

$$W = \vec{F}_0 \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \vec{F}_0 \overrightarrow{AB}.$$

Második lépés: A munka kiszámítása általános γ görbe és általános $\vec{F}$ vektortér esetén:

Ezt a problémát az első lépésben tárgyalt esetre visszavezetve oldjuk meg. Felosztjuk a γ görbe $[a,b]$ paraméter-intervallumát n részre, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ úgy, hogy $\max\limits_{1 \le i \le n} \{t_i - t_{i-1}\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ teljesüljön.

Minden $1 \le i \le n$ -re legyen P_i az a pont, melynek helyvektora $\mathbf{r}(t_i)$. A γ görbének a (P_{i-1}, P_i) ívét a $\triangle\mathbf{r}_i = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ vektorral helyettesítjük. Ezen a $\triangle\mathbf{r}_i$ szakaszon alkalmazva az első pont eredményét $\triangle\mathbf{r}_i \cdot \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))$ a végzett munka közelítőleg, ha az $\vec{F}$-et konstansnak tekintjük a $\triangle\mathbf{r}_i$-n. Tehát nagy n-re a t_{i-1}, t_i paraméterekhez tartozó $\mathbf{r}(t_{i-1}), \mathbf{r}(t_i)$ íven végzett munka közelítőleg: $\vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))[\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})] \approx \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$. Ezeket összegezve a munka:

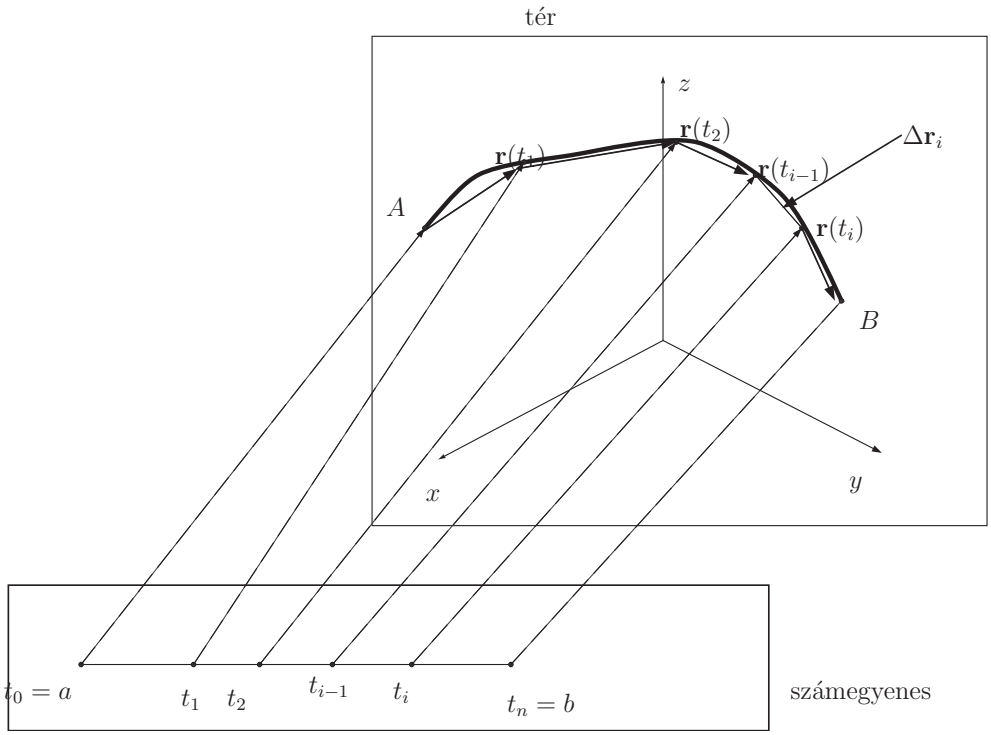
$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))\dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ vonalmenti integrált a következőképpen számíthatjuk ki:

24. TÉTEL

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt}$$

40. PÉLDA Legyen $\vec{F}(x,y,z) = (x, yz, y)$ és γ paraméterezése: $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ $0 \le t \le 1$ (l.



4.9. ábra.

4.10 ábra). Ekkor

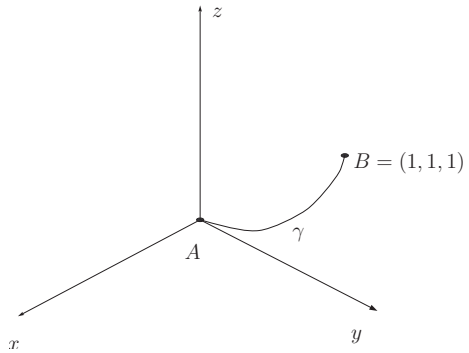
$$\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int_0^1 \underbrace{\left(t, t^5, t^2\right)}_{\vec{F}(\mathbf{r}(t))} \underbrace{\left(1, 2t, 3t^2\right)}_{\dot{\mathbf{r}}(t)} dt = \int_0^1 \left(t + 2t^6 + 3t^4\right) dt = \\ = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{2}{7}t^7 + \frac{3}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{97}{70}. \tag{4.2}$$

A megoldás folyamán először lokalizáltuk az $\vec{F}$-et a γ-ra, $\vec{F}(\mathbf{r}(t))$-t kiszámoltuk. Ez úgy történik, hogy az $\vec{F}(x,y,z) = (x, yz, y)$ képletében a jobb oldalon $\forall x$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ első komponensfüggvényét, t-t írjuk, $\forall y$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ második komponensfüggvényét, t^2-t írjuk, $\forall z$ helyébe az $\mathbf{r}(t)$ harmadik komponensfüggvényét, t^3-t írjuk.

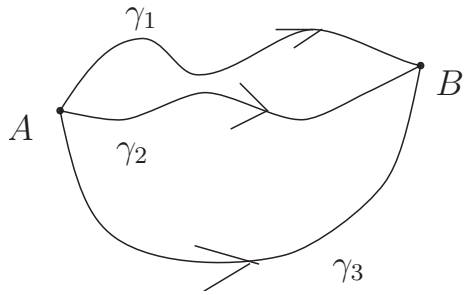
$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(t, t^2 \cdot t^3, t^2\right)$, majd az $\dot{\mathbf{r}}(t)$-t kiszámítjuk: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right)$. Ezután meghatározzuk az $\vec{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$ skaláris szorzatot, ami egy t-től függő valós értékű függvény, és ezt a szokásos módon kiintegráljuk az $[a,b]$-n.

4.2.1. Vonalintegrál függetlensége az úttól

A kérdés az, hogy milyen feltételek esetén lesz igaz, hogy rögzített A és B pontok esetén az A és B-t összekötő bármely két görbére az $\vec{F}$ vektortér vonalmenti integrálja megegyezik,



4.10. ábra.



4.11. ábra.

vagyis a munka független az úttól, csak az erőtértől és az elmozdulás A és B végpontjaitól függ?

23. DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy egy $\vec{F}$ vektortér* konzervatív, *ha az $\vec{F}$ gradiens vektortér. Vagyis $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ valamely $f : H \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvényre, ekkor az f függvény az $\vec{F}$ vektortér* potenciálfüggvénye.

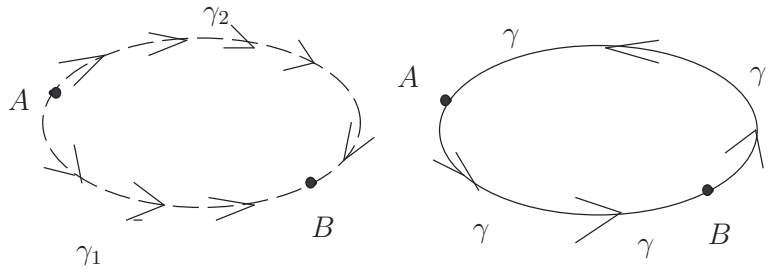
24. DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy* az $\vec{F}$ vektortér vonalmenti integrálja független az úttól, *ha bármely A és B pontokra és ezeket összekötő bármely két γ_1, γ_2 irányított egyszerű görbeívekre, melyek kezdőpontja A és végpontja B*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \tag{4.3}$$

teljesül feltéve, hogy a γ_1 és γ_2 végig az $\vec{F}$ értelmezési tartományában halad.

3. MEGJEGYZÉS Vegyük észre, ha az $\vec{F}$ vonalmenti integrálja független az úttól, akkor $\forall$ zárt γ görbére $\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 0$, hiszen $\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 0$.

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy találjunk olyan feltételt, amely segít annak eldöntésében, hogy egy adott vektortér vonalintegrálja független-e az úttól. Ehhez nélkülözhetetlen



4.12. ábra.

a következő fogalom bevezetése és annak tanulmányozása:

25. DEFINÍCIÓ *curl* $\left(\vec{F}\right)$ *vagy rot* $\left(\vec{F}\right)$ *definíciója:*

(a) *Ha* $\vec{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ *egy síkbeli vektortér, akkor – ha* $\vec{F}=(F_1,F_2)$ *– az* $\vec{F}$ *rotációja:* $rot\left(\vec{F}\right)=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F1}{\partial y}$. *Néha azt írjuk, hogy* curl $\left(\vec{F}\right)$ *a rot* $\left(\vec{F}\right)$ *helyett. A curl* $\left(\vec{F}\right)$ *vagy rot* $\left(\vec{F}\right)$ *(ugyanazt jelentik) értéke tehát síkbeli vektortér esetén egy valós szám.*

(b) *Ha* $\vec{F}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *egy térbeli vektortér, akkor – ha* $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ *– a curl* $\left(\vec{F}\right)=rot\left(\vec{F}\right)$ *egy vektor:*

$$curl\left(\vec{F}\right)=rot\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z};\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x};\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

41. PÉLDA A z tengely körül ω szögsebességgel való forgás sebességtere: $\vec{F}(x,y,z)=(-\omega y,\omega x,0)$. Ennek rotációja:

$$rot\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=(0,0,2\omega),$$

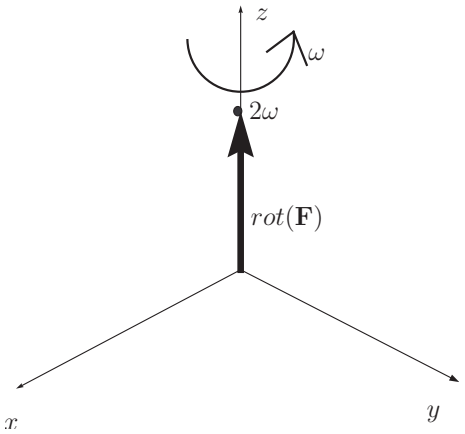
tehát a z tengellyel párhuzamos és felfelé mutató 2ω hosszú vektor.

42. PÉLDA $\vec{F}(\mathbf{r})=\frac{-k\mathbf{r}}{r^3}$ a gravitációs vektortér, ahol $k>0$ valós szám. Kérdés a *curl* $\left(\vec{F}\right)$ értéke.

Megoldás:

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-kx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-ky}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-kz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$rot\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{-kx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-ky}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-kz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{vmatrix}$$



4.13. ábra.

$$3\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right)k\,(yz-yz,\ -xz+zx,\ xy-xy)\equiv(0,0,0)=\mathbf{0}.$$

Diszkutálva a fenti két példát látható, hogy a rotáció az örvényléssel kapcsolatos, hiszen a gravitációs vektortérnél a második példában minden vektor az origó felé mutat. Itt nincs örvénylés, ezért a $rot\left(\vec{F}\right)=\mathbf{0}$. Míg a forgómozgást leíró első példabeli vektortér rotációja nem tűnik el sehol sem.

43. PÉLDA $\vec{F}(x,y)=(-\omega y,\omega x)$, ez az ω szögsebességű origó körüli forgás sebességtere az xy síkban. $curl\left(\vec{F}\right)=\omega+\omega=2\omega$.

44. PÉLDA Legyen $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható függvény és $\vec{F}=grad\ (f)$. Ekkor

$$rot\left(\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f'_x & f'_y & f'_z\end{vmatrix}=\left(\underbrace{f''_{zy}-f''_{yz}}_{0},\underbrace{f''_{xz}-f''_{zx}}_{0},\underbrace{f''_{yx}-f''_{xy}}_{0}\right)=\mathbf{0},$$

mivel a vegyes parciális deriváltaknál a deriválás sorrendje felcserélhető. Tehát azt a nagyon fontos megállapítást tettük, hogy konzervatív (gradiens) vektortér rotációja MINDIG azonosan a ZÉRUSVEKTOR!

25. TÉTEL *Egy $\vec{F}$ vektortér vonalmenti integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha $\vec{F}$ konzervatív.*

Tehát a fő problémánk az, hogy megtaláljuk azon vektortereket, melyek vonalmenti integrálja független az úttól. Ez megoldódik, ha megtaláljuk a konzervatív vektortereket. Maradt tehát a következő kérdés:

Adott egy $\vec{F}$ vektortér. Hogyan döntjük el, hogy konzervatív-e?

A választ a curl-teszt adja. A válasz nem „akkor és csak akkor” típusú, hanem elégséges, de nem szükséges feltételt ad. Az itteni curl-tesztnél létezik erősebb állítás, amely viszont egy bonyolultabb fogalmat tartalmaz, nevezetesen az egyszeresen összefüggő halmaz fogalmát.

4.2.2. Curl-teszt a síkban

Adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ síkbeli vektortér, $\vec{F} = (F_1, F_2)$.

I. Ha a *curl* $\left(\vec{F}\right)$ akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor $\vec{F}$ NEM konzervatív.

II. Tegyük fel, hogy *curl* $\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$.

A eset: Az $\vec{F}$ minden komponensfüggvényének parciális deriváltja: $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial y}$ a sík MINDEN pontjában definiálva van. Ekkor az $\vec{F}$ *konzervatív.*

B eset: Van olyan pont, amelyben legalább az egyik parciális derivált nem definiált. Ekkor a teszt nem mond semmit, tehát ekkor a curl-teszt inconclusive (hatástalan, nem mond semmit). Lehet, hogy az $\vec{F}$ konzervatív, de az is lehet, hogy nem.

4.2.3. Curl-teszt a térben

Adott egy $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vektortér a térben, $\vec{F} = (F_{1,} F_2, F_3)$.

I. Ha a *curl* $\left(\vec{F}\right)$ akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor az $\vec{F}$ NEM konzervatív.

II. Tegyük fel, hogy *curl* $\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$.

A eset: Ha mind a kilenc parciális derivált: $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial F_3}{\partial z}$ értelmezve van minden pontban, *kivéve esetleg véges sok pontot,* akkor az $\vec{F}$ *konzervatív.*

B eset: Ha a fenti kilenc parciális derivált közül legalább egy nincs értelmezve végtelen sok pontban, akkor a curl-teszt inconclusive, tehát az is lehet, hogy az $\vec{F}$ konzervatív, de az is, hogy nem. A curl-teszttel ezt nem tudjuk eldönteni.

45. PÉLDA Legyen $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Ekkor $\vec{F}$ egy síkbeli vektortér. *curl* $\left(\vec{F}\right) = \mathbf{0}$, de $\vec{F}$ nincs értelmezve az origóban, így a II/B eset áll fenn, vagyis a curl-teszt inconclusive.

46. PÉLDA $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Már beláttuk, hogy *curl* $\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$. Az egyetlen pont, ahol $\vec{F}$ nincs értelmezve, az origó. Az összes többi pontban mind $\vec{F}$, mind a kilenc parciális derivált értelmezve van, így az $\vec{F}$ konzervatív.

4.2.4. Potenciálfüggvény meghatározása

Ha $\vec{F}$ egy konzervatív vektortér, akkor van potenciálfüggvénye, vagyis létezik $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, amire $\vec{F} = grad\ (f)$. A potenciálfüggvény meghatározását egy konkrét példán mutatjuk be.

47. PÉLDA $\vec{F}(x,y,z) = (1+4y+5z,\ 2+4x,\ 3+5x)$. Ekkor

$$curl\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1+4y+5z & 2+4x & 3+5z \end{vmatrix} \equiv (0,0,0) \equiv \mathbf{0}.$$

Másrészt az összes parciális derivált mindenütt értelmezett, így az $\vec{F}$ konzervatív a curl-teszt szerint. Tudjuk, hogy $f'_x = 1+4y+5z \Rightarrow f(x,y,z) = \int (1+4y+5z)\,dx + g(y,z) = x+4xy+5xz+g(y,z)$. Másrészt

$$f'_y = 2+4x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x+4xy+5xz+g(y,z)) = 4x+g'_y(x,y),$$

vagyis

$$4x+g'_y(y,z) = 2+4x \Rightarrow g'_y(y,z) = 2 \Rightarrow g(y,z) = 2y+h(z).$$

Tehát

$$f(x,y,z) = x+4xy+5xz+2y+h(z).$$

Így, mivel

$$f'_z = 3+5x \Rightarrow 5x+h'(z) = 3+5x \Rightarrow h'(z) = 3 \Rightarrow h(z) = 3z+c,$$

ezért

$$f(x,y,z) = x+4xy+5xz+2y+3z+c.$$

(Az előző feladatot találgatással is megoldhattuk volna.)

48. PÉLDA $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}; -4\right)$. Kérdés, hogy konzervatív-e $\vec{F}$?

Megoldás: $curl\left(\vec{F}\right) \equiv \mathbf{0}$, ez triviális! Azonban az $\vec{F}$ nem definiált a z tengely pontjaiban, tehát végtelen sok pontban, így a II/B eset áll fent, a curl-teszt tehát nem segít! Legyen γ az $x^2+y^2 = 1$ és $z = 12$ kör, amely a pozitív irányba irányított. Számítsuk ki $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ értékét! Ha kiderül, hogy $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \neq 0$, akkor ebből adódik, hogy $\vec{F}$ nem konzervatív. Tanultuk ugyanis (l. 3. Megjegyzés), hogy konzervatív vektorterek zárt görbén vett vonalmenti integrálja zérus. A γ paraméterezése: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) \equiv 12$ és $0 \le t \le 2\pi$; vagyis: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 12)$. Tehát: $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left(\frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, -4\right)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$. $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$. Tehát $\int\limits_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \neq 0$, így az $\vec{F}$ nem konzervatív.

A következő tétel azt mutatja, hogy konzervatív vektortér esetén két pont közötti elmozdulás során végzett munka a pontenciálfüggvény ezen pontokban vett értékeinek a különbsége.

26. TÉTEL *Legyen $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy minden pontban értelmezett gradiens vektortér. Nevezzük az $\vec{F}$ potenciálfüggvényét f-nek. Tehát $\vec{F} = grad(f)$. Legyen γ egy görbe, melynek kezdőpontja A és végpontja B. Ekkor*

$$\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

BIZONYÍTÁS Legyen a γ egy paraméterezése $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. Tekintsük a

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

függvényt. Mivel ez egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, alkalmazhatjuk rá a Newton–Leibniz-tételt. Felhasználva, hogy

$$g'(t) = grad(f)(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t),$$

$$f(B) - f(A) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}(t) = \int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

49. PÉLDA Legyen a γ görbe adva az $\mathbf{r}(t) = \left(t,\ 2t^3,\ 3t^2\right)$ paraméterezéssel, ahol $0 \le t \le 1$,. Számítsuk ki az $\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ értékét, ha

$$\vec{F}(x,y,z) = grad(e^{x+y+z+1})!$$

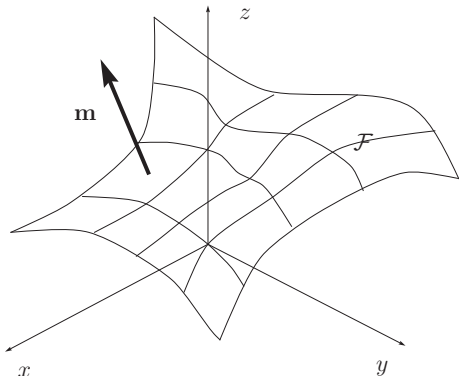
Megoldás: A γ görbe az origót köti össze az $A(1,2,3)$ ponttal, és az $\vec{F}$ potenciálfüggvénye: $f(x,y,z) = e^{x+y+z+1}$. Tehát

$$\int_\gamma \vec{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = f(1,2,3) - f(0,0,0) = e^7 - e.$$

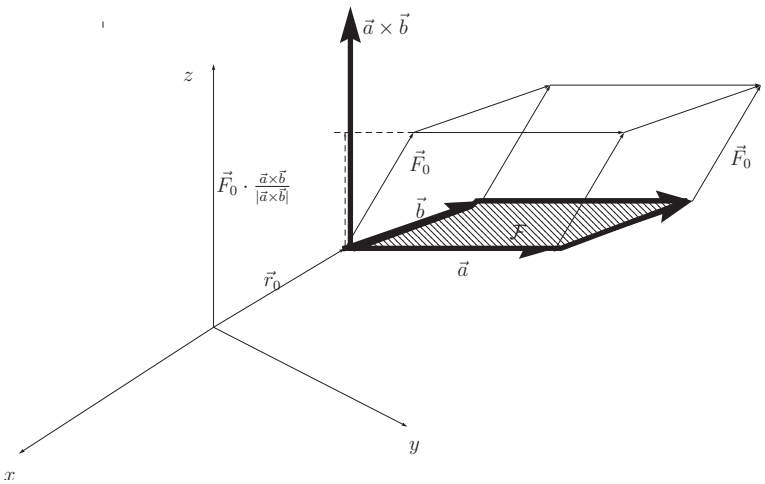
4.3. Felületmenti integrál

Legyen $\mathscr{F}$ egy elemi felület és $\mathbf{r} : T \to \mathbf{R}^3$ egy paraméterezése $\mathscr{F}$-nek. Legyen továbbá $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ egy vektortér, ami legalább kétszer folytonosan differenciálható. Képzeljük el, hogy egy folyadék úgy áramlik, hogy a tér bármely P pontjában $\vec{F}(P)$ a folyadék sebessége minden időpontban. Az $\mathscr{F}$ felületet irányíthatjuk vagy az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$, vagy a $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ normálvektorral. Ezáltal a felület irányított felületté válik.

A felület irányítását gyakran úgy adjuk meg, hogy azt mondjuk: a felületet irányítsuk a „felfelé mutató normálissal” (amikor az egyáltalán értelmes). Adott tehát egy irányított $\mathscr{F}$ felület, és meg akarjuk határozni az $\mathscr{F}$-en (az irányítás irányában) időegység alatt átfolyó folyadék előjeles térfogatát.



4.14. ábra.



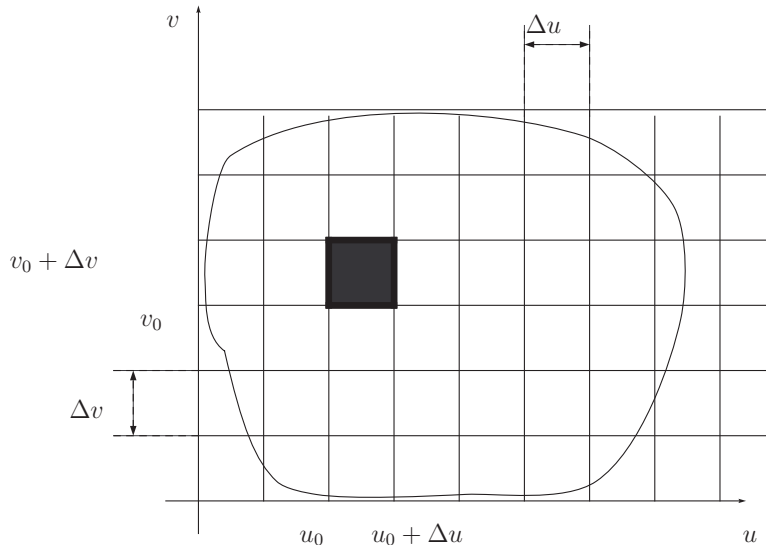
4.15. ábra.

26. DEFINÍCIÓ *Az $\mathscr{F}$-en időegység alatt átfolyó, az $\vec{F}$ sebességtér szerint áramló folyadék térfogatát az $\vec{F}$ vektortér $\mathscr{F}$-re vett* felületmenti integráljának *vagy* fluxusának *hívjuk, és* $\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F}\,d\vec{A}$*-val jelöljük.*
Tehát:
– ha a fluxus pozitív, akkor a felület irányításának irányába több folyadék folyik;
– ha a fluxus negatív, akkor az irányítással ellentétes irányba folyik több folyadék;
– ha a fluxus zérus, akkor ugyanannyi folyadék folyik az irányítással egyező és azzal ellentétes irányba időegység alatt.

Kérdés: Hogyan számolhatjuk ki a fluxust?

1. lépés: Tegyük fel, hogy $\vec{F}$ egy konstans vektortér, $\vec{F} \equiv \vec{F}_0$ és $\mathscr{F}$ egy paralelogramma, melyet az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok feszítenek ki és az $\vec{a}\times\vec{b}$-vel irányított:

Az $\mathscr{F}$ felületen az $\vec{a}\times\vec{b}$ irányába időegység alatt átfolyó folyadék az ábrán látható paralelepipedont tölti ki. Tehát az $\vec{F}$-nek az $\mathscr{F}$-re vonatkozó fluxusa ezen paralelepipedon



4.16. ábra.

térfogata, ami *alapterület* $\times$ *magasság*. Az alapterület: $\mathscr{F}$ területe$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, a magasság: $\vec{F}_0$-nak az $\vec{a}\times\vec{b}$-re vett merőleges vetülete, ami $\vec{F}_0\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$. Ezekből a paralelepipedon térfogata: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\vec{F}_0\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\vec{F}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Vagyis, ha $\vec{F}=\vec{F}_0$ konstans, és $\mathscr{F}$ egy $\vec{a},\vec{b}$ által kifeszített $\vec{a}\times\vec{b}$-vel irányított paralelogramma, akkor $\iint\limits_F \vec{F}d\vec{A}=\vec{F}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

2.lépés: *Fluxus általános $\vec{F}$-re és $\mathscr{F}$-re:*

Az $\mathscr{F}$ felület egy paraméterezése: $\mathbf{r}:T\to\mathscr{F}$. Koordináta-vonalak segítségével kicsiny darabokra, elemi részekre particionáljuk a felületet. Két közelítést alkalmazunk, melyek hatása eltűnik, ha a felület ezen felosztását minden határon túl finomítjuk.

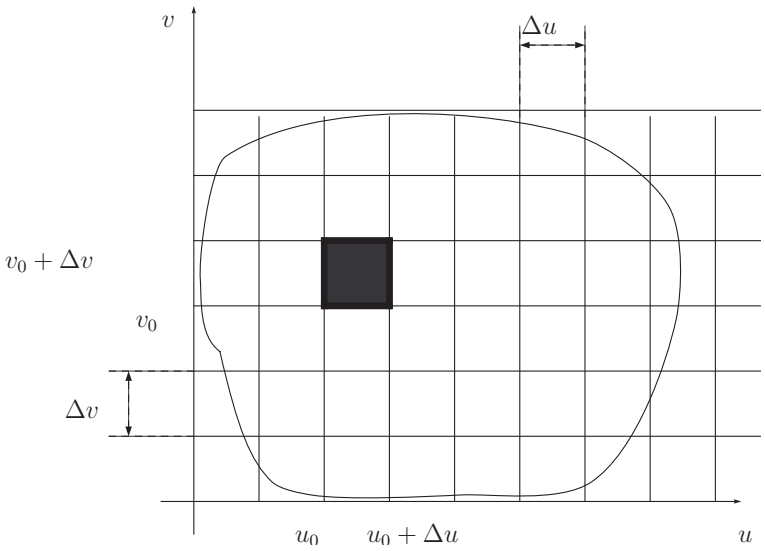
Az első közelítés az, hogy az ábrán feketével satírozott elemi felületdarab helyett az érintő síkban neki megfelelő paralelogrammát tekintünk.

A másik közelítés az, hogy ezen a paralelogrammán az $\vec{F}$-et konstansnak, $\vec{F}\equiv\vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u_0,v_0\right)\right)$-nak vesszük, így alkalmazhatjuk az 1. lépés eredményét. Ha az első ábra elemifelület-darabját kinagyítjuk, akkor ezen az elemifelület-darabon az 1. lépés eredményét alkalmazva látjuk, hogy közelítőleg

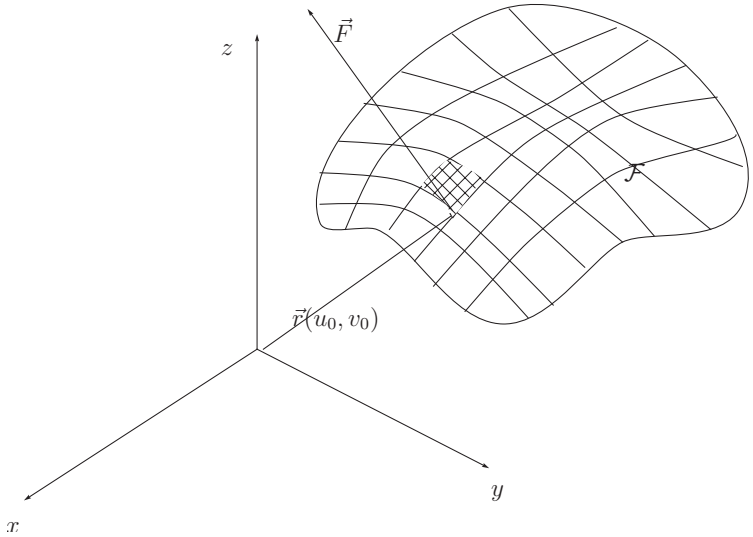
$$\vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u_0,v_0\right)\right)\cdot\left(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right)\triangle u\triangle v. \tag{4.4}$$

A fluxust az egész felületre úgy kapjuk, ha az elemifelület-darabokra vett fluxusokat összegezzük és $\triangle u,\triangle v\to 0$. Vagyis

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathscr{F}}\vec{F}d\vec{A}&=\lim_{\triangle u,\triangle v\to 0}\Sigma\vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u_0,v_0\right)\right)\cdot\left(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\right)\triangle u\triangle v\\&=\iint\limits_T\vec{F}\left(\mathbf{r}\left(u,v\right)\right)\cdot\left(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\right)dudv,\end{aligned} \tag{4.5}$$



4.17. ábra.



4.18. ábra.

feltéve, hogy az $\mathscr{F}$ az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$-vel van irányítva.

Ha az $\mathscr{F}$-et a $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$-vel irányítjuk, akkor

$$\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A} = -\iint\limits_{T} \vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right) dudv.$$

Fontos speciális eset: Ha az $\vec{F}$ vektortérnek a $\mathscr{F}$ felület minden pontjában a felület normálisára eső merőleges vetülete ugyanaz a szám,

$$\vec{F}(p) \cdot \vec{m}(p) \equiv q,$$

akkor

$$\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A} = q \cdot felszín(\mathscr{F}). \tag{4.6}$$

Ez alkalmazható például, ha az $\mathscr{F}$ egy síkidom, és az $\vec{F}$ vektortér konstans.

50. PÉLDA Legyen $\mathscr{F}$ az a felület, melynek egy $T: 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 1$ paraméterezésére $\mathbf{r}(u,v) = \left(u+2v, -v, u^2+3v\right)$ és az $\mathscr{F}$-et a felfelé mutató normálissal irányítjuk. Legyen $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 2x+y, z)$.
Kérdés: $\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A} = ?$

1. lépés: Az $\vec{F}$-et lokalizáljuk az $\mathscr{F}$ felületre, azaz az $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 2x+y, z)$ képlet jobb oldalán található minden x helyébe $u+2v$-t, minden y helyébe $-v$-t és minden z helyébe u^2+3v-t írunk. Így kapjuk, hogy

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) = \left((u+2v)(-v), 2(u+2v)-v, u^2+3v\right).$$

Innen $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) = \left(-uv-2v^2, 2u+3v, u^2+3v\right)$.

2. lépés: Meghatározzuk a normális vektort. Ehhez kiszámítjuk az

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2u\mathbf{i} + (4u-3)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

vektoriális szorzatot. Mivel a $\mathbf{k}$ együtthatója negatív, ezért az $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ lefelé mutat, tehát a keresett normális: $\mathbf{n} = -\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-2u, 3-4u, 1)$.

3. lépés: Kiszámítjuk az $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}$ skalárszorzatot: $\vec{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n} = 2u^2v + 4uv^2 + 6u + 3v - 8u^2 - 4uv + u^2 + 3v$.

4. lépés: $\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A} = \int\limits_{u=0}^{3} \int\limits_{v=0}^{1} 4uv^2 + 2u^2v - 7u^2 + 6v + 6u - 4uvdvdu = \cdots = -21.$

Ez azt jelenti, hogy időegységenként 21 egységgel több folyadék áramlik az $\mathscr{F}$-en keresztül „lefelé”, mint „felfelé”.

51. PÉLDA Legyen $A(1,0,1)$; $B(1,1,1)$; $C(2,0,3)$. Legyen $\mathscr{F}$ az ABC háromszög, és irányítsuk $\mathscr{F}$ -et a „lefelé” mutató normálissal. Legyen továbbá $\vec{F} \equiv (5,4,3)$.
Kérdés: Mivel egyenlő $\iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A}$?

Megoldás: Mivel $\vec{F}$ konstans és $\mathscr{F}$ egy síkidom, így a fluxus az $\vec{F}$-nek a normálisra eső vetülete szorozva a területével. Legyen $\vec{b} = \vec{AB} = (0,1,0)$; $\vec{c} = \vec{AC} = (1,0,2)$,
$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-1)$; mivel az utolsó komponens negatív, ezért $\vec{b} \times \vec{c}$ a megfelelő normálvektor.
Az $\vec{F}$ vetülete a $\vec{b} \times \vec{c}$-re: $\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$. A háromszög területe: $\frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{2}$. Tehát a fluxus: $\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \cdot \frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{2} = \frac{\vec{F} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{2} = \frac{\vec{F}\vec{b}\vec{c}}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} = \iint\limits_{\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{A}$.

4.3.1. Gauss-féle divergenciatétel

27. DEFINÍCIÓ *Legyen* $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. *Az* $\vec{F}$ divergenciája *az* (x,y,z) *pontban:*

$$div\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

ahol $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

52. PÉLDA Legyen $\vec{F}(x,y,z) = \left(xy, y^2 \sin z, z^2 + y\right)$. Ekkor

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \sin z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2 + y\right) = y + 2y \sin z + 2z.$$

A vektortér divergenciája tehát egy valós értékű függvény, vagyis a divergencia egy adott pontban egy szám (ellentétben a rotációval, ami egy vektor). A divergenciát a forráserősség mértékeként szokták használni. Hogy miért, azt a következő tétel mutatja.

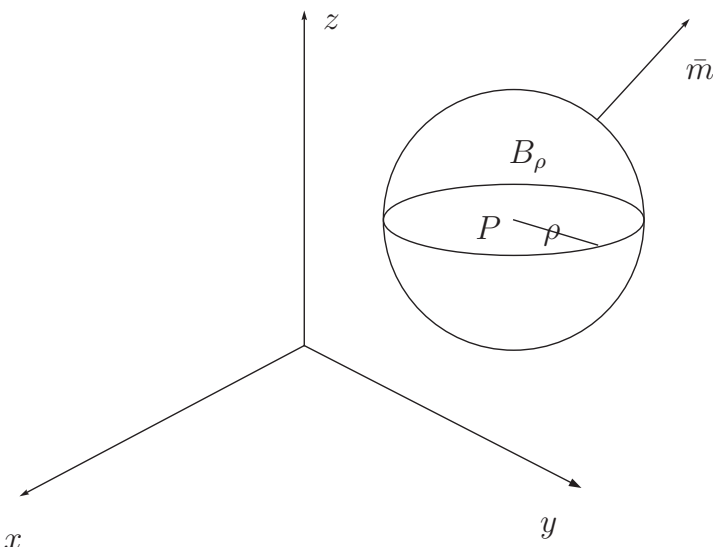
28. DEFINÍCIÓ *Ha K egy test a térben, akkor ∂K-val jelöljük a K határát. Itt mindig feltesszük, hogy ∂K egy irányított felület a* kifelé mutató normálissal.

27. TÉTEL (GAUSS-TÉTEL VAGY DIVERGENCIATÉTEL) *Legyen K egy test a térben. A ∂K-t, a K határát (felületét) a kifelé mutató normálissal irányítjuk. Ekkor:*

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{F} d\vec{A} = \iiint\limits_{K} div\vec{F} dxdydz,$$

ahol az $\vec{F}$ a K minden pontjában értelmezve kell legyen, és $div\vec{F}$ egy valós értékű függvény.

Alkalmazás: Legyen ρ egy nagyon kicsi szám (majd $\rho \to 0$), és a tér egy P pontja körül tekintsük a ρ sugarú B_ρ gömböt.



4.19. ábra.

Ezt írjuk K helyett a fenti tételbe. Irányítsuk a B_ρ-nak a ∂B_ρ felületét a kifelé mutató normálissal. Ekkor, ha ρ nagyon kicsi, feltehető, hogy $div\vec{F}\,|_{B_\rho} \equiv div\vec{F}\,(P)$. (Ezzel kicsi hibát vétünk, ami $\rho \to 0$-ra kiesik!)
Ekkor a Gauss-tétel jobb oldala:

$$\iiint\limits_{B\rho} div\vec{F}dxdydz \approx div\vec{F}\,(P)\cdot térfogat(B_\rho).$$

Tehát a Gauss-tétel szerint

$$\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A} \approx div\vec{F}\,(P)\cdot térfogat(B_\rho),$$

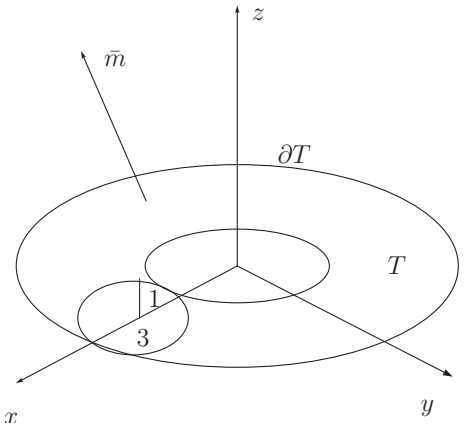
vagyis $div\vec{F}\,(P) \approx \frac{\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A}}{térfogat(B_\rho)}$. Pontosabban

$$div\vec{F}\,(P) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial B_\rho} \vec{F}d\vec{A}}{térfogat(B_\rho)}.$$

Tehát a divergencia a P-ben éppen egy nagyon kicsi gömb felületén időegység alatt kiáramló folyadék térfogata, osztva ezen kicsi gömb térfogatával.

A eset: $div\vec{F}\,(P) < 0$, ekkor több folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy P középpontú kicsike sugarú gömbbe. Ezért a P pont *elnyelő*.

B eset: $div\vec{F}\,(P) > 0$, ekkor egy P körüli kicsiny gömbből több folyadék folyik ki, mint amennyi befolyik, tehát a P pont egy *forrás*.



4.20. ábra.

C eset: $div\vec{F}(P) = 0$, ekkor ugyanannyi folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy P körüli kicsiny gömbből.

53. PÉLDA Legyen T a 4.20 ábrán látható tömör tórusz, melynek ∂T felületét a kifelé mutató normálissal irányítottuk. Legyen

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \text{ és } \vec{G}(x,y,z) = \left(2x+y^2, y+\sin z, z-x^3\right).$$

Határozzuk meg

a) $\iint\limits_{\partial T} \vec{F} d\vec{A}$ és

b) $\iint\limits_{\partial T} \vec{G} d\vec{A}$ értékét!

Megoldás: $div\vec{F} \equiv 0$, $div\vec{G} = 2+1+1 = 4$. Tehát mivel a divergencia mindkét esetben konstans függvény, ezért a Gauss-tételből kapjuk, hogy

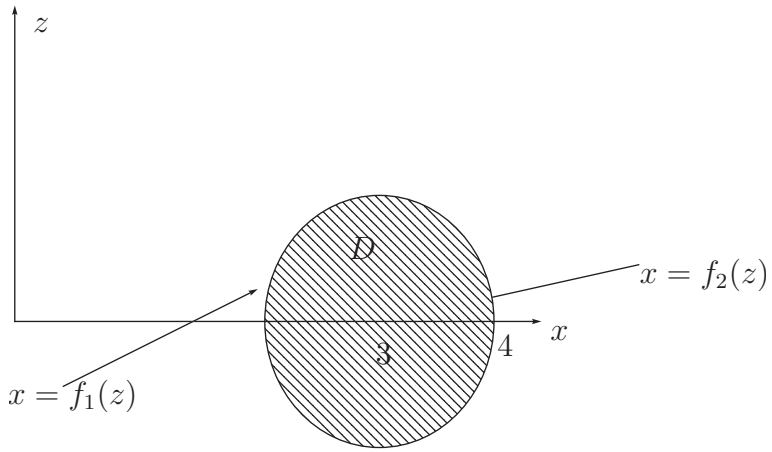
$\iint\limits_{\partial T} \vec{F} d\vec{A} = \iiint\limits_{T} div\vec{F} dxdydz = 0$, ($div\vec{F}$ azonosan nulla)

$\iint\limits_{\partial T} \vec{G} d\vec{A} = \iiint\limits_{T} div\vec{G} dxdydz = 4 \cdot térfogat(T)$, ($div\vec{G} \equiv 4$).

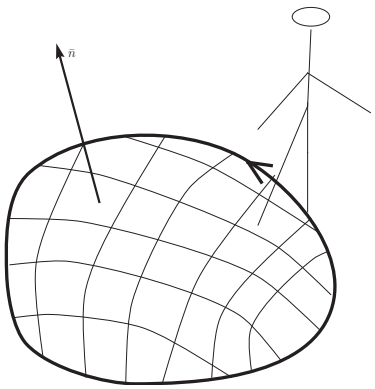
Kérdés: Mi a T tömör tórusz térfogata?

Tudjuk, hogy a T-t úgy kapjuk, hogy a $D = \left\{(x,z) : (x-3)^2 + z^2 \leq 1\right\}$ körlemezt megforgatjuk a z tengely körül. A D-t meghatározó $(x-3)^2 + z^2 = 1$ kör z-hez közelebbi félköríve: $x = f_1(z) = 3 - \sqrt{1-z^2}$, és a távolabbi: $x = f_2(z) = 3 + \sqrt{1-z^2}$.

A tórusz térfogatát úgy kapjuk, ha azon térfogatból, melyet az $x = f_2(z)$-nek a z tengely körüli forgatásából kapunk: $\pi \int\limits_{-1}^{1} f_2^2(z)\,dz$, kivonjuk az $x = f_1(z)$ z tengely körüli forgatásával kapott térfogatot: $\pi \int\limits_{-1}^{1} f_1^2(z)\,dz$.



4.21. ábra.



4.22. ábra.

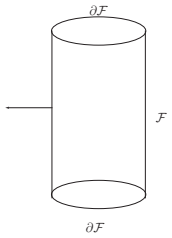
$$\text{Térfogat}(T) = \pi \int_{-1}^{1} f_2^2(z) - f_1^2(z)\, dz =$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(9 + 6\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2\right) - \left(9 - 6\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2\right) dz =$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} 12\sqrt{1-z^2} dz = 12\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2} dz = 6\pi^2$$

4.3.2. Stokes tétel

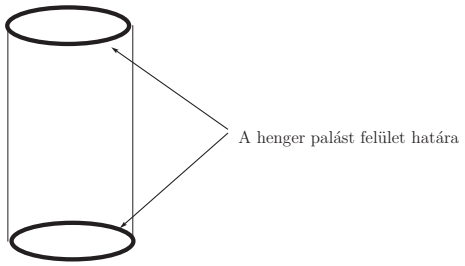
29. DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy az $\mathscr{F}$ felület és annak $\partial\mathscr{F}$ határa koherensen vannak irányítva, ha egy ember végigsétálhat $\partial\mathscr{F}$-en a $\partial\mathscr{F}$ irányába úgy, hogy a feje a lábához képest az $\mathscr{F}$ irányításának megfelelően van, és a felület az ember bal kezére esik.*

54. PÉLDA Az $\mathscr{F}$ a 4.23 ábrán látható henger palástja, $\partial\mathscr{F}$ a henger alap és fedő köre.

Ha $\mathscr{F}$ a kifelé mutató normálissal irányított, akkor hogyan kell irányítani a henger



4.23. ábra.



4.24. ábra.

határát, a $\partial\mathscr{F}$-et alkotó alsó és felső köröket ahhoz, hogy az $\mathscr{F}$ és $\partial\mathscr{F}$ koherensen legyenek irányítva?

Megoldás: Az alsó kör irányítása az óramutatóval ellentétes
A felső kör irányítása az óramutatóval egyezik.

28. TÉTEL (STOKES-TÉTEL) *Tegyük fel, hogy az $\mathscr{F}$ felület és annak $\partial\mathscr{F}$ határa koherensen irányított. Ekkor, ha az $\vec{F}$ parciális deriváltjai az $\mathscr{F}$ minden pontjában definiáltak, akkor*

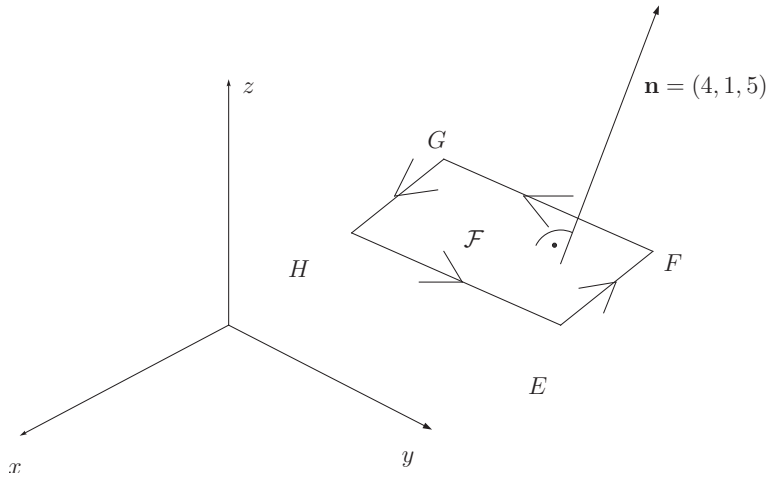
$$\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F}d\vec{r} = \iint\limits_{\mathscr{F}} curl\left(\vec{F}\right)d\vec{A}.$$

1. Az $\mathscr{F}$ felület határa, $\partial\mathscr{F}$, legtöbbször egy görbe.

2. Az is előfordulhat, hogy az $\mathscr{F}$ határa, $\partial\mathscr{F}$ egynél több görbe uniója, mint egy hengerpalást esetén.

3. Az is megeshet, hogy az $\mathscr{F}$ határa az üreshalmaz. Például, ha $\mathscr{F}$ egy gömb felülete, vagy egy krumpli felülete. Ebben az esetben $\partial\mathscr{F} = \emptyset$, vagyis $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F}d\vec{r} = 0$ így, ha $\mathscr{F}$ egy test felülete, akkor $\iint\limits_{\mathscr{F}} curl\left(\vec{F}\right)d\vec{A} = 0$, következik a Stokes-tételből.

55. PÉLDA Legyen γ a 4.25 ábrán látható DEFG irányított görbe, és $\vec{F}(x,y,z) = (x,x,x)$. Mivel egyenlő $\int\limits_{\gamma} \vec{F}d\mathbf{r}$?



4.25. ábra.

Megoldás: Legyen $\mathscr{F}$ az a felület, aminek a γ a határa, $\gamma = \partial\mathscr{F}$. Irányítsuk $\mathscr{F}$-et a γ-val koherensen. Ekkor, mivel

$curl\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0) = \mathbf{0}$, azt kapjuk, hogy $\iint\limits_{\mathscr{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = 0$. Használva a Stokes-tételt: $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{\mathscr{F}} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = 0$.

56. PÉLDA Legyen $\mathscr{F} = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1, z = 0\right\}$, vagyis $\mathscr{F}$ az xy síkbeli egységsugarú körlemez, a felfelé mutató normálissal irányítva.
Legyen $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-x,3z)$. Mivel egyenlő $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F} d\mathbf{r}$?

Megoldás: Számoljuk ki $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{r}$-et a vonalmenti integrál kiszámolására tanult formulával: $\partial\mathscr{F}$ egy paraméter, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, ahol $0 \leq t \leq 2\pi$. $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t, -\cos t, 0)$; $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. Tehát

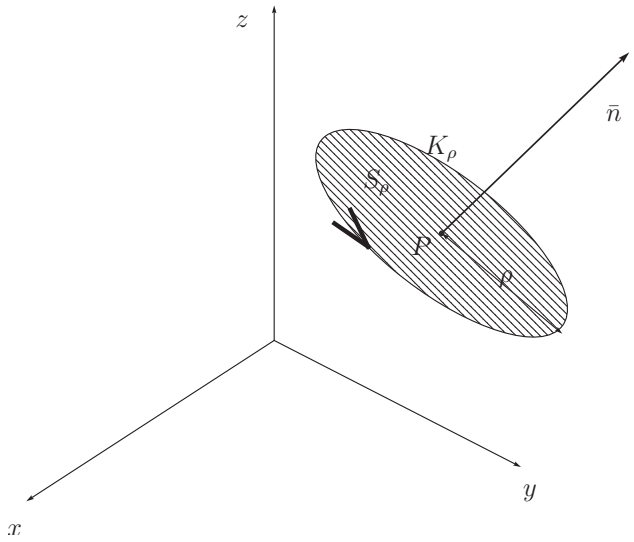
$$\vec{F}(r(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1.$$

Vagyis

$$\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

Ha valaki a Stokes-tétel alkalmazásával akarná az $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F} d\vec{r}$-et kiszámolni, akkor először a

$$\begin{aligned} curl\left(\vec{F}\right) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{3z}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} \\ &= \left(-3zy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}, 3zx\left(x^2+y^2\right)^{-3/2}, 0\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$



4.26. ábra.

értéket határozza meg. Ebből viszont az adódna, hogy $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F}d\vec{r} = 0$, hiszen az xy síkban (ahol $z = 0$), $curl\left(\vec{F}\right) = \mathbf{0}$. Valahol hiba van, hiszen az előbb $\int\limits_{\partial\mathscr{F}} \vec{F}d\vec{r} = -2\pi$ adódott.

A hiba abból adódik, hogy ebben az esetben NEM alkalmazható a Stokes-tétel. Azért nem, mert a Stokes-tétel azon feltétele, hogy az $\vec{F}$ minden parciális deriváltja létezzen az $\mathscr{F}$ felület minden pontjában, nem teljesül, mivel az $\vec{F}$ a z tengelyen nem értelmezett.

A curl$\left(\vec{F}\right)$ fizikai jelentése

Legyen P a tér egy pontja, és S_ρ egy P középpontú, kicsiny sugarú kör, melynek normálisa $\vec{n}$. ∂S_ρ és S_ρ koherensen irányítottak.

Legyen $K_\rho = \partial S_\rho$. Ha ρ nagyon kicsi, akkor $curl\left(\vec{F}\right)$ közelítőleg egyenlő $curl\left(\vec{F}(P)\right)$ az S_ρ-n. Tehát $|\vec{n}| = 1$.

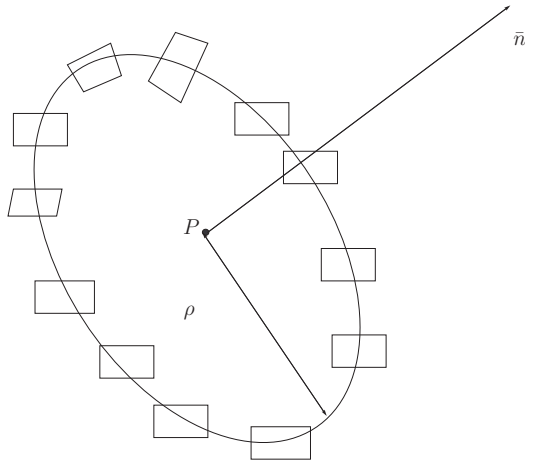
$$\iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}\right)d\vec{A} \approx \iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n}d\vec{A} = curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n}\cdot terület\left(S_\rho\right).$$

Tehát a Stokes-tételből: $\int\limits_{K_\rho} \vec{F}d\mathbf{r} = \int\limits_{\partial S_\rho} \vec{F}d\mathbf{r} = \iint\limits_{S_\rho} curl\left(\vec{F}\right)d\vec{A} \approx curl\left(\vec{F}(P)\right)\cdot\vec{n}\cdot terület\left(S_\rho\right)$.

Ebből következik, hogy

$$\vec{n}\cdot curl\left(\vec{F}(P)\right) \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F}d\mathbf{r}}{terület\left(S_\rho\right)}.$$

Pontosabban: $\frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F}d\mathbf{r}}{terület\left(S_\rho\right)}$, ahol $|\vec{n}| = 1$.



4.27. ábra.

Vagyis a $curl\left(\vec{F}\right)$-nek az $\vec{n}$-re eső merőleges vetülete egyenlő (közelítőleg, ha $\rho > 0$, kicsi) az $\vec{F}$ által a K_ρ-n való elmozdulás során végzett munka, osztva az S_ρ területével.

57. PÉLDA Legyen $\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2, x+x^2+z^2, y^2+x\right)$ egy folyadék sebességtere, ami időben állandó. Elhelyezünk egy lapátkereket a folyadék áramlásának az útjába. A lapátkerék centruma a $P(1,1,1)$, síkjának normálvektora $\vec{n} = (-2,5,-1)$. Lenézünk a lapátkerékre $-\vec{n}$ irányból.

1. Kérdés: Forog-e a lapátkerék, és ha igen, az óramutató járásával egyező vagy azzal ellentétes irányba?

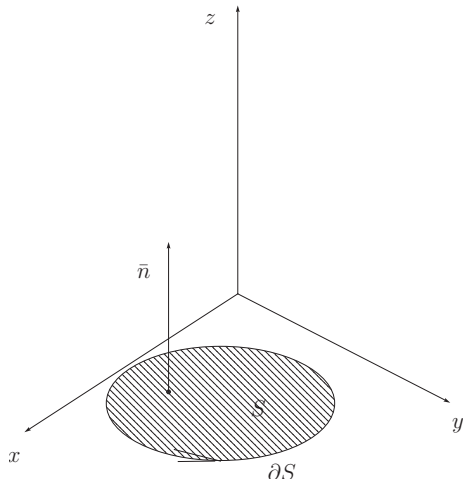
Válasz: $curl\left(\vec{F}\right) = (2y-2z, 2z-1, 2x+1)$, így $curl\left(\vec{F}(P)\right) = (0,1,3)$, ahol $P = (1,1,1)$ volt. Ekkor $curl\left(\vec{F}\right)$-nek az $\vec{n} = (-2,5,-1)$-re való vetülete: $(0,1,3)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (0,1,3)\cdot\frac{(-2,5,-1)}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{2}{\sqrt{30}} > 0$. Tehát az $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot curl\left(\vec{F}(P)\right) \approx \frac{\int_{K_\rho}\vec{F}d\mathbf{r}}{terület\left(S_\rho\right)}$ összefüggésből az $\vec{F}$ pozitív munkát végez a K_ρ-n, tehát a folyadék pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes irányba forgatja a lapátkereket.

2. Kérdés: Ha a lapátkerék centruma a $P(1,1,1)$ pontban van rögzítve, akkor hogyan kell választani az $\vec{n}$ vektort ahhoz, hogy a lapátkerék

a) egyáltalán ne forogjon;

b) a leggyorsabban forogjon az óramutató járásával egyező (negatív) irányba?

Válasz az a) kérdésre: A lapátkerék akkor nem forog, ha az $\vec{F}$ erőtér nem végez rajta munkát,



4.28. ábra.

vagyis, ha $\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Kihasználva, hogy

$$curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot \vec{n} \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület\left(S_\rho\right)},$$

ez akkor következik be, ha $curl\left(\vec{F}(P)\right) \perp \vec{n}$. Tehát a lapátkerék nem forog, ha $\vec{n}$ egy tetszőleges olyan vektor, ami merőleges a $curl\left(\vec{F}(P)\right) = (0,1,3)$-ra.

Például: $\vec{n} = (0,-3,1)$ és $\forall \vec{n} \perp (0,1,3)$.

Válasz a b) kérdésre: A $curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot \vec{n} \approx \frac{\int\limits_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{terület\left(S_\rho\right)}$ formula miatt a leggyorsabban akkor forog a kerék az óramutató járásával megegyező irányba, ha rajta a legnagyobb abszolút értékű negatív munkát végzi a folyadékáramlás. Ez akkor következik be, ha a $curl\left(\vec{F}(P)\right) \cdot \vec{n}$ a lehető legnagyobb abszolút értékű negatív szám. Tehát $\vec{n}$ a $-curl\left(\vec{F}(P)\right)$ irányába mutató egységvektor. Vagyis $\vec{n} = \frac{(0,-1,-3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,-1,-3)$.

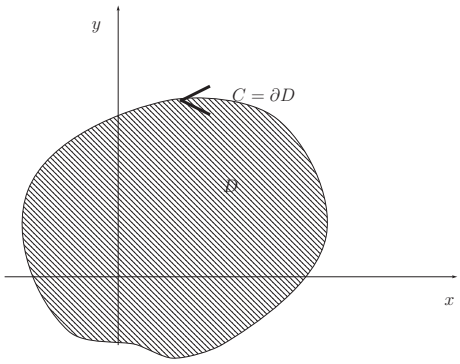
4.4. Green-tétel

A Stokes-tétel speciális eseteként kapjuk a Green-tételt!

Legyen S egy xy síkbeli tartomány, melynek határa a ∂S egyszerű zárt görbe, és az $\vec{F}$ *minden parciális deriváltja az S minden pontjában létezik!*

Ekkor, ha $\vec{F}$ egy xy síkbeli vektortér, vagyis

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0),$$



4.29. ábra.

akkor $curl\left(\vec{F}\right) = \left(0,0,Q'_x - P'_y\right)$. Ezért a Stokes-tételből kapjuk, hogy

$$\int\limits_{\partial S} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{S} curl\left(\vec{F}\right) d\vec{A} = \iint\limits_{S} \vec{n} \cdot curl\left(\vec{F}\right) dxdy = \iint\limits_{S} Q'_x - P'_y dxdy.$$

Mivel a fenti állításban mind az $\vec{F}$ vektortér, mind az S tartomány az xy síkban van, ezért a tételt megfogalmazhatjuk egy síkbeli állításként:

29. TÉTEL (GREEN-TÉTEL) *Legyen D egy olyan tartomány a síkon, melynek határa a C egyszerű zárt görbe. (D nem tartalmaz lyukakat!) Továbbá, az $\vec{F}$ síkbeli vektortér minden parciális deriváltja a D minden pontjában értelmezett. Nevezzük az F komponens függvényeit P-nek és Q-nak, vagyis*

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Ekkor

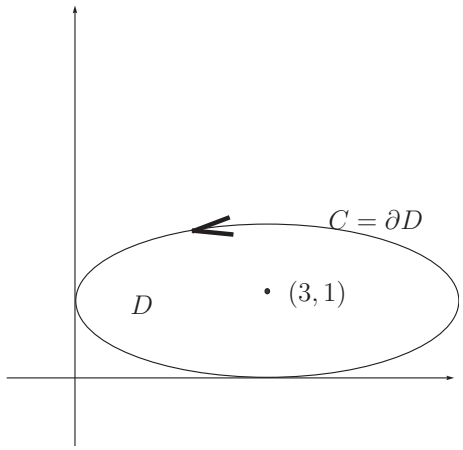
$$\int\limits_{C} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy.$$

58. PÉLDA Legyen $\vec{F}(x,y) = (2y,x)$ és C az $(x-3)^2 + 9(y-1)^2 = 9$ ellipszis pozitív irányítással. Mivel egyenlő az $\int\limits_{C} \vec{F} d\mathbf{r}$?

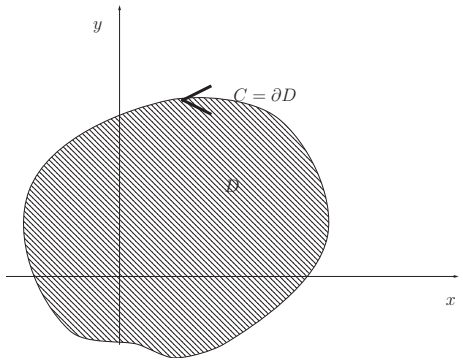
Megoldás: $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$, így $Q'_x = 1$ és $P'_y = 2$. Tehát $Q'_x - P'_y = -1$. Vagyis

$$\int\limits_{C} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint\limits_{D} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = -terület(D) = -\pi \cdot 3 \cdot 1 = -3\pi.$$

Területszámítás. Ha $P(x,y) \equiv 0$ és $Q(x,y) = x$, vagy $P(x,y) = -y$ és $Q(x,y) \equiv 0 \Rightarrow Q'_x - P'_y \equiv 1$.



4.30. ábra.



4.31. ábra.

Tehát a fenti esetben: $terület\,(D) = \int\limits_C xdy - \int\limits_C ydx$. Itt használtuk azt a jelölést, hogy az $\vec{F} = (F_1, F_2)$ vektortérre

$$\int\limits_\gamma (F_1 dx + F_2 dy) := \int\limits_\gamma \vec{F} d\mathbf{r}.$$

Innen azonnal adódik, hogy

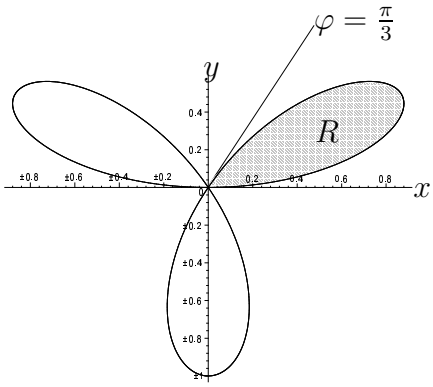
$$terület\,(D) = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx. \tag{4.8}$$

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a fenti C görbe

$$r = r(\varphi), \text{ ahol } a \leq \varphi \leq b$$

alakban adott. Ekkor

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi.$$



4.32. ábra. Háromlevelű lóhere

Tehát a (4.8) jobb oldalán az integrandusz:

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= (x(\varphi)\cdot\dot{y}(\varphi) - y(\varphi)\cdot\dot{x}(\varphi))\,d\varphi \\ &= r^2(\varphi)\left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right]d\varphi = r^2(\varphi)\,d\varphi. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Vagyis a (4.8) alapján

$$terület\,(D) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

59. PÉLDA Számoljuk ki az $r = \sin 3\varphi$ úgynevezett „háromlevelű lóhere” (l. 4.32 ábra) területét. (Amikor $\sin 3\varphi < 0$, akkor az r a formula szerint negatív lenne, ami lehetetlen, hiszen r jelöli az origótól vett távolságot. Ezt úgy oldjuk fel, hogy ekkor az $(|r|, \varphi + \pi)$ pontot ábrázoljuk.)

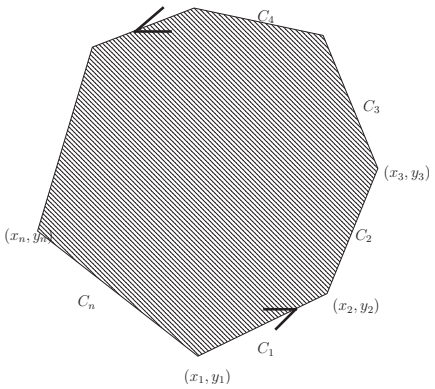
Megoldás: Elég az első síknegyedbe eső R területet meghatározni. Itt $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. A fenti képlet miatt

$terület\,(R) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\varphi)^2\,d\varphi$; elvégezve a következő számításokat:

$\cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi = 1$ és

$\underline{\cos^2 3\varphi - \sin^2 3\varphi = \cos 6\varphi}$

$2\sin^2 3\varphi = 1 - \cos 6\varphi \Rightarrow \sin^2 3\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 6\varphi)$, adódik, hogy



4.33. ábra.

$$terület\,(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

A háromlevelű lóhere területe $3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$.

A következő feladat azért került ide, mert eredményére szükségünk lesz az eggyel későbbi feladat megoldásához. Ebben a feladatban az

$$\int\limits_C xdy - ydx$$

vonalmenti integrált kell majd kiszámolni. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a C görbén integráljuk az $F(x,y) = (-y,x)$ vektorteret.

60. PÉLDA Legyen C az az egyenes szakasz, melynek kezdőpontja (a,b), végpontja pedig (c,d). Mekkora az $\int\limits_C xdy - ydx$ értéke?

Megoldás: C egy paraméterezése a következő:
$0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}(t) = (a,b) + t\cdot(c-a, d-b) = (a+t(c-a), b+t(d-b))$, $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$, tehát $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (-b-t(d-b), a+t(c-a))$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (c-a, d-b)$. $\vec{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t) = -b(c-a) - t(d-b)(c-a) + a(d-b) + t(c-a)(d-b) = ad - bc$. Vagyis $\int\limits_C \vec{F}d\mathbf{r} = \int\limits_0^1 \vec{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt = \int\limits_0^1 ad - bcdt = ad - bc$.

61. PÉLDA Számoljuk ki a 4.33 ábrán látható poligon által közrezárt T területet!

Megoldás: Az első feladat eredményét és a Green-tételt használjuk. A Green-tételből tudjuk, hogy ha $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, akkor

$terület\,(t) = \frac{1}{2}\int\limits_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{C_i} xdy - ydx = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i,$ ahol $x_{n+1} = x_1$, és $y_{n+1} = y_1$. (Felhasználva az előző feladat során kapott eredményt, azt, hogy $\int\limits_{C_i} xdy - ydx = x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i$.)

Vagyis

$$\begin{aligned} terület\,(t) &= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots \\ &\quad + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)] \end{aligned}$$

Ez a képlet nemcsak akkor igaz, ha az (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n) pontok által meghatározott poligon *konvex*. A poligon lehet *konkáv* is! A képlet egy ciklus segítségével könnyen *programozható*!

4.5. Néhány feladat a vektoranalízisből

62. PÉLDA Legyen $\vec{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (ahol $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és $r = |\mathbf{r}|$). Legyen S az $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ gömbfelülete, kifelé mutató normálissal irányítva. Kérdés: $\iint\limits_S \vec{F} d\vec{A} = ?$

Megoldás: Mivel a gömbfelület minden pontjában az $\vec{F}(\mathbf{r})$ iránya a normálvektor irányával egyezik meg, ezért az $\vec{F}$-nek normális irányú vetülete az $\vec{F}$ hosszával, vagyis $\left|\vec{F}(\mathbf{r})\right| = \frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{1}{r^2}$-tel egyenlő. Mivel a b sugarú gömb felületén vagyunk, itt $r = b$, tehát a normális irányú vetület $\frac{1}{b^2}$ minden pontban, azaz konstans. Mint tanultuk (l. (4.6)), ekkor

$$\iint\limits_S \vec{F} d\vec{A} = \frac{1}{b^2} \cdot \text{gömbfelszín} = \frac{1}{b^2} 4b^2\pi = 4\pi,$$

ami független a b-től.

63. PÉLDA Számoljuk ki a $\iiint\limits_K div\left(\vec{F}\right) dxdydz$ integrált, ha K az origó középpontú, b sugarú gömb, ahol $\vec{F}$ ugyanaz mint az előző feladatban!

Megoldás: Először kiszámoljuk $div\left(\vec{F}\right)$-et.

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \left(\underbrace{\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F_1}, \underbrace{\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F_2}, \underbrace{\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}}_{F3} \right) \text{ és}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 - x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2x^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^3}. \end{aligned}$$

Ugyanígy: $\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+z^2-2y^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$ és $\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$. Innen $div\left(\vec{F}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(y^2+z^2-2x^2x^2+z^2-2y^2+y^2+z^2-2z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = 0$. Tehát $div\left(\vec{F}\right) \equiv 0$ és ezért $\iiint\limits_K div\left(\vec{F}\right) dxdydz = 0$.

4. MEGJEGYZÉS A fenti két feladatban szereplő integrálok a divergenciatétel két oldalán álló integrálok. Ezek különbözősége is mutatja, hogy a divergenciatételt csak akkor alkalmazhatjuk, ha az $\vec{F}$ vektortér a K test minden pontjában értelmezve van. (Ez a fenti $\vec{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ és K esetén nyilván nem teljesül.)

Vegyes feladatok

1. Ellenőrizzük, hogy létezik-e potenciálfüggvénye a $\mathbf{F}(x,y,z) = (6x + y\cos(xy), 2z + x\cos(xy), 2y)$ vektormezőnek és ha van, akkor számoljuk ki a potenciálfüggvényt!

2. Legyen H az a háromszög, melynek csúcsai: $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)$, és adott az $\mathbf{F}(x,y,z) = (1,2,3)$ konstans vektormező. Kérdés: $\iint\limits_D \mathbf{F}d\mathbf{A} = ?$

3. Legyen $\mathbf{F}(x,y) = (xe^x - y^3, \cos(y^2) + x^3)$, és γ az origó középpontú egységsugarú kör az óramutató járásával ellentétesen irányítva. Kérdés: $\int\limits_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{r} = ?$

4. Legyen $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$, és γ egy olyan görbe, amelynek kezdőpontja $A = (1,0,1)$ és végpontja $B = (2,1,-1)$. Kérdés: $\int\limits_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = ?$

5. Az S felület olyan mint egy lefelé fordított pohár. Két részből áll: egyrészt a pohár aljából:
$$\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ és } z = h\right\},$$
továbbá a pohár oldalából:
$$\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = a^2 \text{ és } 0 \leq z \leq h\right\}.$$
Irányítsuk S-et a kifelé mutató normálissal! Legyen $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, x + 2y + z, 3)$. A **Gauss-féle divergenciatétel alkalmazásával** számoljuk ki a $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{A}$ felületmenti integrált!

6. A következő információt tudjuk az $\mathbf{F}$ vektormezőről a $B = (3,2,5)$ pontban: $div\mathbf{F}(B) = -7$ és $curl\mathbf{F}(B) = (1,0,1)$. (Nem biztos, hogy mindkettőre szükség lesz!) Legyen S a B középpontú $r = 10^{-3}$ sugarú gömböcske felülete a kifelé mutató normálissal irányítva. Adjuk meg ezen információkon alapuló legjobb becslést az $\iint\limits_S \mathbf{F}d\mathbf{A}$ felületmenti integrálra!

7. Legyen $\mathbf{F}(x,y,z) = (6x^2y - 4yz^3, 2x^3 - 4xz^3, -12xyz^2)$! Ellenőrizzük, hogy konzervatív-e a vektortér! Ha igen, akkor számítsuk ki a potenciálfüggvényét!

8. Legyen a γ görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$. Továbbá adott az $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^3 + z, \frac{z-y}{x}, xy\right)$ vektormező. Kérdés: $\int\limits_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = ?$

9. Legyen $\mathscr{F}$ az $x - 2y + z = 1$ felületnek azon darabja, melynek az xy síkra eső vetülete az a háromszög, melynek csúcsai: $A = (1,0,0)$; $B = (0,1,0)$; $C = (0,0,0)$. Irányítsuk $\mathscr{F}$-et a felfelé mutató normálissal. Adott továbbá az $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x^2)$ vektormező. Kérdés: $\iint\limits_{\mathscr{F}} \mathbf{F}d\mathbf{A} = ?$

10. A Stokes-tétel segítségével számítsuk ki az $\int\limits_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ vonalmenti integrált, ahol $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, x^2, z^2)$, továbbá γ a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és a $z = y$ sík metszésvonala, az óramutató járásával ellentétesen irányítva.

11. Legyen $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, és legyen $\mathscr{F} = \left\{(x,y,z) : x^2 + z^2 = 1 \text{ és } -2 \le y \le 1\right\}$ a kifelé mutató normálvektorral irányítva. Kérdés: $\iint\limits_{\mathscr{F}} \mathbf{F}d\mathbf{A} = ?$

12. Gauss divergenciatétele segítségével számítsuk ki az $\iint\limits_{\mathscr{F}} \mathbf{F}d\mathbf{A}$ felületmenti integrált, ahol $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + e^{yz}, y - z\operatorname{arctg}x, x^2y^3)$ és $\mathscr{F} = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 4 \text{ és } 0 \le z \le 3\right\}$ henger a kifelé mutató normálissal irányítva.

13. A Green-tétel segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ görbe által határolt tartomány területét!

4.5.1. Vektor-differenciálkalkulus

Ebben a fejezetben, amikor azt írjuk, hogy f, g, h akkor mindig az $\mathbb{R}^3$-on értelmezett kétszer folytonosan differenciálható valós értékű függvényeket értünk, míg a F, G, H mindig kétszer folytonosan differenciálható vektortereket jelentenek. Vagyis

$$f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ és } F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Ha F egy vektor tér, akkor a komponensfüggvényeit rendre F_1, F_2, F_3-al jelöljük. Vagyis

$$F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

A ∇ (olv. „nabla”) operátor

Legyenek $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ a koordináta-egységvektorok $\mathbb{R}^3$-ban. Bevezetjük az úgynevezett **nabla**-operátort:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ez az operátor a valós értékű függvényeken hat, vagyis

$$\nabla f := \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{grad} f = f'. \tag{4.10}$$

Továbbá,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1,F_2,F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} = \mathbf{div}\boldsymbol{F} \tag{4.11}$$

és

$$\mathbf{curl}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}. \tag{4.12}$$

A Laplace-operátor valós értékű függvényeken:

$$\nabla^2 f := \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

A Laplace-operátor vektor tereken:

$$\nabla^2 F := \left(\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3\right).$$

A továbbiakban gyakran használjuk a következő definíciókat:

$$H = (F\cdot\nabla)G$$

az a vektor tér, amelyre

$$H_i = F\cdot(\nabla G_i) = F_1\cdot\frac{\partial G_i}{\partial x}+F_2\cdot\frac{\partial G_i}{\partial y}+F_3\cdot\frac{\partial G_i}{\partial z} = F\cdot G_i'.$$

Mivel G' egy 3×3-as mátrix, melynek i-edik sora G_i', ezért

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G} = (F\cdot\nabla)G = \boldsymbol{G}'\cdot\boldsymbol{F}.$$

A következőkben néhány fontos azonosságot sorolunk fel:

1. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,
2. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ ha $g(x) \neq 0$.
3. $\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \mathrm{curl}G + G \times \mathrm{curl}F$
4. $\mathrm{div}(fF) = f\mathrm{div}F + F \cdot \nabla f$
5. $\mathrm{div}(F \times G) = G \cdot \mathrm{curl}F - F \cdot \mathrm{curl}G$
6. $\mathrm{div}(\mathrm{curl}F) = 0$
7. $\mathrm{curl}(fF) = f\mathrm{curlF} + \nabla f \times F$
8. $\mathrm{curl}(F \times G) = F\mathrm{div}G - G\mathrm{div}F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$
9. $\mathrm{curl}(\mathrm{curl}F) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}F) - \nabla^2 F$
10. $\mathrm{curl}\nabla f = 0$
11. $\nabla(F \cdot F) = 2(F \cdot \nabla)F + 2F \times (\mathrm{curlF})$
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13. $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
14. $\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$
15. $F \times (G \times H) = (F \cdot H)G - H(F \cdot G)$

4.5.2. A gradiens, a divergencia és a rotáció kifejezése gömbi és hengerkoordináta-rendszerekben

A **hengerkoordinátás esetben:**

30. TÉTEL *Tekintsük a henger koordinátás helyettesítést:*

$$\boxed{(x,y,z) = G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).}$$

Legyen

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial G}{\partial r},\ \mathbf{e}_\theta := \frac{\partial G}{\partial \theta}\ \textit{és}\ \mathbf{e}_z := \frac{\partial G}{\partial z}. \tag{4.13}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$\boxed{\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \mathbf{e}_z = (0,0,1)}. \tag{4.14}$$

Vegyük észre, hogy a

$$B := \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\} \tag{4.15}$$

bázis ortonormális, vagyis a vektorai egységnyi hosszúak és páronként merőlegesek. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható. Definiáljuk az

$$F_r := F \cdot \mathbf{e}_r,\ F_\theta := F \cdot \mathbf{e}_\theta, F_z := F \cdot \mathbf{e}_z \tag{4.16}$$

vektorösszetevőket. Nyilván

$$F = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_z\mathbf{e}_z. \tag{4.17}$$

Ekkor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{4.18}$$

és

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right], \tag{4.19}$$

továbbá

$$\nabla \times F = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

BIZONYÍTÁS Először a (4.18), utána a (4.19) formulát igazoljuk. Mielőtt ezekbe belekezdünk, ismételjük át, hogy

$$G'(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

A (4.18) formula igazolása

Legyen

$$Q := [\mathbf{e}_e, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor, alkalmazva (1.11) formulát:

$$[\mathbf{i}]_B = Q^{-1} \cdot [\mathbf{i}]_T,\ [\mathbf{j}]_B = Q^{-1} \cdot [\mathbf{j}]_T,\ [\mathbf{k}]_B = Q^{-1} \cdot [\mathbf{k}]_T, \tag{4.22}$$

ahol T a természetes bázis, vagyis $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Azonnal látjuk, hogy

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Innen

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos\theta\cdot\mathbf{e}_r - \sin\theta\cdot\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{j} &= \sin\theta\cdot\mathbf{e}_r + \cos\theta\cdot\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{k} &= \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Az összetett függvény deriválására vonatkozó láncszabály szerint egy tetszőleges f-re

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}, \\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ezen egyenletrendszer minden egyenletének jobb oldala három szorzat összege. Ezen szorzatok második tagjait ki tudjuk olvasni (4.21) formula mátrixaiból.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = (G')^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Vigyük át $(G')^T$-t a másik oldalra:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \left((G')^T\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Így, felhasználva, hogy

$$\left((G')^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

□

és felhasználva, hogy f tetszőleges, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

A következő egyenletben használjuk ezt és (4.24) formulát:

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\mathbf{k}\\
&= \left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\cdot(\cos\theta\cdot\mathbf{e}_r-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_\theta)\\
&+ \left(\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot(\sin\theta\cdot\mathbf{e}_r+\cos\theta\cdot\mathbf{e}_\theta)\\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\\
&= \mathbf{e}_r\cdot\frac{\partial f}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\mathbf{e}_z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Ezzel bebizonyítottuk (4.18) formulát.

A (4.19) formula igazolása

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_r\mathbf{e}_r+F_\theta\mathbf{e}_\theta+F_z\mathbf{e}_z)\\
&= \left(\underbrace{\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}}_{\frac{\partial}{\partial x}},\underbrace{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}}_{\frac{\partial}{\partial y}},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&\cdot \left[F_r\cdot\underbrace{(\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j})}_{\mathbf{e}_r}+F_\theta\cdot\underbrace{(-\sin\theta\mathbf{i}+\cos\theta\mathbf{j})}_{\mathbf{e}_\theta}+F_z\underbrace{\mathbf{k}}_{\mathbf{e}_z}\right]\\
&= \left(\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&\cdot [F_r\cos\theta-F_\theta\sin\theta,F_r\sin\theta+F_\theta\cos\theta,F_z]\\
&= \left(\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(F_r\cos\theta-F_\theta\sin\theta)\\
&+ \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot(F_r\sin\theta+F_\theta\cos\theta)+\frac{\partial F_z}{\partial z}\\
&= \frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{1}{r}F_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}(rF_z).\right]
\end{aligned}
$$

A Laplace-operátor polárkoordinátás alakja

Ebben a fejezetben a hengerkoordinátás helyettesítésnél fent használt jelöléseket használjuk. A hengerkoordinátás helyettesítésre nyert képletek használhatóak a síkbeli polárkoordinátás esetben, ha a harmadik koordinátát elhanyagoljuk. Ennek az észrevételnek a felhasználásával a valós értékű $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre kiszámítható a **Laplace-operátor:**

$$\nabla^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

polár koordinátás alakja. Ebben a fejezetben a síkban dolgozunk, tehát a harmadik koordinátát 0-nak vesszük. ezért most

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}.$$

A (4.18) formulából adódóan az $\{x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\}$ polárkoordinátákkal:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta. \tag{4.30}$$

Emlékezzünk, hogy $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_u$. Most alkalmazzuk az $\boldsymbol{F = \nabla u}$ vektortérre (4.19) formulát. Ehhez vegyük észre, hogy

$$F_r = \frac{\partial u}{\partial r} \text{ és } F_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Tehát (4.19) formulát alkalmazva:

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot F = \frac{1}{r}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right)}_{\frac{\partial u}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}_{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}\right].$$

Tehát a Laplace-operátor polárkoordinátás alakja:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{4.31}$$

Gömbi koordináta-rendszerben:
Tekintsük a gömbkoordinátás helyettesítést:

$$\boxed{(x, y, z) = G(r, u, v) = (r\sin u\cos v, r\sin u\sin v, r\cos u).} \tag{4.32}$$

Legyen

$$\mathbf{e}_r := \frac{\partial G}{\partial r},\ \mathbf{e}_u := \frac{\partial G}{\partial u} \text{ és } \mathbf{e}_v := \frac{\partial G}{\partial z}. \tag{4.33}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{e}_r := \frac{G'_r}{|G'_r|} = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} = \sin u \cos v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

és

$$\mathbf{e}_u := \frac{G'_u}{|G'_u|} = \begin{bmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{bmatrix} = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k},$$

végül

$$\mathbf{e}_v := \frac{G'_v}{|G'_v|} = \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix} = -\sin v \mathbf{i} + \cos v \mathbf{j}.$$

Vegyük észre, hogy a

$$B := \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$$

bázis ortonormális, vagyis a vektorai egységnyi hosszúak és páronként merőlegesek. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ és $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható. Definiáljuk a

$$F_r := F \cdot \mathbf{e}_r,\ F_\theta := F \cdot \mathbf{e}_\theta, F_z := F \cdot \mathbf{e}_z.$$

vektorokat. Nyilván

$$F = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z.$$

Ezzel a jelöléssel:

31. TÉTEL

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{1}{r \sin u}\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{e}_v \tag{4.34}$$

és

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin u}\frac{\partial}{\partial u}(\sin u F_u) + \frac{1}{r \sin u}\frac{\partial F_v}{\partial v}, \tag{4.35}$$

végül

$$\begin{aligned} \nabla \times F = &\left[\frac{1}{r \sin u}\frac{\partial}{\partial u}(\sin u F_v) - \frac{1}{r \sin u}\frac{\partial F_u}{\partial v}\right]\mathbf{e}_r + \\ &+ \left[\frac{1}{r \sin u}\frac{\partial F_r}{\partial v} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r F_v)\right]\mathbf{e}_u + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r F_u) - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial u}\right]\mathbf{e}_v. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Az összetett függvény deriválására vonatkozó láncszabály szerint egy tetszőleges f-re:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ugyanezt mátrixalakban is leírjuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} = (G')^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Vigyük át $(G')^T$-t a másik oldalra, és egyben használjuk ki, hogy $\left((G')^T\right)^{-1} = \left((G')^{-1}\right)^T$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \left((G')^{-1}\right)^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Tehát meg kell határozni a $(G'(r,u,v))^{-1}$ mátrixot. (4.32)-t felhasználva írhatjuk, hogy

$$G'(r,u,v) = \begin{bmatrix} \sin u \cos v & r\cos u \cos v & -r\sin u \sin v \\ \sin u \sin v & r\cos u \sin v & r\sin u \cos v \\ \cos u & -r\sin u & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezt invertálva kapjuk, hogy

$$(G'(r,u,v))^{-1} = \begin{bmatrix} \sin(u)\cos(v) & \sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ \frac{\cos(v)\cos(u)}{r} & \frac{\sin(v)\cos(u)}{r} & -\frac{\sin(u)}{r} \\ -\frac{\sin(v)}{r\sin(u)} & \frac{\cos(v)}{r\sin(u)} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

Ennek transzponáltja:

$$\left((G')^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \sin u \cos v & \frac{\cos u \cos v}{r} & -\frac{\sin v}{r\sin u} \\ \sin u \sin v & \frac{\cos u \sin v}{r} & \frac{\cos v}{r\sin u} \\ \cos u & -\frac{\sin u}{r} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Vagyis (4.39) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin u \cdot \cos v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos u \cos v}{r}\frac{\partial f}{\partial u} + -\frac{\sin v}{\sin u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin u \sin v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos u \sin v}{r}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\cos v}{r\sin u}\frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos u \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin u}{r}\frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Mivel a

$$B := \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v\}$$

egy ortonormált bázis, ezért ezen vektorokból mint oszlopvektorokból alkotott Q mátrix:

$$Q = \begin{bmatrix} \sin u \cos v & \cos u \cos v & -\sin v \\ \sin u \sin v & \cos u \sin v & \cos v \\ \cos u & -\sin u & 0 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrix lesz, ezért

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} \sin u \cos v & \sin u \sin v & \cos u \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazva (1.11) formulát, az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ koordináta-egységvektorok koordinátái a B bázisban:

$$[\mathbf{i}]_B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{j}]_B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}]_B = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

vagyis

$$[\mathbf{i}]_B = \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ -\sin v \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{j}]_B = \begin{bmatrix} \sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}]_B = \begin{bmatrix} \cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \sin u \cos v \cdot \mathbf{e}_r + \cos u \cos v \cdot \mathbf{e}_u - \sin v \cdot \mathbf{e}_v \\ \mathbf{j} &= \sin u \sin v \cdot \mathbf{e}_r + \cos u \sin v \cdot \mathbf{e}_u + \cos v \cdot \mathbf{e}_v \\ \mathbf{k} &= \cos u \cdot \mathbf{e}_r - \sin u \cdot \mathbf{e}_u. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Alkalmazva (4.42) és (4.44) összefüggéseket, egyszerűen megkaphatjuk a gradiens a divergencia és a rotáció kifejezését a gömbi koordináta-rendszerben, hiszen ezek a parciális deriváltak, és az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorokkal vannak kifejezve. A levezetés lépései továbbra is a hengerkoordinátás esetben látott levezetést követik.

64. PÉLDA Határozzuk meg gömbi koordinátákra való áttéréssel a következő vektortér divergenciáját és rotációját:

$$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right). \tag{4.45}$$

Megoldás: $\sqrt{x^2+y^2} = r \sin u$ és $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$. Ezért, a

$$\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z) \text{ és } |\mathbf{r}| = r \tag{4.46}$$

jelölésekkel a fenti vektortér gömbi koordinátákban:

$$F(r,u,v) = \frac{1}{\sin u}\mathbf{r}.$$

Ekkor

$$F_r = F \cdot \mathbf{e}_r = \frac{r}{\sin u}, F_u = F_v \equiv 0.$$

Ezt (4.35) formulába helyettesítve:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot F &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(r^2 F_r\right)\\ &= \frac{1}{\sin u}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^3\\ &= \frac{3}{\sin u}.\end{aligned}$$

Hivatkozások

[1] H. Anthon, R. C. Busby: *Contemporary Linear Algebra*. Wiley, 2003.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 8. edition. Eighth edition Wiley, 2005.

[3] A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és funkcionálanalízis elemei*. Műszaki Könyvkiadó, 1981.

[4] Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest

[5] Giordano – Hass – Thomas – Weir: *Thomas-féle kalkulus* I–III. kötet, Typotex Kiadó, Budapest