Matematika példatár 7.

Lineáris algebra II.

Csordásné Marton, Melinda

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Matematika példatár 7.: Lineáris algebra II.

Csordásné Marton, Melinda
Lektor: Dr. Pfeil, Tamás

Ez a modul a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A-2009-0027 „Tananyagfejlesztéssel a GEO-ért” projekt keretében készült. A projektet az Európai Unió és a Magyar Állam 44 706 488 Ft összegben támogatta.

v 1.0

Publication date 2010
Szerzői jog © 2010 Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar

Kivonat

A modul a vektortér axiómáinak, bevezetésével, majd az ehhez szorosan kapcsolódó fogalmak az altér, a generátorrendszer, bázis, dimenzió tárgyalásával kezdődik. Ezt követően megismerkedünk a lineáris transzformáció fogalmával, foglalkozunk a mátrixok sajátértékeivel és sajátvektoraival. Kitérünk a túlhatározott egyenletrendszerek megoldására, és ehhez kapcsolódva a lineáris regresszióra. Végül egy gyakorlati alkalmazást, a lineáris programozást ismerhetjük meg.

Jelen szellemi terméket a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény védi. Egészének vagy részeinek másolása, felhasználás kizárólag a szerző írásos engedélyével lehetséges.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Tartalom

7. Lineáris algebra II. 1
1. 7.1 Bevezetés 1
2. 7.2 Vektortér 1
2.1. 7.2.1 Feladatok 3
3. 7.3 A bázistranszformáció és alkalmazásai 5
3.1. 7.3.1 Vektorrendszer rangjának a meghatározása 8
3.2. 7.3.2 Kompatibilitás 8
3.3. 7.3.3 Mátrix rangjának a meghatározása 9
3.4. 7.3.4 Lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval 9
3.5. 7.3.5 Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval ... 11
3.6. 7.3.6 Feladatok 11
4. 7.4 Lineáris leképezések 17
4.1. 7.4.1 A mátrixok és a lineáris leképezések összefüggése 18
4.2. 7.4.2 Sajátérték, sajátvektor 20
4.3. 7.4.3 Feladatok 22
5. 7.5 Lineáris programozás 24
5.1. 7.5.1 Feladatok 31
6. 7.6 Túlhatározott egyenletrendszerek 36
6.1. 7.6.1 Túlhatározott egyenletrendszer megoldása súlymátrix alkalmazásával 37
6.2. 7.6.2 Feladatok 38
7. 7.7 A lineáris regresszió 40
7.1. 7.7.1 Feladatok 42
8. 44
9. 7.8 Összefoglalás 44

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A táblázatok listája

1. 42
2. 42
3. 42
4. 42
5. 43
6. 43

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

7. fejezet - Lineáris algebra II.

1. 7.1 Bevezetés

A hetedik modul a Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar Matematika II. tantárgyának lineáris algebra tananyaga alapján készült.

A modul feladatgyűjtemény jellegűen, a földmérő-földrendező nappali és levelező tagozatos hallgatók lineáris algebra tananyagát feladatok segítségével dolgozza fel. Ezeknek a feladatoknak egy része más feladatgyűjteményekben is megtalálható, de olyan speciális feladatokat is közlünk, amelyeket a karon szerzett több éves oktatói tapasztalataink alapján megoldásra érdemesnek és hasznosnak találtunk. Javasoljuk, hogy azok az érdeklődő Olvasók, akik még többet szeretnének gyakorolni, használják az irodalomjegyzékben felsorolt könyveket és példatárakat is.

A modul a jobb áttekinthetőség kedvéért rövid alfejezetekre tagolódik. Minden fejezet, ill. alfejezet elméleti összefoglalóval kezdődik. Bármennyire fontos elméleti anyagról is van szó, a terjedelemre való tekintettel, törekednünk kellett a tömörségre, ezért bizonyítások a modulban nem szerepelnek. Ugyancsak a terjedelemre való tekintettel egyes témákat nem tárgyalunk teljes részletességében, csak egy kis ízelítőt adunk, amely, ha felkelti az Olvasó érdeklődését további tanulmányozás után válik majd teljessé.

A modul szervesen kapcsolódik az előző modulban tárgyaltakhoz, és további elemekkel egészíti ki azokat. A modul a vektortér axiómáinak bevezetésével, majd az ehhez szorosan kapcsolódó fogalmak, az altér, a generátorrendszer, a bázis és a dimenzió tárgyalásával kezdődik. Ezt követően foglalkozunk a lineáris leképezésekkel, ezek sajátértékeivel és sajátvektoraival. Röviden, bizonyítások nélkül bemutatjuk a lineáris programozás normál feladatának megoldását grafikus és szimplex módszerrel. Kitérünk a túlhatározott egyenletrendszer megoldására, és ehhez kapcsolódva a lineáris regresszióra. A lineáris regressziót csak érintőlegesen, mint a túlhatározott egyenletrendszer speciális esetét tárgyaljuk, mert ez a kérdéskör az ugyanezen program keretében készült, *Dr. Závoti József „Valószínűség és matematikai statisztika”* című tankönyv és feladatgyűjteményében részletesen szerepel.

A modulban szereplő feladatok megoldása csak minimális előképzettséget igényel. A feladatok a fogalmak, tételek, módszerek megértését, begyakorlását segítik elő. Ezért minden fogalomhoz, tételhez, módszerhez részletesen kidolgozott feladatmegoldások kapcsolódnak. Ha a mintafeladatok megoldása egyeseknek túlságosan is kidolgozottnak tűnik, akkor gondoljanak arra, hogy ez a feladatgyűjtemény levelező és távoktatásban résztvevő hallgatók számára is készült, akiknek nincs módjuk kontaktórán megszerezni ezeket az ismereteket. Egyes anyagrészeknél, a figyelem felkeltése érdekében, közvetlenebb szóhasználattal, hosszabb szöveges magyarázattal találkozunk. Tesszük mindezt azért, hogy a már sokszor visszaköszönő típushibákat a feladatok megoldása során az Olvasók ne kövessék el.

Ebben a modulban is fő célunk, hogy az Olvasó sikerélménnyel gazdagodva sajátítsa el az új ismereteket, érezze meg a matematika szépségeit, lehetőségeit, hogy kedvvel, önbizalommal és hittel alkalmazza ezeket szakmai munkája során.

2. 7.2 Vektortér

Ebben a fejezetben egy olyan algebrai fogalmat, a **valós vektorter**et vezetjük be, amelynek segítségével a lineáris egyenletrendszerek elmélete általánosabban, absztrakt megközelítésben tárgyalható.

Egy nemüres V halmazt **valós vektortér**nek nevezzük, ha az alábbi axiómák teljesülnek:

A V halmazon értelmezve van egy *összeadás* **művelet**, amely bármely $u, v \in V$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy V-beli $u + v$-vel jelölt elemet.

Az összeadás tulajdonságai:

i. Az összeadás *kommutatív*, azaz bármely $u, v \in V$ elemre

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}.$

ii. Az összeadás asszociatív, azaz bármely $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ elemre

$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}).$

iii. Létezik *nullelem*, azaz van olyan $\mathbf{0} \in V$, amellyel bármely $\boldsymbol{v} \in V$ elemre $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}.$

iv. Minden elemnek létezik *ellentettje*, azaz bármely $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ elemhez létezik olyan $-\boldsymbol{v} \in V,$ amelyre

$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}.$

A valós számok halmaza és a V halmaz között értelmezve van egy **skalárral való szorzás**nak nevezett művelet az alábbi módon: bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{v} \in V$ elempárhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V -beli elemet, amelyet $\lambda \cdot \boldsymbol{v}$-vel jelölünk.

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

i. Bármely $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{v} \in V$ esetén $(\lambda+\mu)\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}+\mu\boldsymbol{v}.$

ii. Bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$ esetén $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}.$

iii. Bármely $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{v} \in V$ esetén $(\lambda\mu)\boldsymbol{v}=\lambda(\mu\boldsymbol{v}).$

iv. Bármely $\boldsymbol{v} \in V$ esetén $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

A V halmaz elemeit **vektoroknak,** $\mathbb{R}$ elemeit skalároknak nevezzük. A vektorokat vastag betűkkel fogjuk továbbra is jelölni.

A vektortér megadásához megadjuk a vektorok V halmazát, értelmezünk két műveletet az összeadást és a skalárral való szorzást, és ellenőrizzük, hogy az axiómák teljesülnek-e.

Példák vektorterekre:

1. Az origóból induló sík illetve térvektorok a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.
2. Az $\mathcal{M}^{nxm}$ típusú mátrixok, az előző modulban bevezetett mátrixműveletekre nézve.
3. A valós számsorozatok, a szokásos műveletekre nézve.

Egy V vektortér egy nemüres $W \subseteq V$ részhalmazát **altérnek** nevezzük V-ben, ha W maga is vektortér ugyanazokra a V-beli műveleteknek W-beli megszorításaira nézve.

Az altér nem egyszerűen részhalmaza az adott vektortérnek, mert az altér definíciója sokkal mélyebb követelményeket támaszt. Annak az eldöntésében, hogy W altér-e segít a következő tétel:

Egy V vektortérben egy *W* nemüres részhalmaz pontosan akkor altér, ha

i. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in W$ esetén $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W,$

ii. $\boldsymbol{v} \in W,\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\boldsymbol{v} \in W.$

Legyen V vektortér, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{V}$ és $\lambda_1,\lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ekkor a $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a_n}$ vektort az $\boldsymbol{a_i}$ vektorok λ_i skalárokkal képzett **lineáris kombinációjá**nak nevezzük.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in V$ vektorokat a V vektortér **generátorrendszer**ének nevezzük, ha V minden eleme előáll az $\boldsymbol{a_i}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in V$ vektorok által **generált altér**en az $\boldsymbol{a_i}$ vektorok összes lineáris kombinációinak a halmazát értjük. Ezek alteret alkotnak, amit $\langle \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$-nel jelöljük.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in V$ vektorok **lineárisan összefüggő**k, ha vannak olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyek nem mind nullák, és $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots \lambda_n \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \in V$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha $\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots \lambda_n \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$ csak akkor teljesül, amikor minden $\lambda_i = 0$. Azaz

$$\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots \lambda_n \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \lambda_i = 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Egy $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ vektor **lineárisan függ** az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ vektoroktól, ha $\boldsymbol{v}$ előállítható az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bázison lineárisan független generátorrendszert értünk.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér **triviális bázisának** nevezzük az $\boldsymbol{e_1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e_n} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ egységvektorokból álló bázist.

Belátható, hogy egy vektortérben bármely két bázis azonos elemszámú.

Egy V vektortér **dimenzióján** egy bázisának az elemszámát értjük. Ha a vektortérnek nincs véges bázisa, akkor a dimenziója végtelen. A $\{\boldsymbol{0}\}$ tér dimenziója 0.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ **vektorrendszer rangja** r, ha az $\boldsymbol{a_i}$ vektorok között található r lineárisan független, de $r + 1$ már nem.

Az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ vektorok által generált $\langle \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n} \rangle$ altér dimenziója az $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ vektorrendszer rangja.

Legyen $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}$ egy rögzített bázis V vektortérben. Ekkor minden $\boldsymbol{v} \in V$ egyértelműen felírható $\alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{b_n}$ alakban. Az α_i skalárokat a $\boldsymbol{v}$ **vektor**nak a $\boldsymbol{b_1}, \ldots, \boldsymbol{b_n}$ **bázis szerinti koordinátái**nak nevezzük.

2.1. 7.2.1 Feladatok

1. Egy polinomot f-fel, a polinom fokszámát $\deg f$-fel, a polinom együtthatóit α_i-vel a főegyütthatót α_n-nel jelöljük.

   Ha az $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$ és $g = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n$, akkor jelentse a két polinom összegét az $f + g = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1) x + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) x^n$, és ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor jelentse a polinom skalárral való szorzatát a $\lambda f = \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_1 x + \ldots + \lambda \alpha_n x^n$.

   Vektorteret alkotnak-e a valós együtthatós polinomok alábbi részhalmazai a valós test felett?

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

a. A pontosan 10-ed fokú polinomok: $\{f | deg f = 10 \; vagy \; f = 0\}$.

b. A legfeljebb 10-ed fokú polinomok: $\{f | deg f \leq 10 \; vagy \; f = 0\}$.

c. A legalább 10-ed fokú polinomok $\{f | deg f \geq 10 \; vagy \; f = 0\}$.

2. Döntsük el, hogy a valós számsorozatok alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e, ha a műveleteket a szokásos módon értelmezzük. A számsorozatokat (a_n)-nel jelöljük.

   a. A korlátos sorozatok.

   b. A konvergens sorozatok.

   c. A monoton növő sorozatok.

   d. A monoton sorozatok.

3. Döntsük el, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. függvények alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e? A függvények összeadását és skalárral való szorzását a szokásos módon értelmezzük.

   a. A folytonos függvények.

   b. A periodikus függvények.

4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a. Ha egy generátorrendszerhez egy tetszőleges vektort hozzáveszünk, akkor ismét generátorrendszert kapunk.

   b. Ha egy legalább kételemű generátorrendszerből egy tetszőleges vektort elhagyunk, akkor ismét generátorrendszert kapunk.

   c. Minden legalább kételemű generátorrendszerben van olyan vektor, amelyet elhagyva a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak.

   d. Ha egy generátorrendszerben van két azonos vektor, akkor ezek egyikét elhagyva a maradék rendszer továbbra is generátorrendszer marad.

   e. Ha egy generátorrendszerben van két azonos vektor, akkor ezek mindegyikét elhagyva a maradék rendszer továbbra is generátorrendszer marad.

   f. Egy legalább kételemű generátorrendszerben akkor és csak akkor van olyan vektor, amelyet elhagyva a maradék vektorok továbbra is generátorrendszert alkotnak, ha a generátorrendszer valamelyik eleme felírható a többi elem lineáris kombinációjaként.

5. Hogyan változnak egy vektor koordinátái, ha a bázisban

   a. két elemet felcserélünk,

   b. az egyik báziselemet egy nemnulla λ skalárral megszorozzuk,

   c. az egyik báziselemhez egy másik λ-szorosát hozzáadjuk.

6. Adjuk meg az összes olyan vektort, amelynek a koordinátái bármely bázisban ugyanazok.

7. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban a $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\7\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\\2\end{bmatrix}$ bázist. Adjuk meg ebben a bázisban az $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ vektorok koordinátáit!

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

8. Adott két vektor: $\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az $\boldsymbol{a_2}$ vektor koordinátáit az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ bázisra vonatkozóan!

Megoldások:

1. a) nem, b) igen, c) nem.

2. a) igen, b) igen, c) nem, d) nem.

3. a) igen, b) nem.

4. a) igaz, b) hamis, c) hamis, d) igaz, e) hamis, f) igaz.

5. a) A megfelelő két koordináta megcserélődik.

   b) Az adott koordináta $\frac{1}{\lambda}$-val szorzódik.

   c) Ha az eredeti koordináták α_i és α_j, akkor az új koordináták α_i és $\alpha_j + \lambda\alpha_i$ lesznek.

6. Csak a nullvektor ilyen.

7. Keressük azokat az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ koordinátákat, amelyekre $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & +3\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 1 \\ 2\alpha_1 & +7\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 0 \\ 5\alpha_1 & +8\alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

   Legyen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ akkor $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   A keresett koordináták: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -21 \\ 19 \end{bmatrix}$, a másik két vektor esetében rendre $\begin{bmatrix} -10 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   Ellenőrzés: $-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2} - 3\boldsymbol{e_3} \Rightarrow \boldsymbol{e_1} = a_1 - 3\boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}$,

   $\boldsymbol{a_2} = 3\boldsymbol{e_1} + 10\boldsymbol{e_2} - 4\boldsymbol{e_3} = 3(\boldsymbol{a_1} - 3\boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}) + 10\boldsymbol{e_2} - 4\boldsymbol{e_3} = 3\boldsymbol{a_1} + 1\boldsymbol{e_2} + 5\boldsymbol{e_3}$.

   Tehát az $\boldsymbol{a_2}$ vektor koordinátái az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ bázisra vonatkozóan: $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. 7.3 A bázistranszformáció és alkalmazásai

A 7.2.1 fejezet 8. feladat megoldásánál láthattuk, hogy lehetőség van a vektortér egyik bázisáról egy másik bázisra áttérni. Megmutattuk, hogy számíthatjuk ki egy adott vektor koordinátáit ebben az új bázisban.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A V vektortér egy bázisáról a vektortér egy másik bázisára való áttérést **bázistranszformáció**nak nevezzük. A bázistranszformációnak azt a speciális esetét, amikor a két bázis csak egy vektorban tér el egymástól **elemi bázistranszformáció**nak nevezzük.

Legyenek $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}, \dots, \boldsymbol{b_n}$ a V vektortér egy bázisa. Legyen $\boldsymbol{c} \in V$ $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ tetszőleges vektor, amelynek koordinátái az adott bázisra vonatkozóan $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_n$. Belátható, hogy ha $c_k \neq 0$, akkor $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_{k-1}}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b_{k+1}}, \dots, \boldsymbol{b_n}$ vektorok is bázist alkotnak V vektortérben. A $\boldsymbol{c}$ vektor annyi bázisvektor helyére vihető be, ahány zérustól különböző koordinátája van.

Vizsgáljuk meg, hogy az új bázisra való áttérés milyen változást okoz egy tetszőleges $\boldsymbol{x} \in V$ vektor koordinátáiban.

Legyen $\boldsymbol{x} \in V$ tetszőleges vektor, amelyek a $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}, \dots, \boldsymbol{b_n}$ bázisvektorok fel-használásával az $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \dots + x_k\boldsymbol{b_k} + \dots + x_n\boldsymbol{b_n}$ $(*)$ alakban, a $\boldsymbol{c}$ vektor pedig a $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \dots + c_k\boldsymbol{b_k} + \dots + c_n\boldsymbol{b_n}$ $(**)$ alakban írható.

Fejezzük ki a $\boldsymbol{b_k}$ vektort $(**)$ egyenletből:

$$\boldsymbol{b_k} = -\frac{1}{c_k}c_1\boldsymbol{b_1} - \frac{1}{c_k}c_2\boldsymbol{b_2} - \dots - \frac{1}{c_k}c_{k-1}\boldsymbol{b_{k-1}} + \frac{1}{c_k}\boldsymbol{c} - \frac{1}{c_k}c_{k+1}\boldsymbol{b_{k+1}} \dots - \frac{1}{c_k}c_n\boldsymbol{b_n}.$$

Az így kapott $\boldsymbol{b_k}$ vektort helyettesítsük a $(*)$ egyenletbe:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \dots + x_k\left(-\frac{1}{c_k}c_1\boldsymbol{b_1} - \frac{1}{c_k}c_2\boldsymbol{b_2} - \dots - \frac{1}{c_k}c_{k-1}\boldsymbol{b_{k-1}} + \frac{1}{c_k}\boldsymbol{c} - \frac{1}{c_k}c_{k+1}\boldsymbol{b_{k+1}} - \dots - \frac{1}{c_k}c_n\boldsymbol{b_n}\right) + x_{k+1}\boldsymbol{b_{k+1}} \dots + x_n\boldsymbol{b_n}.$$

$(***)$

A kapott $(***)$ egyenletből az x_k-val szorzás, és a lehetséges összevonásokat követően a következő egyenletet kapjuk:

$$\boldsymbol{x} = \left(x_1 - c_1\frac{x_k}{c_k}\right)\boldsymbol{b_1} + \left(x_2 - c_2\frac{x_k}{c_k}\right)\boldsymbol{b_2} + \dots +$$

$$+\left(x_{k-1} - c_{k-1}\frac{x_k}{c_k}\right)\boldsymbol{b_{k-1}} + \frac{x_k}{c_k}\boldsymbol{c} + \left(x_{k+1} - c_{k+1}\frac{x_k}{c_k}\right)\boldsymbol{b_{k+1}} + \dots + \left(x_n - c_n\frac{x_k}{c_k}\right)\boldsymbol{b_n}.$$

A jobb áttekinthetőség kedvéért foglaljuk az eredményeket az alábbi táblázatba:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Bázis	c	x	x koordinátái az új bázisban
b_1	c_1	x_1	$x_1 - \frac{c_1 x_k}{c_k}$
b_2	c_2	x_2	$x_2 - \frac{c_2 x_k}{c_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{k-1}	c_{k-1}	x_{k-1}	$x_{k-1} - \frac{c_{k-1} x_k}{c_k}$
b_k	c_k	x_k	$\frac{x_k}{c_k}$
b_{k+1}	c_{k+1}	x_{k+1}	$x_{k+1} - \frac{c_{k+1} x_{k+1}}{c_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_n	c_n	x_n	$x_n - \frac{c_n x_n}{c_k}$

generáló elem

1. ábra

A könnyebb számolás kedvéért tekintsük át a következő formalizmust.

Az x vektor koordinátáit az új bázisban az alábbiak szerint határozzuk meg: A generáló elem sorában lévő koordinátát, azaz x_k koordinátát osztjuk a generáló elemmel.

Az x vektor első koordinátáját az új bázisban úgy határozhatjuk meg, hogy a táblázatban, a piros kerettel jelölt téglalapban, csak a téglalap csúcsaiban lévő elemekkel kell számolnunk. Az x_1 koordinátából kivonjuk a nyíllal jelölt elemek szorzatának és a generátor elemnek a hányadosát. Az x_2 koordináta meghatározásához majd használjuk a zöld téglalapot, az eljárás hasonló. A többi koordináta is kiszámolható egy-egy megfelelő téglalap csúcsaiban található számokkal dolgozva.

Példa: Adott két vektor, $a_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $a_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$. Ezeknek a vektoroknak a koordinátái az e_1, e_2, e_3 triviális bázisra vonatkoznak. Határozzuk meg az a_2 vektor koordinátáit az a_1, e_2, e_3 bázisra vonatkozóan.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Bázis	a_1	a_2	a_2
$a_1 \to e_1$	1	3	$3 \div 1 = 3$
e_2	3	10	$10 - \frac{3 \cdot 3}{1} = 1$
e_3	-3	-4	$-4 - \frac{(-3) \cdot 3}{1} = 5$

2. ábra

Tehát $a_2 = 3a_1 + e_2 + 5e_3$.

3.1. 7.3.1 Vektorrendszer rangjának a meghatározása

Egy vektorrendszer rangjának a meghatározása a vektorrendszerben található lineárisan független vektorok számának megállapításával történik. Az előző modulban már láttunk erre megoldásokat, de most ezt a feladatot az elemi bázistranszformációval fogjuk végezni. Látni fogjuk, hogy ez a megoldás azzal az előnnyel jár, hogy kevesebb számolással jutunk ugyanahhoz a végeredményhez.

Példa: Tekintsük az $a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix}2\\4\\4\\6\end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\2\end{bmatrix}$, $a_5 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ vektorokat. Állapítsuk meg a vektorrendszer rangját, és adjuk meg, hogy milyen összefüggés van a vektorok között!

Tekintsük az alábbi táblázatot. Első lépésként az a_1 vektor kerül az e_1 vektor helyére. Az első sorból már választottunk generáló elemet, ezért csak a második, harmadik vagy negyedik sorból választhatunk ismét. A második sor minden eleme nulla, és nullát nem választhatunk generáló elemnek. A választásához szóba jöhető sor a harmadik és a negyedik. Mi a harmadik sort választottuk. Ezért a következő lépésben az a_2 vektor kerül az e_3 vektor helyére. További transzformációt már nem tudunk végezni, mert a második és a negyedik sorban csak nullák szerepelnek. Az új bázis: a_1, a_2, e_2, e_4 amelyben felírhatjuk a_3, a_4, a_5 új koordinátáit.

3.2. 7.3.2 Kompatibilitás

A b vektor kompatibilis az $a_1, \dots, a_k$ vektorok által generált altérrel, ha b eleme ennek az altérnek, azaz b felírható az $a_1, \dots, a_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa: Legyen $a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix}1\\-3\\-2\\1\end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix}3\\1\\4\\1\end{bmatrix}$, $a_4 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}$ és $b = \begin{bmatrix}4\\3\\7\\1\end{bmatrix}$.

Állapítsuk meg az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer rangját, és döntsük el, hogy a b vektor kompatibilis-e az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorokkal. Írjuk fel a b vektort az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorok lineáris kombinációjaként.

A megoldást elemi bázistranszformációval végezzük.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

			a_1	a_2	a_3	a_4	b	a_2	a_3	a_4	b	a_3	a_4	b
a_1	→	e_1	1	1	3	1	4	1	3	1	4	2	1	3
		e_2	2	-3	1	2	3	-5	-5	0	-5	0	0	0
		e_3	3	-2	4	3	7	-5	-5	0	-5	0	0	0
a_2	→	e_4	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1

$$a_3 = 2a_1 + 1a_2$$
$$a_4 = a_1$$
$$b = 3a_1 + 1a_2$$

4. ábra

Mivel az a_3, a_4 vektorok mindegyike felírható az a_1, a_2 lineáris kombinációjaként, a vektorrendszer rangja kettő.

Mivel $b = 3a_1 + 1a_2$, ezért b kompatibilis az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszerrel.

3.3. 7.3.3 Mátrix rangjának a meghatározása

A hatodik modulban definiáltuk, hogy az A mátrix **oszloprangja** r, ha oszlopvektorai között található r lineárisan független, de r-nél több lineárisan független oszlopvektor már nem.

Az A mátrix **sorrangja** r, ha sorvektorai között található r lineárisan független, de r-nél több lineárisan független sorvektor már nem.

Belátható, hogy egy mátrix oszloprangja és sorrangja egymással megegyezik, ezért ezeket röviden a mátrix rangjának nevezzük. Ennek ismeretében a mátrix rangjának a meghatározásához elegendő a mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangját meghatározzuk, amely ugyanúgy történik, mint ahogy azt a 7.3.1 fejezetben bemutattuk.

Példa: Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix rangját!

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_2	a_3	a_4	a_5	a_3	a_4	a_5
a_2	→	e_1	3	2	7	1	4	5	10	-5	-5	2	-1	-1
a_1	→	e_2	1	-1	-1	2	3	-1	-1	2	3	1	1	2
		e_3	2	3	8	-1	1	5	10	-5	-5	0	0	0

5. ábra

A mátrix rangja kettő.

3.4. 7.3.4 Lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval

Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha a b vektor kompatibilis az A együtthatómátrix oszlopvektorterével.

Példa: Oldjuk meg elemi bázistranszformációval a következő egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & -1 \\ & +2x_2 & & +2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \end{array}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A számításokat az előző példák alapján végezzük, de a táblázatban az oszlopvektorok alatt az oszlopvektorokhoz tartozó ismeretleneket is jelöljük.

Továbbá, a generáló elem oszlopát is tovább szerepeltetjük a táblázatban úgy, hogy a generáló elem helyett 1-et írunk, az összes többi elem pedig nulla. Látni fogjuk, hogy ezzel a jelöléssel az utolsó táblázatból a lineáris egyenletrendszer megoldása könnyen láthatóvá válik.

A táblázat elkészítését követően az egyenletrendszer megoldásának befejezéséhez több lehetőség közül választhatunk. Az egyik lehetőség szerint abból indulunk ki, hogy a $\boldsymbol{b}$ vektor felírható az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ vektorok lineáris kombinációjaként, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a_1} + 2\boldsymbol{a_2}$ továbbá $\boldsymbol{a_3} = -\boldsymbol{a_1}$ és $\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$.

Tudjuk, hogy az egyenletrendszer úgy írható, hogy $x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3\boldsymbol{a_3} + x_4\boldsymbol{a_4} = \boldsymbol{b}$, ahol $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}$ az együtthatómátrix oszlopvektorai és x_1, x_2, x_3, x_4 az ismeretlenek.

Helyettesítsük az egyenletbe a vektorokra kapott összefüggéseket:

$$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + x_3(-\boldsymbol{a_1}) + x_4(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) = \boldsymbol{a_1} + 2\boldsymbol{a_2}.$$

Az egyenletet nullára redukálva és rendezve azt kapjuk, hogy:

$$(x_1 - x_3 + x_4 - 1)\boldsymbol{a_1} + (x_2 + x_4 - 2)\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}.$$

Mivel az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ vektorok lineárisan független rendszert alkotnak, ezért a lineáris függetlenség definíciója szerint:

$$x_1 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 + x_3 - x_4,$$

$$x_2 + x_4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - x_4,$$

ahol $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ szabad ismeretlenek.

Ez a megoldás szemléletesen mutatja a lineáris függetlenség és az egyenletrendszer megoldhatósága közötti kapcsolatot. A bázistranszformáció lépéseit tartalmazó táblázat pedig egy gyors és áttekinthető számolási algoritmust mutat az oszlopvektorok közötti összefüggések megállapítására.

Tudunk azonban egy ennél még **gyorsabb megoldást** is bemutatni. Az elemi bázistranszformáció lépéseinél voltaképp mindig egymással ekvivalens egyenletrendszereket írtunk fel. Az utolsó táblázathoz tartozó egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +0x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 0x_1 & +x_2 & 0x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0. \end{array}$$

Természetesen ezt soha nem kell így leírnunk, de a jobb megértés kedvéért most tegyük meg. Vegyük észre, hogy ha Gauss eliminációval oldottuk volna meg a feladatot ugyanehhez az eredetivel ekvivalens egyenletrendszerhez jutottunk volna, némileg hosszabb számolás után. Innen a megoldás már az ismert algoritmus szerint folyik:

Általános megoldás:

Szabad ismeretlenek: $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Az utolsó táblázat első sorából felírjuk, hogy $x_1 - x_3 + x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 + x_3 - x_4$.

A táblázat második sorából felírhatjuk, hogy: $x_2 + x_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 - x_4$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Kötött ismeretlenek: $x_1 = 1 + x_3 - x_4$ és $x_2 = 2 - x_4$.

Partikuláris megoldás: $x_3,\ x_4$ szabadon választható. Legyen pl. $x_3 = 1,\ \ x_4 = 2,$ ekkor $x_1 = x_2 = 0$.

Bázismegoldás: A szabad ismeretleneket nullának választva: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Leolvasható, hogy az együtthatómátrix rangja kettő.

3.5. 7.3.5 Homogén lineáris egyenletrendszerek megoldása bázistranszformációval

Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha az A együtthatómátrix oszlopvektortere lineárisan összefüggő rendszert alkot.

Példa: Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & +4x_2 & +5x_3 & = & 0. \end{array}$$

A bázistranszformáció táblázata hasonló az előzőekhez, de itt a $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ vektort nem szerepeltetjük, mert ez a transzformáció során végig nulla marad.

Általános megoldás:

Szabad ismeretlen: $x_3 \in \mathbb{R}$.

A táblázat második sorának utolsó része alapján felírhatjuk, hogy: $8x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{8}x_3$.

A táblázat első sorának utolsó része alapján felírhatjuk, hogy $x_1 - 6x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 6x_2 = -\frac{3}{4}x_3$.

Kötött ismeretlenek: x_1 és x_2.

Partikuláris megoldás:

A szabad ismeretlen $x_3 := -8$ választása esetén $x_2 = 1$ és $x_1 = 6$.

3.6. 7.3.6 Feladatok

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket elemi bázistranszformációval.

Adjuk meg a partikuláris és bázismegoldást is!

Milyen összefüggések mondhatók az együtthatómátrix oszlopvektorterére? Kompatibilis-e a $\boldsymbol{b}$ vektor az együtthatómátrix oszlopvektorterével? Mennyi az együtthatómátrix rangja?

1. $$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 5 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 7 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & & = & 5 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & & -x_3 & -2x_4 & -4x_5 & = & 2 \end{array}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

3.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & +x_2 & & = & 5 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 1 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 11 \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 16 \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ x_1 & +17x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{array}$$

Határozzuk meg az $\alpha,\ \beta$ paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszereknek

a. ne legyen megoldása

b. pontosan egy megoldása legyen,

c. végtelen sok megoldása legyen!

10.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -x_1 & & +\alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & & +x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & +\alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & \beta \\ -2x_1 & +x_2 & +\alpha x_3 & = & -1 \end{array}$$

Megoldások:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

1.
$$\begin{array}{|rrrrcr|}
x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\
x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \\
x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 5
\end{array}$$

A bázistranszformáció táblázata:

Az együtthatómátrix oszlopvektorterére mondható állítások:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_2 &= -2\boldsymbol{a}_1, \\
\boldsymbol{a}_3 &= \boldsymbol{a}_1, \\
\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}_4.
\end{aligned}$$

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

Általános megoldás:

Kötött ismeretlenek: $x_4 = 1$, $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = 2x_2 - x_3$.

Szabad ismeretlenek: $x_2,\ x_3 \in \mathbb{R}$.

Bázismegoldás: $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 1.$

Partikuláris megoldás: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$.

2.
$$\begin{array}{|rrrrrcr|}
x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +x_5 & = & 7 \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & -2x_4 & & = & 5 \\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & +3x_5 & = & 6 \\
2x_1 & & -x_3 & -2x_4 & -4x_5 & = & 2
\end{array}$$

A bázistranszformáció táblázata:

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5	b
a_1	→	e_1	1	2	0	1	1	7	1	0	0	-1	-1	3
a_3	→	e_2	0	-3	1	-3	-1	-2	0	0	1	0	2	4
a_2	→	e_3	0	4	0	4	4	8	0	1	0	1	1	2
		e_4	0	-7	0	-7	-7	-14	0	0	0	0	0	0

10. ábra

Az együtthatómátrix oszlopvektorterére mondható állítások:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_4 &= -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4, \\
\boldsymbol{a}_5 &= -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3, \\
\boldsymbol{b} &= 3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3.
\end{aligned}$$

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 3.$

Általános megoldás:

Kötött ismeretlenek: $x_1 - x_4 - x_5 = 3 \implies x_1 = 3 + x_4 + x_5,$

$x_2 + x_4 + x_5 = 2 \implies x_2 = 2 - x_4 - x_5,$

$x_3 + 2x_5 = 4 \implies x_3 = 4 - x_5.$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Szabad ismeretlen: $x_4,\ x_5 \in \mathbb{R}$.

Bázismegoldás: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.$

Partikuláris megoldás: $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_4 := 1,\ x_5 := 0.$

3.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 6 \\ x_1 & +x_2 & & = & 5 \end{array}$$

A bázistranszformáció táblázata:

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b
a_1	→	e_1	1	1	-1	4	1	1	-1	4	1	1	0	5	1	0	0	2
		e_2	1	-1	1	0	0	-2	2	-4	0	-2	0	-6	0	0	0	0
a_2	→	e_3	-1	1	1	2	0	2	0	6	0	2	0	6	0	1	0	3
		e_4	1	1	1	6	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	→	e_5	1	1	0	5	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

11. ábra

$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$

Az együtthatómátrix oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

Az egyenletrendszernek egy megoldása van: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1.$

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

4.
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 7 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 1 \end{array}$$

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	b
a_1	→	e_1	1	1	3	1	4	1	1	3	1	4	1	0	2	1	3
		e_2	2	-3	1	2	3	0	-5	-5	0	-5	0	0	0	0	0
		e_3	3	-2	4	3	7	0	-5	-5	0	-5	0	0	0	0	0
a_2	→	e_4	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1

12. ábra

Az együtthatómátrix oszlopvektorterére mondható állítások:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a}_3 & = & 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{a}_4 & = & \boldsymbol{a}_1, \\ \boldsymbol{b} & = & 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2. \end{array}$$

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 3$

Általános megoldás:

Kötött ismeretlenek: $x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \implies x_1 = 3 - 2x_3 - x_4,$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$x_2 + x_3 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = 1 - x_3.$$

Szabad ismeretlen: $x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}$.

Bázismegoldás: $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$

Partikuláris megoldás: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1$.

5. $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 11 \end{array}$$

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b
a_1	→	e_1	3	2	1	5	-1	0	-5	-17	1	0	5	17	1	0	0	2
		e_2	2	3	1	1	-4	0	-8	-32	0	0	12	36	0	0	1	3
a_2	→	e_3	2	1	3	11	2	1	3	11	0	1	-7	-23	0	1	0	-2

13. ábra

Az együtthatómátrix oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3.$

Az egyenletrendszernek egy megoldása van: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$.

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

6. $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \end{array}$$

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b
a_1	→	e_1	1	1	-3	-1	1	1	-3	-1	1	0	-3	-3	1	0	0	0
		e_2	2	1	-2	1	0	-1	4	3	0	0	4	5	0	0	0	1
a_2	→	e_3	1	1	1	3	0	0	4	4	0	0	4	4	0	0	1	1
		e_4	1	2	-3	1	0	1	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0

14. ábra

Az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert a kékkel jelölt sor tilos sora:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \neq 1$.

7. Általános megoldás: $x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}$ szabad ismeretlenek,

$x_2 = -2 + x_4,\ x_1 = 6 - x_3$ kötött ismeretlenek.

8. $$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

A homogén lineáris egyenletrendszer táblázata:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	a_4 x_4	a_5 x_5
a_1	$\to$	e_1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	0	2	-2	2	1	0	0	-2	2
a_3	$\to$	e_2	2	1	-3	-1	1	0	-1	-1	-3	3	0	0	-4	0	0	0	0	1	0	0

15. ábra

Az együtthatómátrix oszlopvektorterére mondható állítások:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_4} &= -2\boldsymbol{a_1} + 3\boldsymbol{a_2}, \\ \boldsymbol{a_5} &= 2\boldsymbol{a_1} - 3\boldsymbol{a_2}. \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix rangja $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

Általános megoldás:

Kötött ismeretlenek: $x_1 = 2x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -3x_4 + 3x_5, \quad x_3 = 0.$

Szabad ismeretlenek: $x_4, \ x_5 \in \mathbb{R}.$

9. Általános megoldás: $x_3 \in \mathbb{R},$ szabad ismeretlen.

Kötött ismeretlenek: $x_1 = -\frac{11x_3}{7}, \ x_2 = -\frac{x_3}{7}.$

10.
$$\begin{array}{|rrrcr|} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -x_1 & & +\alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$

A bázistranszformáció alkalmazása során kapott α, β paramétereket tartalmazó táblázat:

			a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b	a_1 x_1	a_2 x_2	a_3 x_3	b
a_1	$\to$	e_1	1	2	1	4	1	2	1	4	1	0	-1	2
a_2	$\to$	e_2	1	1	-1	3	0	-1	-2	-1	0	1	2	1
			-1	0	α	β	0	2	$\alpha+1$	$\beta+4$	0	0	$\alpha-3$	$\beta+2$

16. ábra

a. Ha $\alpha = 3$ és $\beta \neq -2$, akkor az utolsó egyenlet $0 \cdot x_3 = \beta + 2 \neq 0$ alakú, ezért nincs megoldás.

b. Ha $\alpha \neq 3$, akkor egyértelmű megoldást kapunk.

c. Ha $\alpha = 3$ és $\beta = -2$, akkor az utolsó egyenlet $0 \cdot x_3 = 0$ alakú, tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

11. a) Ha $\alpha = 2$ és $\beta \neq 10$, akkor nincs megoldás.

b) Ha $\alpha \neq 2$, akkor egyértelmű megoldást kapunk.

c) Ha $\alpha = 2$ és $\beta = 10$, akkor végtelen sok megoldás van.

12. a) Ha $\alpha = 0$ és $\beta \neq -1$, akkor nincs megoldás.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

b) Ha $\alpha \neq 0$, akkor egyértelmű megoldást kapunk.

c) Ha $\alpha = 0$ és $\beta = -1$, akkor végtelen sok megoldás van.

4. 7.4 Lineáris leképezések

Legyenek V_1 és V_2 vektorterek. Az $A: V_1 \to V_2$ függvényt (homogén) **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha művelettartó, azaz

1. minden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V_1$ esetén $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}) + A(\boldsymbol{v})$,
2. minden $\boldsymbol{u} \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $A(\lambda \cdot \boldsymbol{u}) = \lambda \cdot A(\boldsymbol{u})$.

A lineáris leképezés tehát minden $\boldsymbol{u} \in V_1$ elemhez egyértelműen hozzárendel egy $A(\boldsymbol{u}) \in V_2$ elemet. Ahol ez nem idézhet elő félreértést, az $A(\boldsymbol{u})$ helyett $A\boldsymbol{u}$-t fogunk írni.

Vezessük be a következő jelölést: a lineáris leképezések $V_1 \to V_2$ halmazát jelöljük $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$-vel. Ekkor $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ jelöli a $V_1 \to V_2$ lineáris leképezések halmazának egyik elemét.

Ha $\boldsymbol{x} \in V_1$ és $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, akkor a $\boldsymbol{x}$ vektort az $\boldsymbol{y}$ vektor **ősképének** nevezzük. Ha A nem injektív leképezés, akkor $\boldsymbol{x}$ nem egyértelmű.

A műveleteket azért jelöltük különböző színekkel, mert a pirossal jelölt összeadás és skalárral való szorzás a V_1-beli, a zöld pedig a V_2-beli műveletet jelöl.

A lineáris leképezés összegtartásából és skalárszorzat tartásából könnyen belátható, hogy a nullelemet, az ellentettet és a lineáris kombinációt is megtartja, azaz, ha $\mathbf{0_1}$ jelöli a V_1-beli nullelemet, és $\mathbf{0_2}$ jelöli a V_2-beli nullelemet, akkor

i. $A(\mathbf{0_1}) = \mathbf{0_2}$,

ii. $A(-\boldsymbol{u}) = -A\boldsymbol{u}$,

iii. $A(\alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{u_n}) = \alpha_1 A\boldsymbol{u_1} + \alpha_2 A\boldsymbol{u_2} + \ldots + \alpha_n A\boldsymbol{u_n}$.

Az $A: V_1 \to V_2$ lineáris leképezés **képtere** a képelemek halmaza, A értékkészlete, azaz

$\mathrm{Im}A = \{\boldsymbol{y} \in V_2 \mid \exists\, \boldsymbol{x} \in V_1 \;\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$.

Az $A: V_1 \to V_2$ lineáris leképezés **magtere** a V_2 nullvektorára képező elemek halmaza, azaz

$\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$.

Belátható, hogy $\mathrm{Im}A$ altere V_2-nek, és $\mathrm{Ker}A$ altere V_1-nek.

Speciálisan azokat a lineáris leképezéseket, amikor $V = V_1 = V_2$, a V vektortér **lineáris transzformációinak** nevezzük. Lineáris transzformáció esetén előfordulhat, hogy a képtér nem a teljes V, továbbá több vektornak is lehet ugyanaz a képe.

Vezessük be a következő jelölést: a lineáris transzformációinak halmazát jelöljük $\mathrm{Hom}V$-vel, ekkor $A \in \mathrm{Hom}V$ azt jelenti, hogy a $V \to V$ lineáris transzformáció.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Példák lineáris transzformációkra

1. Tekintsük a háromdimenziós $\mathbb{R}^3$ teret, és legyen $F \in \mathrm{Hom}\mathbb{R}^3$. F jelentse az (x, y) sík z tengely körül adott irányú és adott szögű elforgatását. Bármely $\boldsymbol{x}$ vektornak az az $A\boldsymbol{x}$ vektor felel meg, amelybe az illető vektor az adott forgatás révén átmegy. Nem nehéz belátni, hogy az 1) és a 2) feltétel teljesül. Igazoljuk az 1) feltételt. $F(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ vektort összeadjuk, azután pedig a kapott vektort elforgatjuk. Az $F\boldsymbol{x}_1 + F\boldsymbol{x}_2$ viszont azt jelenti, hogy $\boldsymbol{x}_1$-et és $\boldsymbol{x}_2$-t előbb elforgatjuk, és csak azután összegezzük. Világos, hogy az eredmény mindkét esetben ugyanaz.

2. Tekintsük azt a $T \in \mathrm{Hom}\ \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt, amely minden $\mathbb{R}^3$-beli vektorhoz hozzárendeli az (x, y) síkra vonatkozó tükörképét.

3. Legyen $A \in \mathrm{Hom}\ \mathbb{R}^n$ és legyen $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{nxn}$ mátrix. Feleltessük meg minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektornak az $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ vektort, amelyet úgy kapunk, hogy az $\boldsymbol{x}$ vektort szorozzuk az $\boldsymbol{A}$ mátrixszal, ez a hozzárendelés az $\mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformációja.

4. Tekintsük a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomok n dimenziós vektrorterét. Legyen $A(P) = P'$, ahol P' a P polinom deriváltja. Ez a transzformáció lineáris, ugyanis

   1. $(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$,

   2. $(\lambda P)' = \lambda P'$.

A lineáris transzformációk között különleges szerepet játszik a következő két egyszerű transzformáció:

Az $E \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformációt **egységtranszformáció**nak vagy **identitás**nak nevezzük, ha minden vektornak önmagát felelteti meg, azaz

$$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

A $O \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformációt **zérustranszformációnak** nevezzük, ha minden vektornak a zérusvektort felelteti meg.

Ha egy $V_1 \to V_2$ lineáris leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít V_1 és V_2 között, akkor **izomorfizmusnak** nevezzük. Az izomorfizmus már a magtérről és a képtérről felismerhető. Belátható, hogy egy $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ lineáris leképezés pontosan akkor izomorfizmus, ha $\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{0}\}$ és $\mathrm{Im}A = V_2$.

Két **vektorter**et **izomorf**nak nevezünk, ha van közöttük izomorfizmus. Ha V_1 vektortér izomorf V_2 vektortérrel, azt a $V_1 \cong V_2$-vel jelöljük.

Az izomorf vektorterek algebrai szempontból megkülönböztethetetlenek egymástól. Az izomorfia reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz

i. $V_1 \cong V_1$,

ii. ha $V_1 \cong V_2$, akkor $V_2 \cong V_1$,

iii. ha $V_1 \cong V_2$ és $V_2 \cong V_3$, akkor $V_1 \cong V_3$.

Belátható, ha U és V véges dimenziójú vektorterek, akkor U és V pontosan akkor izomorf, ha $\dim U = \dim V$.

4.1. 7.4.1 A mátrixok és a lineáris leképezések összefüggése

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A fejezetben csak véges $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorterekkel foglalkozunk. $c_1, c_2, \dots, c_n$ leképezések egyik fontos tulajdonsága, hogy ha $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ térben, és tetszőleges elemek a vektortérben, akkor pontosan egy olyan lineáris leképezés létezik, amelyre

$$Ab_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

azaz amely a b_i báziselemeket rendre a c_i elemekbe viszi.

Ennek a tételnek a felhasználásával a lineáris leképezéseket általában úgy adjuk meg, hogy a báziselemek képeit választjuk meg. **Belátható, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a véges dimenziójú vektorterek lineáris leképezése és a mátrixok között.** Ez a fontos tétel lehetővé teszi, hogy a lineáris leképezéseket mátrixokkal adjuk meg, ugyanakkor minden mátrix egy lineáris leképezést is reprezentál. Így leképezésekre vonatkozó állításokat mátrixok segítségével igazolhatunk. Gyakorlati alkalmazásokban leképezések helyett szinte mindig mátrixokkal dolgozunk.

Legyen a V_1 vektortér egy bázisa $a_1, a_2, \dots, a_n$, és legyen a V_2 vektortér egy bázisa $b_1, b_2, \dots, b_k$. Egy $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ lineáris leképezés $a_1, a_2, \cdots a_n$ és $b_1, b_2, \cdots b_k$ bázispár szerinti mátrixán azt a $k \times n$-es mátrixot értjük, amelynek j-edik oszlopában az Aa_j vektornak a $b_1, b_2, \cdots, b_k$ bázis szerinti koordinátái állnak. Ezt a mátrixot $[A]_{a,b}$-vel jelöljük.

Részletezve: $Aa_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{k1}b_k,$

$Aa_2 = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{k2}b_k,$

$\vdots$

$Aa_n = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{kn}b_k.$

Ekkor
$$[A]_{a,b} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{bmatrix}.$$

Az $[A]_{a,b}$ mátrix oszlopvektorai az $a_1, a_2, \dots, a_n$ báziselemek képei $b_1, b_2, \dots, b_k$ báziselemek segítségével felírva. A mátrix természetesen függ a bázisok választásától, ugyanis más bázispár esetén a mátrix is változik.

Lineáris transzformációk esetén, ha a bázis az $e_1, \dots, e_n$, ún. triviális bázis, akkor az $[A]_{e,e}$ jelölés helyett röviden az $A := [A]_{e,e}$ jelölést alkalmazzuk.

A hatodik modulban definiáltuk a szám-n-esek, az oszlopmátrix ill. az oszlopvektor fogalmát. Megmutattuk, hogy ezek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha ismert egy $V_1 \to V_2$ lineáris leképezés mátrixa, akkor egy tetszőleges $v \in V_1$-beli vektornak hogy adhatjuk meg a V_2-beli képét.

Legyen V_1 vektortér egy bázisa az $a_1, a_2, \dots, a_n$ és legyen $v \in V_1$ egy tetszőleges vektor. Tudjuk, hogy a v vektor felírható az $a_1, a_2, \cdots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát $v = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$ alakban. A $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n$ számokat a v vektor $a_1, a_2, \dots, a_n$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Látni fogjuk, hogy célszerű a v vektor koordinátáit oszlopmátrixban felírni, és mivel a koordináták függnek a bázis választásától, érdemes a jelölésben azt a bázist is szerepeltetni, amelyben a vektor koordinátáit felírtuk:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$[\boldsymbol{v}]_a = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}.$$

Legyen a V_1 vektortér egy bázisa az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots \boldsymbol{a_n}$, és legyen a V_2 vektortér egy bázisa $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_k}$, $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ lineáris leképezés, és $\boldsymbol{v} \in V_1$ tetszőleges vektor.

Ekkor $\boxed{[A\boldsymbol{v}]_b = [A]_{a,b}[\boldsymbol{v}]_a}$,

ahol a jobb oldalon két konformábilis mátrix szorzata áll, ugyanis $[A]_{a,b} \in \mathcal{M}^{kxn}$ és $[\boldsymbol{v}]_a \in \mathcal{M}^{nx1}$, tehát a szorzás eredménye: $[A\boldsymbol{v}]_b \in \mathcal{M}^{kx1}$.

Példa

Lineáris leképezés-e az az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amely minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $L\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektort rendeli hozzá. Válasszuk $\mathbb{R}^3$-ban az $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ triviális bázist. Ha L lineáris leképezés, adjuk meg a leképezés mátrixát, és a $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ vektor képének koordinátáit a triviális bázisban! Mi lesz a leképezés képtere és magtere?

Ellenőrizzük, hogy teljesül-e az $L(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha L\boldsymbol{x} + \beta L\boldsymbol{y}$ feltétel!

Mivel $L(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$, tehát a leképezés lineáris transzformáció, amely, mint geometriából már ismert, az (x, y) síkra való merőleges vetítés.

Mivel:

$\boldsymbol{Le_1} = 1\boldsymbol{e_1} + 0\boldsymbol{e_2} + 0\boldsymbol{e_3}$,

$\boldsymbol{Le_2} = 0\boldsymbol{e_1} + 1\boldsymbol{e_2} + 0\boldsymbol{e_3}$,

$\boldsymbol{Le_3} = 0\boldsymbol{e_1} + 0\boldsymbol{e_2} + 0\boldsymbol{e_3}$,

a leképezés mátrixa: $[L]_{e,e} = \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A $\boldsymbol{v}$ vektor merőleges vetítettjének a koordinátái:

$$[L\boldsymbol{v}]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Im}L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$, tehát az (x, y) sík.

$\mathrm{Ker}L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \ x_1 = x_2 = 0\}$ (tehát a $P(0,0,x_3)$ koordinátájú pontok), vagyis a harmadik tengely.

4.2. 7.4.2 Sajátérték, sajátvektor

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Ebben a fejezetben véges dimenziós vektorterek olyan lineáris transzformációival foglalkozunk, amelyekhez létezik olyan nemnulla vektor, melyet a transzformáció a skalárszorosába képez, azaz e vektorok a transzformáció során a saját egyenesükben maradnak. Ezeket a vektorokat sajátvektoroknak, a megfelelő skalárt, azaz a „nagyítás” mértékét sajátértéknek nevezzük.

Egy $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt az $A \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformáció **sajátérték**ének nevezünk, ha létezik olyan $\boldsymbol{v} \in V$ nemnulla vektor, amelyre $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Egy $\boldsymbol{v} \in V$ nemnulla vektort, az $A \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformáció **sajátvektor**ának nevezünk, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

A sajátérték definíciójában a nullvektort mindenképpen ki kell zárni, mert az $A\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0}$ minden λ-ra fennáll, vagyis a kikötés nélkül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátérték lenne.

A sajátvektoroknál tehát a sajátérték egyértelműsége miatt érdemes kihagyni a nullvektort, mert így belátható, hogy minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik.

A sajátértékek köréből nem zártuk ki a $\lambda = 0$ skalárt. A nulla pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $KerA \neq \{\boldsymbol{0}\}$, a sajátvektorok pedig a magtér nemnulla elemei.

Egy adott λ sajátértékhez tartozó összes sajátvektor és a nullvektor alteret alkotnak. Ezt az alteret a λ-hoz tartozó **sajátaltér**nek nevezzük. A sajátérték definíciója alapján a sajátaltér nem állhat egyedül a nullvektorból.

A következő tétel a **sajátértékek megkereséséhez** nyújt segítséget:

Legyen $A \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformáció és $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ bázis V-ben. Egy $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha az $[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}]_a$ mátrix determinánsa nulla:

$$det([\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}]_a) = 0.$$

Ugyanis λ akkor és csak akkor sajátérték, ha van olyan $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektor, amelyre $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, azaz $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ezzel ekvivalens az $[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}]_a[\boldsymbol{x}]_a = [\boldsymbol{0}]$ homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha $det([\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}]_a) = 0.$

Az $A \in \mathrm{Hom}V$ lineáris transzformáció **karakterisztikus polinomján** a $k_A(\lambda) = det[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}]$ polinomot értjük, amely független a V-beli bázis választásától.

Példa: Határozzuk meg az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixszal megadott lineáris transzformáció sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

$$[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{bmatrix},$$

$$det\,[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}] = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(4-\lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

A karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -2$.

A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$\boldsymbol{\lambda_1} = 1$ sajátérték esetén:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{bmatrix}-5-\lambda & 6\\ -3 & 4-\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-6 & 6\\ -3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-6x_1+6x_2=0\\ -3x_1+3x_2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix},$$ ahol $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lambda_1=-2$ sajátérték esetén:

$$\begin{bmatrix}-5-\lambda & 6\\ -3 & 4-\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & 6\\ -3 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-3x_1+6x_2=0\\ -3x_1+6x_2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t\\ t\end{bmatrix},$$

ahol $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4.3. 7.4.3 Feladatok

1. Legyen $A\in \mathrm{Hom}\,\mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely a vektoroknak az (x,y) síkra való vetítéséből áll. Láttuk, hogy triviális bázisban a transzformáció mátrixa: $A_e=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. Határozzuk meg ugyanennek a transzformációnak a mátrixát az $\boldsymbol{e_1'},\boldsymbol{e_2'},\boldsymbol{e_3'}$ bázisra vonatkozólag, ahol

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e_1'} &= \boldsymbol{e_1},\\ \boldsymbol{e_2'} &= \boldsymbol{e_2},\\ \boldsymbol{e_3'} &= \boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_2}.\end{aligned}$$

2. Legyen a V_1 vektortér egy bázisa $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n}$, és legyen a V_2 vektortér egy bázisa $\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_k}$. Hogyan változik meg egy $A\in\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ leképezés mátrixa, ha a megfelelő bázisban

   a. $\boldsymbol{a_1}$-t és $\boldsymbol{a_2}$-t felcseréljük,

   b. $\boldsymbol{b_1}$-t és $\boldsymbol{b_2}$-t felcseréljük,

   c. $\boldsymbol{a_3}$ helyett $\lambda\boldsymbol{a_3}$-t veszünk, ahol $\lambda\neq 0$,

   d. $\boldsymbol{b_3}$ helyett $\lambda\boldsymbol{b_3}$-t veszünk, ahol $\lambda\neq 0$,

   e. $\boldsymbol{a_3}$ helyett $\boldsymbol{a_3}+\mu\boldsymbol{a_2}$-t veszünk,

   f. $\boldsymbol{b_3}$ helyett $\boldsymbol{b_3}+\mu\boldsymbol{b_2}$-t veszünk?

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixokkal megadott lineáris transzformációk sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat!

   a. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&0\end{bmatrix}$,

   b. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&-1\\8&2\end{bmatrix}$,

   c. $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-1\\2&-1&-2\end{bmatrix}$,

   d. $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-2&2&2\\-3&3&2\\-1&1&2\end{bmatrix}$,

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

e. $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

f. $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldások:

1. A transzformáció mátrixa új bázisban: $A_{e'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. a) Az első két oszlop felcserélődik.

   b) Az első két sor felcserélődik.

   c) A harmadik oszlop λ-val szorzódik.

   d) A harmadik sor $\frac{1}{\lambda}$-val osztjuk.

   e) A harmadik oszlophoz hozzáadódik a második oszlop μ-szöröse.

   f) A harmadik sorból levonjuk a második sor μ-szörösét.

3. a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

   $[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix}$.

   $det\,[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

   A karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásai $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -1$.

   A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

   $\lambda_1 = 2$ sajátérték esetén:

   $$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix},$$

   ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   $\lambda_1 = -1$ sajátérték esetén:

   $$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix},$$

   ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) Nincsenek valós sajátértékek.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

c) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$det\,[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3.$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

A sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t+s}{2} \\ t \\ s \end{bmatrix}$$ ahol $t, s, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$.

A $\lambda_1 = 0$-hoz tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A $\lambda_2 = 1$-hez tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{bmatrix}$, ahol $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A $\lambda_3 = 2$-höz tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} r \\ r \\ r \end{bmatrix}$, ahol $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$.

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A $\lambda_2 = -1$-hez tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix}$, ahol $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A $\lambda_3 = -2$-höz tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} r \\ 2r \\ 3r \end{bmatrix}$, ahol $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f) A sajátérték: $\lambda = 1$

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor: $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$, ahol $t, s \in \mathbb{R}, (t,s) \neq (0,0)$.

5. 7.5 Lineáris programozás

A lineáris programozás általános feladata $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris függvény szélsőértékének keresése bizonyos feltételek mellett. A feltételek lineáris egyenletek, vagy egyenlőtlenségek és a változókra vonatkozó nemnegativitási követelmények által meghatározott konvex poliéder. A gyakorlati feladatok általában a következő ún. **normál** alakban adottak.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, azaz adott $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ mellett $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Keressük ennek az ún. **célfüggvény**nek a maximumát az alábbi feltételek mellett:

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$

Az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix}$ mátrixot **technológiai együttható mátrix**nak, elemeit **technológiai együtthatók**nak nevezzük.

A $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vektor a **kapacitásvektor**, a $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ vektor elemei a célfüggvény együtthatói.

Ha az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ismeretlen kielégíti a feladat $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ feltételeit, és a cálfüggvény értéke maximális e feltételek mellett, akkor $\boldsymbol{x}$ neve optimális megoldás. Előfordulhat, hogy több optimális megoldás is van, akkor **alternatív optimum**ról beszélünk. Természetesen az is előfordulhat, hogy a feladatnak nincs megoldása.

A lineáris programozási feladat grafikus és szimplex módszerrel történő megoldását a mintapéldákon keresztül mutatjuk be.

1. **Példa:** *Egy magyarországi divatcég külföldi megrendelésre dolgozik. Farmernadrágokat és kabátokat gyártanak. A nadrágok elkészítéséhez egy normaórára, a kabátok elkészítéséhez két normaórára van szükség. A nadrág és a kabát mindegyikéhez két méter anyagra van szükség, de a nadrághoz még 2m szegődíszt is használniuk kell, amit csak importból tudnak beszerezni. Az üzem napi 10 normaórában tud termelni. Alapanyagból napi 12 méter áll rendelkezésre, az import szegőből 8 métert tudnak naponta beszerezni. A nadrágokon darabonként 2000Ft, a kabátokon 3000Ft haszna van a cégnek. Hány nadrágot és kabátot gyártsanak, hogy a nyereség maximális legyen?*

A jobb áttekinthetőség kedvéért foglaljuk a feladat adatait egy táblázatba:

	Nadrág	Kabát	Kapacitás
Normaóra	1	2	10
Alapanyag	2	2	12
Import	2		8
Nyereség	2000Ft	3000Ft	

17. ábra

A táblázat segítségével a következő **matematikai modell** írható fel:

Tegyük fel, hogy x_1 darab nadrágot, és x_2 darab kabátot gyártunk. Mivel negatív számú munkadarabot nem termelünk, ezért feltesszük, hogy

$x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$.

Csak annyi terméket gyárthatunk, amely normaóra, alapanyag és import tekintetében nem lépi túl azt a kapacitást, amely a rendelkezésünkre áll. Ezen feltételek alapján az alábbi egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

normaórára: $x_1 + 2x_2 \leq 10,$

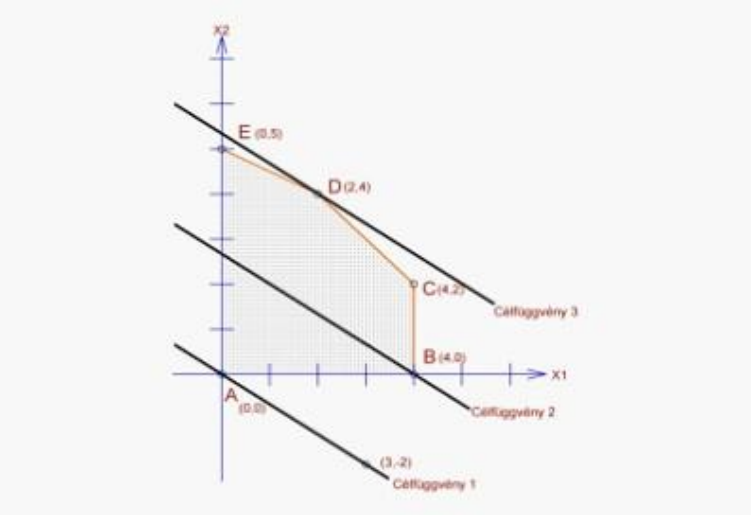
Created by XMLmind XSL-FO Converter.

alapanyagra: $2x_1 + 2x_2 \leq 12,$

importra: $2x_1 \leq 8.$

A maximalizálandó célfüggvény $2000x_1 + 3000x_2$, amit a következőképpen jelölhetünk: $2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow$maximális.

Kiemeléssel látható, hogy a $2x_1 + 3x_2 \rightarrow$maximális feladat megoldásai azonosak az eredetiével.



18. ábra

A feladat **grafikus megoldása**:

A feltételek a sík egy poligonját jelölik ki. A poligon csúcspontjait extremális pontoknak nevezzük. Ezek a feladatban $A(0;0), B(4;0), C(4;2), D(2;4), E(0;5).$ A poligon minden $(x_1;x_2)$ belső és határoló pontja megoldás, mert kielégíti a feladatban meghatározott feltételeket. E megoldások közül keressük az optimálisakat, vagyis azokat, amelyek az üzem számára a maximális bevételt jelentik. Ezeket a megoldásokat megkapjuk a célfüggvény ábrázolásával. A célfüggvény minimuma az $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ feltételek miatt nyilván nulla. Először ábrázoljuk a célfüggvény zérushelyeit, amelyek a $2x_1 + 3x_2 = 0$ egyenletű egyenes pontjai. A feltételeknek csak $x_1 = x_2 = 0$ felel meg, ami azt jelenti, hogy nem gyártunk semmit. Az egyenest párhuzamosan eltolva a pozitív síknegyedben, az eltolt egyenes szakaszban metszi a poligont, majd csak a $D(2;4)$ csúcspontban. Belátható, hogy ez az optimális megoldás.

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a célfüggvény értékeit az extremális pontokban:

Koordináták	Nyereség
A(0;0)	0
B(4;0)	8000
C(4;2)	14000
D(2;4)	16000
E(0;5)	15000

19. ábra

A grafikus megoldásból látható, hogy az az optimális megoldás, ha két farmernadrágot és négy kabátot gyártanak. Ekkor a cég napi nyeresége maximális, 16.000 Ft.

A grafikus megoldás ebben az egyszerű kétváltozós esetben nagyon kedvezőnek tűnik. A gyakorlati életben természetesen több változó és több feltétel esetében kell, hogy a megoldást megadjuk, amelyhez a grafikus megoldás már nem alkalmazható.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Az alábbiakban ismertetett, **szimplex módszer** számítógépen is jól programozható megoldását adja a feladatnak. A szimplex módszer a grafikus elgondolás átfogalmazása. Már két dimenzióban is látható volt, hogy az egyenesek metszéspontját mindig a két egyenes egyenlete által alkotott lineáris egyenletrendszer megoldásával nyertük. Visszavezethetjük tehát a feladat megoldását a lineáris egyenletrendszerek megoldásának elméletéhez.

A szimplex módszer kezdőtáblája

Az a táblázat, amelynek a bal felső része a technológiai együttható mátrix, a jobb felső része a kapacitásvektor, az alsó sorban a célfüggvény együtthatói szerepelnek.

	x_1	x_2	b
u_1	1	2	10
u_2	2	2	12
u_3	2	0	8
$-z$	2	3	0

20. ábra

A szimplex módszer lépései

1. A generáló elem oszlopának kiválasztása: az alsó (piros) sorban csak nemnegatív elemhez tartozó oszlop választható. Ha az alsó sorban már csak negatív számok találhatóak, akkor az eljárás véget ért.

2. Egy oszlopban több elem található, de ezek közül nem lehet akármelyik generáló elem. A generáló elemet úgy kell kiválasztani, hogy az

   - csak pozitív lehet;

   - „szűk keresztmetszetet” kell képviselnie, tehát a b kapacitásoszlop minden elemét elosztom a kiválasztott oszlop ugyanazon sorában lévő elemével, és ezek közül az lesz a generáló elem, ahol ez a hányados a legkisebb.

3. A generáló elem helyére annak reciproka kerül.

4. A generáló elem sorát osztjuk a generáló elemmel.

5. A generáló elem oszlopát osztjuk a generáló elemmel és szorozzuk (-1)-gyel.

6. A többi hiányzó elemet az elemi bázistranszformációnál tanult lépésekkel számoljuk ki.

A szimplex táblázatok:
1. Példa Kiinduló tábla: A(0,0) pont

Az alsó sor egyetlen eleme sem negatív, tehát bármelyik oszlopot választhatjuk. Érdemes az oszlop választásakor egy másik szempontot is figyelembe venni. Ha az első oszlopot választjuk, akkor az x_1 tengely mentén fogunk elindulni az $A \to B \to C \to D$ irányban. Ez az induló táblázattal együtt négy szimplex tábla kiszámítását fogja jelenteni. Ha a második oszlopot választjuk, akkor az x_2 tengely mentén fogunk elindulni, így $A \to E \to D$ pontokon keresztül jutunk el a megoldáshoz, amely az induló táblával együtt csak három szimplex táblázat kiszámítását jelenti. Fontos, hogy megjegyezzük, ez a mérlegelési lehetőség csak most a grafikus megoldás ismeretében lehetséges. Válasszuk a második oszlopot. A generáló elem kiválasztása az ún. „szűk keresztmetszet” szerint történik:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

	x_1	x_2	b
u_1	1	2	10 (10:2=5)
u_2	2	2	12(12:2=6)
u_3	2	0	8
$-z$	2	3	0

Ez lesz a generáló elem sora.

21. ábra

A második táblázatban az $x_1 = 0$ egyenes, vagyis az x_2 tengely, és az u_1 egyenes metszéspontját számítjuk ki.

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

	x_1	u_1	b
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
u_2	1	-1	2
u_3	2	0	8
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-15

(-)Nyereség

22. ábra

$E(0;5)$ pont

Nyereség: 15000Ft

Mivel az alsó sorban van nemnegatív elem, az algoritmust tovább folytatjuk, most az u_1 és u_2 egyenesek metszéspontját számítjuk ki.

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

	x_1	u_1	b
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
u_2	1	-1	2
u_3	2	0	8
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-15

(-)Nyereség

22. ábra

$D(2;4)$ pont

Nyereség: 16000Ft

Tehát két nadrágot és négy kabátot kell gyártaniuk naponta.

2. Példa alternatív optimum meghatározásához

Egy üzem kétfajta termék előállítására alkalmas. Készítsük el az üzem maximális nyereséget hozó termelési tervét, és számítsuk ki a nyereséget az alábbi információk alapján.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$x_1 = 0$

$x_2 = 5$

	x_1	u_1	b
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
u_2	1	-1	2
u_3	2	0	8
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-15

(-)Nyereség

23. ábra

Matematikai modell:

$x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$

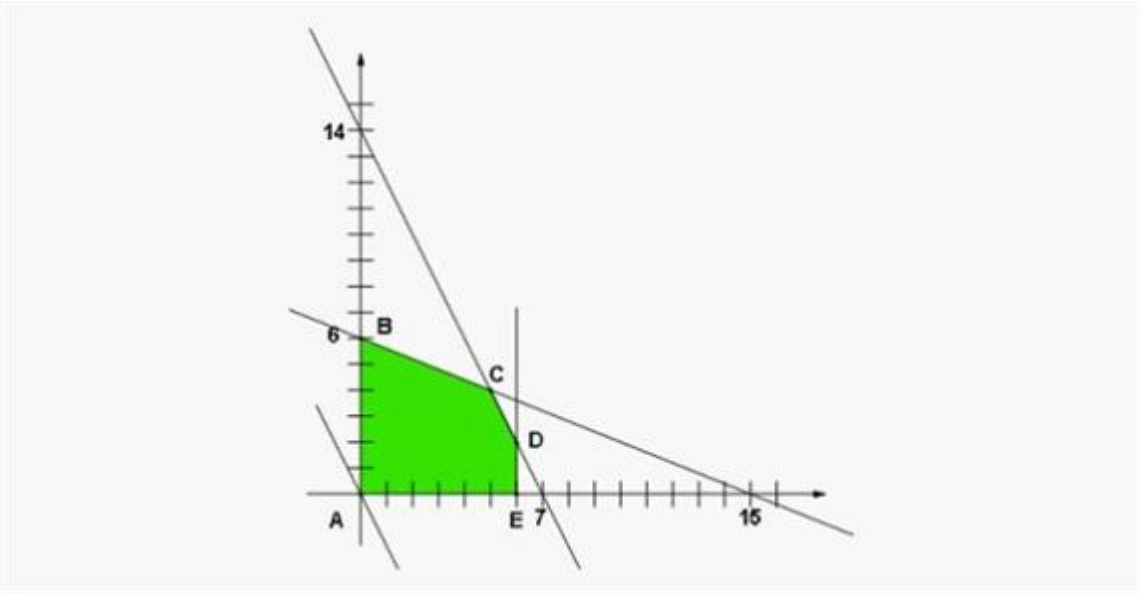
$40x_1 + 20x_2 \leq 280 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 \leq 14$

$20x_1 + 50x_2 \leq 300 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 30$

$2x_1 \qquad \leq 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 6$

Célfüggvény: $2000x_1 + 1000x_2 \rightarrow$ maximális.

Grafikus megoldás:



25. ábra

Az ábráról látható, hogy a megoldás nem egy pont, hanem a CD szakasz. Ilyenkor alternatív optimumról beszélünk, ami azt jelenti, hogy a szakasz bármely egész koordinátájú pontja megoldás.

Koordináták	Nyereség
A(0;0)	0
B(6;0)	12000
C(6;2)	14000
D(5;4)	14000
E(0;6)	6000

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

26. ábra

Az üzem gyárthat az A termékből 6 darabot és a B termékből 2 darabot vagy az A termékből 5 darabot, és a B termékből 4 darabot a maximális nyereség eléréséhez.

Megoldás szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	b
u_1	2	1	14
u_2	2	5	30
u_3	1	0	6
$-z$	2	1	0

27. ábra

	u_3	x_2	b
u_1	-2	1	2
u_2	-2	5	18
x_1	1	0	6
$-z$	-2	1	-12

28. ábra

	u_3	u_1	b
x_2	-2	1	2
u_2	8	-5	8
x_1	1	0	6
$-z$	0	-1	-14

Alternatív optimum

29. ábra

Az első oszlopból ismét választunk generálóelemet.

	u_2	u_1	b
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	4
u_3	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	1
x_1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	5
$-z$	0	-1	-14

30. ábra

Ha az első oszlopból megint választanánk generálóelemet, akkor ismét a harmadik táblázatot kapnánk. Az algoritmus véget ért.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Megoldás: alternatív optimum. Az üzem gyárthat az A termékből 6 darabot és a B termékből 2 darabot, vagy az A termékből 5 darabot és a B termékből 4 darabot a maximális nyereség eléréséhez. Lehetséges megoldások még a CD él egész koordinátájú pontjai is.

3. Példa: Oldjuk meg az alábbi normál feladatot!

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\ 3x_2 + x_3 &\leq 5 \end{aligned}$$

$$f(x) = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow max$$

Megoldás szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	x_3	b
u_1	2	3	3	7
u_2	1	2	1	3
u_3	0	3	1	5
$-z$	3	1	4	0

31. ábra

	u_2	x_2	x_3	b
u_1	-2	-1	1	1
x_1	1	2	1	3
u_3	0	3	1	5
$-z$	-3	-5	1	-9

32. ábra

	u_2	x_2	u_1	b
x_3	-2	-1	1	1
x_1	3	3	-1	2
u_3	2	4	-1	4
$-z$	-1	-4	-1	-10

33. ábra

A harmadik táblázat utolsó sorában csak negatív elemek vannak, ezért a táblázat optimális, és a feladatnak egyetlen optimális megoldása van.

Az optimális megoldás $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Nyereség: 10 egység.

5.1. 7.5.1 Feladatok

1. Az alábbi gazdasági modellel megadott lineáris programozási feladatban határozzuk meg, hogy az egyes termékekből mennyit kell termelni, hogy a haszon maximális legyen!

   Írja fel a matematikai modellt! Számítsa ki a megoldást

   a) grafikus módszerrel,

   b) szimplex módszerrel!

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

a)

	I. termék	II. termék	Kapacitás
A	1	1	10
B	8	3	60
C	0	1	8
Nyereség	100	400	

34. ábra

b)

	I. termék	II. termék	Kapacitás
A	1	1	5
B	2	1	6
C	1	0	2
Nyereség	100	200	

35. ábra

c)

	I. termék	II. termék	Kapacitás
A	1	2	17
B	1	1	15
C	0	3	18
Nyereség	100	200	

36. ábra

2. Oldjuk meg az alábbi normál feladatot!

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0$$

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 3 \\ & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\ 3x_1 & -8x_2 & & -2x_4 & \leq & 7 \end{array}$$

$$f(x) = 4x_1 \quad -9x_2 \quad +3x_3 \quad +11x_4 \quad \rightarrow max$$

Megoldások:

1.a) Matematikai modell:

$$x_1, \quad x_2 \quad \geq \quad 0$$

$$x_1 + \quad x_2 \leq 10$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$x_2 \leq 8$$

Célfüggvény: $100x_1 + 400x_2 \rightarrow$ maximális.

Megoldás szimplex módszerrel:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A pont	x_1	x_2	b
u_1	1	1	10
u_2	8	3	60
u_3	0	1	8
$-z$	100	400	0

37. ábra

$A(0,0)$

Nyereség: 0

B pont	x_1	u_3	b
u_1	1	-1	2
u_2	8	-3	36
x_2	0	1	8
$-z$	100	-400	-3200

38. ábra

$B(0,8)$

Nyereség: 1500

C pont	u_1	u_3	b
x_1	1	-1	2
u_2	-8	5	20
x_2	0	1	8
$-z$	-100	-300	-3400

39. ábra

$C(13,2)$

Nyereség: 1700

A táblázat utolsó sorában csak negatív elemek vannak, ezért a táblázat optimális és a feladatnak egyetlen optimális megoldása van.

Az optimális megoldás $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

Nyereség: 3400 egység.

b) Matematikai modell:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \leq 2$$

Célfüggvény: $100x_1 + 200x_2 \rightarrow$ maximális.

Megoldás szimplex módszerrel:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A pont	x_1	x_2	b
u_1	1	1	5
u_2	2	1	6
u_3	1	0	2
$-z$	100	200	0

40. ábra

$A(0,0)$

Nyereség: 0

B pont	x_1	u_1	b
x_2	1	1	5
u_2	1	-1	1
u_3	1	0	2
$-z$	-100	-200	-1000

41. ábra

Az optimális megoldás $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

Nyereség: 1000 egység.

c) Matematikai modell:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 17$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

$$3x_2 \leq 18$$

Célfüggvény: $100x_1 + 200x_2 \rightarrow$ maximális.

A pont	x_1	x_2	b
u_1	1	2	17
u_2	1	1	15
u_3	0	3	18
$-z$	100	200	0

42. ábra

$A(0,0)$

Nyereség: 0

B pont	u_2	x_2	b
u_1	-1	1	2
x_1	1	1	15
u_3	0	3	18
$-z$	-100	100	-1500

43. ábra

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$B(15,0)$

Nyereség: 1500

C pont	u_2	u_1	b
x_2	-1	1	2
x_1	2	-1	13
u_3	3	-3	12
$-z$	0	-100	-1700

Alternatív optimum

44. ábra

$C(13,2)$

Nyereség: 1700

D pont	u_1	u_1	b
x_2	$\frac{1}{3}$	0	6
x_1	$-\frac{2}{3}$	1	5
u_2	$\frac{1}{3}$	-1	4
$-z$	0	-100	-1700

45. ábra

$D(5,6)$

Nyereség: 1700

Alternatív optimum: CD szakasz minden egész koordinátájú pontja megoldás.

2. Megoldás szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
u_1	1	-2	1	2	3
u_2	0	-3	2	1	1
u_3	3	-8	0	-2	7
$-z$	4	-9	3	11	0

46. ábra

	x_1	x_2	x_3	u_2	b
u_1	1	4	-3	-2	1
x_4	0	-3	2	1	1
u_3	3	-14	4	2	9
$-z$	4	24	-19	-11	-11

47. ábra

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

	x_1	u_1	x_3	u_2	b
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{7}{4}$
u_3	$\frac{26}{4}$	$\frac{14}{4}$	$-\frac{26}{4}$	-5	$\frac{50}{4}$
$-z$	-2	-6	-1	1	-17

48. ábra

A táblázat utolsó sorában egy pozitív elem található, azonban ez az oszlop nem tartalmaz pozitív elemet, így ebből az oszlopból nem tudunk generáló elemet választani. A feladatnak nincs optimuma. (A célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.)

6. 7.6 Túlhatározott egyenletrendszerek

Túlhatározott egyenletrendszereknek nevezzük azokat az egyenletrendszereket, amikor a több az egyenlet, mint az ismeretlen.

A mérnöki gyakorlatban, így például a geodéziai mérések során is, a nagyobb megbízhatóság érdekében a minimálisan szükséges méréseknél több mérést végeznek. A mérési eredményeknek bizonyos matematikai feltételeknek kell eleget tenniük. Ilyen feltételek lehetnek, hogy a mérés során meghatározott pontok egy egyenesre, egy síkra, vagy egy más bonyolultabb alakzatra, felületre illeszkedjenek. Az egyes mérések során a hibák elkerülhetetlenek, ezért a kapott egyenletek egymásnak ellentmondóak. Természetesen nem tudjuk, hogy melyik mérésünk hibás, mert akkor az annak megfelelő egyenletet egyszerűen elhagyhatnánk. Mivel önkényesen nem hagyhatunk el egyenleteket, olyan megoldást keresünk, amely a hibát valamilyen matematikai szempontrendszer szerint minimalizálja. Az egyenletrendszernek egy közelítő megoldását adjuk meg tehát.

Legyen a lineáris egyenletrendszer mátrixalakban $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, ahol a $\boldsymbol{b}$ vektor jelenti a geodéziai mérések eredményeit vagy a mérési eredményekből számított mennyiségeket, például helykoordinátákat. Az ismeretlenek a keresett geodéziai alakzat jellemző paraméterei. A megoldás alapgondolata, hogy az egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy minden mért mennyiséghez adjunk hozzá egy javítást, amely az ellentmondást kiküszöböli. Így $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}$, ahol $\boldsymbol{r}$ az eltérésvektor vagy ún. maradéktag. Ha a javított egyenletrendszer $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}'$, akkor az eltérésvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b}$ alakban írható. Gyakori, hogy az egyenletrendszer olyan megoldását keressük, ahol az eltérésvektor koordinátáinak négyzetösszege $\Sigma_{i=1}^{n} r_i^2 = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r}$ minimális. Ezt a módszert a *legkisebb négyzetek módszerének* nevezik.

A feltételnek megfelelő megoldást szolgáltató lineáris egyenletrendszer a **Gauss normálegyenlet**:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}.$$

Példa: Határozzuk meg az alábbi túlhatározott egyenletrendszer legjobban közelítő megoldásait:

$$\begin{aligned} 2x \quad +3y &= 5 \\ 3x \quad +y &= 5 \\ 2x \quad +5y &= 6 \end{aligned}$$

Legyen

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A^T := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A fenti jelölések felhasználásával a Gauss normálegyenlet $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A^T \ A			2	3	
			3	1	x
			2	5	y
2	3	2	17	19	$17x + 19y$
3	1	5	19	35	$19x + 35y$

$\boldsymbol{A^T Ax}$

49. ábra

A^T \ b			5
			5
			6
2	3	2	37
3	1	5	50

$\boldsymbol{A^T b}$

50. ábra

Gauss normálegyenlet:

$$\begin{aligned} 17x \quad +19y &= 37 \\ 19x \quad +35y &= 50 \end{aligned}$$

A normálegyenlet megoldása a túlhatározott egyenletrendszer közelítő megoldását adja: $x = \frac{115}{78}$ és $y = \frac{49}{78}$.

$\boldsymbol{b'} = \begin{bmatrix} \frac{377}{78} \\ \frac{394}{78} \\ \frac{475}{78} \end{bmatrix}$. Az eltérésvektor: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b'} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{78} \\ \frac{4}{78} \\ \frac{7}{78} \end{bmatrix}$.

6.1. 7.6.1 Túlhatározott egyenletrendszer megoldása súlymátrix alkalmazásával

Oldjuk meg az alábbi túlhatározott egyenletrendszert a megadott súlymátrix alkalmazásával.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= -4 \\ -x_1 \quad +x_2 \qquad\quad &= -1 \\ -x_2 \quad +x_3 &= 2 \\ x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 \qquad\quad +x_3 &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Súlymátrix: $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

A túlhatározott egyenletrendszer egyes egyenleteit felhasználhatjuk különböző súllyal is az ún. súlymátrix segítségével. A súlymátrix mindig diagonalmátrix, és az a szerepe, hogy a mérések pontosságát súlyozza. A súlyok a főátlóban szereplő számok. Jelen példában az első, a második és a harmadik mérést reprezentáló egyenletet hatos súllyal vesszük figyelembe, a következő két egyenletet hármas súllyal, míg az utolsó egyenlet pontosságát kettes súllyal szerepeltetjük.

A súlymátrixos Gauss normálegyenlet:

$$\boxed{\boldsymbol{A^T PAx = A^T Pb}}$$

$$\begin{aligned} 15x_1 \quad -6x_2 \quad -3x_3 &= -12 \\ -6x_1 \quad +15x_2 \quad -6x_3 &= -18 \\ -3x_1 \quad -6x_2 \quad +11x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Amegoldás $x_1 = -1{,}62,\ x_2 = -1{,}94,\ x_3 = -0{,}23.$

6.2. 7.6.2 Feladatok

1. Határozza meg az alábbi túlhatározott egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását, és írja fel az eltérésvektort!

$$\begin{array}{rrcr} 2x & +4y & = & 3 \\ 3x & +2y & = & 5 \\ x & +2y & = & 4 \end{array}$$

2. Adja meg az alábbi túlhatározott egyenletrendszerekhez tartozó normálegyenletet!

a.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & & = & 2 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ -x_1 & & +x_3 & = & -2 \\ & & x_3 & = & 4 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & & = & -4 \\ -x_1 & +x_2 & & = & -1 \\ & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ -x_1 & & +x_3 & = & 1 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}$$

c. Írja fel az 2/b feladatban megadott túlhatározott egyenletrendszerhez tartozó normálegyenletet a $P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ súlymátrix felhasználásával.

3. Az alább megadott négy pont nem illeszkedik egy körre. Írja fel a pontokhoz legjobban közelítő kör egyenletét!

$P_1 = (0;0),\quad P_2 = (4;0),\quad P_3 = (0;4),\quad P_4(5;6).$

4. Adjuk meg annak a parabolának az egyenletét, amely a megadott négy pontot úgy közelíti meg, hogy a hibák négyzetösszege a lehető legkisebb legyen!

$P_1(0;0),\quad P_2(1;1),\quad P_3(-2;4),\quad P_4(3;8).$

Megoldások:

1. $\boxed{\begin{array}{rrcr} 2x & +4y & = & 3 \\ 3x & +2y & = & 5 \\ x & +2y & = & 4 \end{array}}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix},\qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\boldsymbol{A^T A x = A^T b}$$

A^T \ A			2	4	
			3	2	x
			1	2	y
2	3	1	14	16	$14x + 16y$
4	2	2	16	24	$16x + 24y$

$\boldsymbol{A^T A x}$

51. ábra

A^T \ b			3
			5
			4
2	3	1	25
4	2	2	30

$\boldsymbol{A^T b}$

52. ábra

$$\boldsymbol{A^T A x = A^T b}$$

Gauss normálegyenlet:

$$\begin{aligned} 14x \quad +16y &= 25 \\ 16x \quad +24y &= 30 \end{aligned}$$

A normálegyenlet megoldása:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Ax = b'}, \qquad \boldsymbol{b'} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r = b' - b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. A normálegyenletek:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 &= 7 \\ -x_1 \quad +3x_2 \quad -x_3 &= -4 \\ -x_1 \quad -x_2 \quad +3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

a. $$\begin{aligned} 3x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 &= -4 \\ -x_1 \quad +2x_2 \quad -x_3 &= -3 \\ -x_1 \quad -x_2 \quad +3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11x_1 \quad -5x_2 \quad -x_3 &= -16 \\ -5x_1 \quad +7x_2 \quad -2x_3 &= -9 \\ -x_1 \quad -2x_2 \quad +4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

3. A megadott négy pont $P_1 = (0;0)$ $P_2 = (4;0)$ $P_3 = (0;4)$ $P_4(5;6)$ nem illeszkedik egy körre. Írja fel a pontokhoz legjobban közelítő kör egyenletét!

Induljunk ki az általános kör egyenletéből: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$; ahol $K(u;v)$ a kör középpontjának a koordinátái, és r a kör sugara. A kör egyenlete felírható $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ alakban is, ahol $a = -2u,\ b = -2v,\ c = u^2 + v^2 - r^2$

Helyettesítsük be a kör egyenletébe a megadott pontok koordinátáit, így egy lineáris túlhatározott egyenletrendszerhez jutunk:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{array}{rrrcr} & & c & = & 0 \\ 4a & & +c & = & -16 \\ & 4b & +c & = & -16 \\ 5a & +6b & +c & = & -61 \end{array}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ -16 \\ -61 \end{bmatrix}.$$

Gauss normálegyenlet:

$$\begin{array}{rrrcr} 41a & +30b & +9c & = & -369 \\ 30a & +52b & +10c & = & -430 \\ 9a & +10b & +4c & = & -93 \end{array}$$

$a = -5.61, \quad b = -5{,}76, \quad c = 3{,}78.$

A kör egyenlete: $(x - 2{,}81)^2 + (y - 2{,}88)^2 = 3{,}52^2.$

4. Adjuk meg annak a parabolának az egyenletét, amely a megadott négy pontot a úgy közelíti meg, hogy a hibák négyzetösszege a lehető legkisebb legyen!

$P_1(0;0), \quad P_2(1;1), \quad P_3(-2;4), \quad P_4(3;8).$

A parabola egyenlete: $y = ax^2 + bx + c$. Helyettesítsük a megadott pontok koordinátáit az egyenletbe:

$$\begin{array}{rrrcr} & & c & = & 0 \\ a & +b & +c & = & 1 \\ 4a & -2b & +c & = & 4 \\ 9a & +3b & +c & = & 8 \end{array}$$

A Gauss normálegyenlet:

$$\begin{array}{rrrcr} 98a & +20b & +14c & = & 89 \\ 20a & +14b & +2c & = & 17 \\ 14a & +2b & +4c & = & 13 \end{array}$$

Javaslat: Az egyenletrendszert oldjuk meg inverz mátrix felhasználásával Excel program alkalmazásával.

7. 7.7 A lineáris regresszió

A túlhatározott egyenletrendszerek egy speciális esetének tekinthető a lineáris regresszió. Adott n darab pont, koordinátáik: $P_i = (x_i; y_i)\ (i = 1, \dots, n)$. Ezek a pontok nem illeszkednek ez egyenesre. Az a feladat. hogyan határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszerének a felhasználásával a pontokat legjobban megközelítő egyenes, az ún. regressziós egyenes egyenletét. Az egyenes egyenlete $y = \alpha x + \beta$, ahol az α, β valós paraméterek.

Példa:

Az alábbi táblázat egy szállítmányozási cég adatait tartalmazza. **Vizsgálták az egyes szállítmányok távolságának és a szállítás** időtartamának a kapcsolatát. Határozzuk meg, milyen összefüggés állapítható meg a szállítás távolsága és időtartama között, ha lineáris kapcsolatot tételezünk fel.

A keresett függvény: $\alpha x + \beta = y$, ahol x jelöli a szállítás távolságát, és y jelöli a szállítás időtartamát. Az ismeretlenek α, β, a keresett **regressziós egyenes** paraméterei.

Az egyenes egyenlete: $y = \alpha x + \beta$, ahová a táblázat adatait helyettesítve az alábbi túlhatározott egyenletrendszert kapjuk:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$$\begin{array}{rcrcr} 4\alpha & + & \beta & = & 10 \\ 4\alpha & + & \beta & = & 13 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 30\alpha & + & \beta & = & 50 \end{array}$$

Sorszám	Távolság: x	Időtartam: y	xy	x^2
1.	4	10	40	16
2.	4	13	52	16
3.	2	8	16	4
4.	10	20	200	100
5.	19	27	513	360
6.	20	35	700	400
7.	16	22	352	256
8.	20	40	800	400
9.	25	45	1125	625
10.	30	50	1500	900
összesen	$\sum x_i = 150$	$\sum y_i = 270$	$\sum x_i y_i = 5298$	$\sum x_i^2 = 3078$

53. ábra

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 10 & 1 \\ 19 & 1 \\ 20 & 1 \\ 16 & 1 \\ 20 & 1 \\ 25 & 1 \\ 30 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 10 & 19 & 20 & 16 & 20 & 25 & 30 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 8 \\ 20 \\ 27 \\ 35 \\ 22 \\ 40 \\ 45 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

A normálegyenletek:

$$\boldsymbol{A^T A x = A^T b}$$

$$\begin{aligned} \alpha\sum x_i^2 + \beta\sum x_i &= \sum x_i y_i \\ \alpha\sum x_i + \quad n\beta &= \sum y_i \end{aligned}$$

Adatokkal:

$$\begin{aligned} 3078\alpha + 150\beta &= 5298 \\ 150\alpha + \ 10\beta &= \ 270 \end{aligned}$$

Megoldásuk: $\alpha = 1{,}5$ és $\beta = 4{,}5$.

A regressziós egyenes egyenlete: $\hat{y} = 1{,}5x + 4{,}5$.

A paraméterek értelmezése: A β paraméter jelentése az $x = 0$ értékhez tartozó $\hat{y}$ érték. Ez a feladatokban nem minden esetben értelmezhető, a fenti példában sem.

Az α paraméter az egyenes meredekségét jelenti, amely megmutatja, hogy az x egy egységgel nagyobb értékéhez $\hat{y}$ átlagosan mennyivel nagyobb értéke tartozik.

Az adott példában α paraméter jelentése az, hogy 1km-rel hosszabb út átlagosan másfél perccel növeli a szállítási időt.

Adjunk becslést, hogy egy 25km-re történő szállítás várhatóan mennyi idő alatt történik:

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

$\hat{y} = 1{,}5 \cdot 25 + 4{,}5$=42 perc a becsült idő.

7.1. 7.7.1 Feladatok

1. Az alábbi táblázat egy termálkút mélységének és a termálvíz hőmérsékletének a kapcsolatát mutatja.

1. táblázat -

Mélység (m)	**900**	**1000**	**1100**	**1100**	**1000**	**900**	**900**	**1000**	**1100**
Hőmérséklet	57	59	67	62	60	52	57	59	67

Adja meg azt a regressziós egyenest, amely a hőmérsékletet a mélység függvényében jól közelíti! Értelmezze a paramétereket, és becsülje meg, hogy egy 1200 m mély kút vizének mekkora a hőmérséklete!

2. Egy tízelemű minta alapján vizsgálták a lakások alapterülete (m^2) és havi vízfelhasználása (m^3) közötti összefüggést. A minta adatai:

2. táblázat -

Alapterület	**38**	**38**	**51**	**51**	**55**	**55**	**55**	**73**	**79**	**105**
Vízfogyasztás	10	5	15	20	20	15	25	35	25	30

Határozza meg a lineáris regresszió függvényt, és értelmezze a paramétereket!

Becsülje meg egy 80 m^2-es lakás vízfogyasztását!

3. Az alábbi táblázat mutatja egy biztosító 10 üzletkötőjének az adott cégnél töltött ideje és az egy év alatt megkötött biztosítások száma közötti kapcsolatra vonatkozó adatai, ahol x a biztosítónál eltöltött évek számát y pedig a kötött biztosítások számát jelöli.

3. táblázat -

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
y	90	100	120	150	160	180	200	190	180	200

Határozza meg a lineáris regresszió függvényt, és értelmezze a paramétereket!

4. 10 elemű minta alapján vizsgálták a Suzuki Sedan 1,3 GL típusú gépkocsik életkora (év) és az eladási ár (ezer forint) közötti kapcsolatot. (2004. év adatai)

4. táblázat -

Életkor	**3**	**1**	**6**	**4**	**4**	**5**	**0**	**1**	**7**	**2**
Ár	1720	1800	1350	1600	1500	1550	2000	1750	1300	1700

Határozza meg a lineáris regresszió függvényt, és értelmezze a paramétereket!

Becsülje meg egy 8 éves gépkocsi vételárát!

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

5. Véletlenszerűen kiválasztott városokban vizsgálták a népesség száma és a x csatorna-hálózatba y bekapcsolt lakások aránya közötti összefüggést. jelöli a népességszámot ezer főben, jelöli a bekapcsolt lakások arányát százalékban.

5. táblázat -

x	23	55	43	28	65	15	50	32	58	35	78	60	40	70	30
y	42	70	50	43	75	30	65	42	60	60	80	72	53	82	48

Határozza meg a lineáris regresszió függvényt, és értelmezze a paramétereket!

Megoldások

6. táblázat -

Mélység (m)	Hőmérséklet ^0C	x_i^2	$x_i y_i$
900	57	810000	51300
1000	59	1000000	59000
1100	67	1210000	73700
1100	62	1210000	68200
1000	60	1000000	60000
900	52	810000	46800
900	57	810000	51300
1000	59	1000000	59000
1100	67	1210000	73700
9000	**540**	**9060000**	**543000**

A táblázat adatainak felhasználásával felírható normálegyenlet:

$$\alpha\sum x_i^2+\beta\sum x_i=\sum x_i y_i$$
$$\alpha\sum x_i+\quad n\beta=\quad\sum y_i$$

$$9060000\alpha+9000\beta=543000$$
$$9000\alpha+\quad 9\beta=\quad 540$$

Javaslat a normálegyenlet megoldásához: a második egyenletet szorozzuk meg ezerrel, majd a két egyenletet vonjuk ki:

$$9060000\alpha\quad+9000\beta\quad=\quad 543000$$
$$9000000\alpha\quad+9000\beta\quad=\quad 540000$$

$$60000\alpha\quad=\quad 3000\quad\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\quad=\quad\mathbf{0,05.}$$

A kapott α értéket az eredeti egyenletrendszer második egyenletébe helyettesítve $\boldsymbol{\beta = 10}$ adódik.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

A keresett regressziós egyenes: $\hat{y} = 0,05x + 10$.

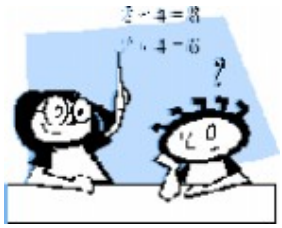
A paraméterek értelmezése: β nem értelmezhető.

Az α paraméter jelentése, ha a kút mélysége 1 méterrel nő, akkor a vizének a hőmérséklete 0.05 $^{\circ}C$-kal emelkedik.

Becslés az 1200 méter mély kút hőmérsékletére: $\hat{y}_{1200} = 0.05 \cdot 1200 + 10 = 70\ ^{\circ}C$.

1. $\hat{y} = -1,3 + 0,355 \cdot x$.
2. $\hat{y} = 88,25 + 12,5 \cdot x$.
3. $\hat{y} = 1917,3 - 87,96 \cdot x$.
4. $\hat{y} = 11,39 + 0,804 \cdot x$.

8.



9. 7.8 Összefoglalás

Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e vagy sem!

1. Ha az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor $\boldsymbol{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
2. Ha az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor $\boldsymbol{A}$ oszlopvektorai lineárisan összefüggőek.
3. Ha az $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{mxn}$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ esetén megoldható.
4. Ha az $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{nxn}$ mátrix determinánsa nem nulla, akkor az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható.
5. Ha $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{nxn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ és az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor $det\boldsymbol{A} \neq 0$.
6. Ha az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldható, ahol $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{mxn}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, akkor $r(\boldsymbol{A}) = n$.
7. Ha az $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^{nxn}$ mátrix determinánsa nulla, akkor nem létezik olyan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amire az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszer megoldható.
8. Az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak sajátvektora az $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor.
9. Az $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak sajátvektora az $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor.

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

10. Ha v_1, v_2 az A mátrix ugyanazon λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai, akkor $v_1 + v_2$ is sajátvektora A-nak.

11. Ha a v vektor az A mátrix sajátvektora, akkor az αv is sajátvektora A-nak minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

12. Létezik olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.

13. Létezik olyan $A \in \mathcal{M}^{nxn}$ mátrix, amelynek a $\mathbf{0}$ vektort kivéve minden $\mathbb{R}^n$ –beli vektor sajátvektora.

Megoldások:

1. hamis
2. hamis
3. hamis
4. igaz
5. hamis
6. hamis
7. hamis
8. igaz
9. igaz
10. igaz
11. hamis
12. igaz
13. igaz

Irodalomjegyzék

Bánhegyesiné Topor - Gizella Bánhegyesi Zoltán : *Az informatika matematikai alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000

Csernyák László : *Operációkutatás II,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000,

Ernyes Éva, Mala József, Orosz Ágota, Racsmány Anna, Szakál Szilvia: *Matematikai alapok,* AULA, Budapest, 2007

Fagyajev D. K,- Szominszkij I. Sz : *Felsőfokú algebrai feladatok,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973

Flanigan Francis J, - L. Kazdan Jerry L.: *Calculus II. Linear and Nonlinear Function,* Spinger-Verlag, 1900

Freud Róbert : *Lineáris algebra,* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007

Gantmacher F. R. : *The theory of Matrices I,* AMS, Chelsea, Rhode Island, 1998

Gáspár László : *Lineáris algebra példatár,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971

Gelfand I. M.: *Előadások a lineáris algebrából,* Akadémiai kiadó, Budapest, 1955

Horváth Péter: *Feleletválasztásos feladtok a matematika gyakorlatokhoz,* Főiskolai Kiadó, Dunaújváros, 2006

Created by XMLmind XSL-FO Converter.

Kirchner István: *Bevezetés a lineáris algebrába,* Főiskolai Kiadó, Dunaújváros, 2003

Korpás Attiláné (1996): *Általános statisztika I. és II,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996

Molnár Máténé, - Tóth Mártonné : *Általános statisztika példatár I. II,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001

Sharnitzky Viktor : Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000,

Szelezsán János, Veres Ferenc, Marosvásáry Erika : *Matematika 3,* SZÁMALK Kiadó, Budapest, 2001

Tóth Irén : *Operációkutatás I,* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999

Created by XMLmind XSL-FO Converter.