



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

**MATEMATIKA PÉLDATÁR**  
**I. kötet**  
**FELADATOK**

Szerkesztő:  
Csató Tamásné



**Műegyetemi Kiadó, 2004.**

(Kilencedik utánnnyomás)

egyetemi jegyzet  
oktatási célra

Azonosító: **050667**

**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Természettudományi Karának**

megrendelése alapján kiadja a

**Műegyetemi Kiadó**

**[www.kiado.bme.hu](http://www.kiado.bme.hu)**

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 26,6 (A/5) ív

Nyomdai munkák:

**Műegyetemi Nyomda**

Munkaszám: 099/04

## TARTALOMJEGYZÉK

1. Algebra .....	5
11. Egyenlőtlenségek .....	5
12. Vektoralgebra .....	7
13. Analitikus geometria .....	9
14. Determinánsok .....	23
15. Mátrixok .....	33
16. Lineáris egyenletrendszerek .....	45
17. $n$ dimenziós lineáris terek és lineáris transzformációk .....	57
2. Halmazelmélet. Egyváltozós valós függvények .....	75
21. Halmazelméleti alapfogalmak .....	75
22. Az egyváltozós függvény fogalma, ábrázolása .....	78
23. Az egyváltozós függvény határértéke és folytonossága .....	85
24. Az egyváltozós függvény differenciálszámítása .....	94
25. A differenciálszámítás alkalmazásai .....	98
26. Határozatlan és határozott integrál .....	107
27. Határozatlan és határozott integrál .....	113
28. Az integrálszámítás alkalmazásai és közelítő módszerei .....	115
29. Improprius integrálok .....	123
3. Többváltozós valós függvények .....	127
31. Síkbeli és térbeli ponthalmazok, tartományok .....	127
32. Többváltozós függvény fogalma, ábrázolása, határértéke, folytonossága .....	128
33. Többváltozós függvény differenciálszámítása .....	131
34. Többszörös integrálok .....	141
4. Sorozatok és sorok .....	151
41. Numerikus sorozatok .....	151
42. Numerikus sorok .....	155
43. Függvénysorozatok, függvénysorok .....	161
44. Hatványsorok. Taylor-sorok .....	164
45. Fourier-sorok .....	167
5. Differenciálegyenletek .....	170
51. Elsőrendű differenciálegyenletek .....	170

52. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . . .	174
53. Másod- és magasabbrendű differenciálegyenletek . . . . .	178
54. Másod- és magasabbrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek, vegyes feladatok . . . . .	180
55. Differenciálegyenletrendszerek és parciális differenciálegyenletek . . . . .	183
56. Differenciálegyenletek megoldása közelítő módszerekkel . . . . .	189
6. Vektoranalízis . . . . .	191
61. Egyparaméteres vektor-skalár függvények . . . . .	191
62. Kétparaméteres vektor-skalár függvények . . . . .	194
63. Skalár-vektor függvények . . . . .	199
64. A vektor-vektor függvény és integráljai. Gradiens, divergencia, rotáció . . . . .	202
65. Integrál-tételek és potenciál . . . . .	209
66. Görbevonalu koordinátarendszerek . . . . .	215
7. Komplex függvénytan . . . . .	219
71. Komplex algebra . . . . .	219
72. A komplex változós függvény fogalma, határértéke, folytonossága, differenciálhatósága, regularitása . . . . .	224
73. Leképezések . . . . .	227
74. Komplex változós integrál . . . . .	233
75. Komplex tagu sorozatok és sorok . . . . .	237
76. Komplex változós függvények szinguláris helyeinek osztályozása. Reziduum . . . . .	242
8. Valószínűségszámítás . . . . .	249
81. Kombinatorika. Boole-algebra . . . . .	249
82. Klasszikus valószínűségszámítás . . . . .	254
83. Valószínűségi változó és eloszlásai . . . . .	259
9. Számítógépek programozása . . . . .	263
91. A programozás alapfogalmai . . . . .	263
92. Direkt programok (Ural 2. gépre) . . . . .	276
93. Algoritmusok . . . . .	282
94. Programok Elliot autókódban . . . . .	293
95. Algol 60 . . . . .	295

## 1. ALGEBRA

### 11. EGYENLŐTLENSÉGEK

Oldjuk meg a következő algebrai egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a számegyenesen.

$$1101. \quad 5x + 3 \leq 2 - 4x$$

$$1102. \quad \frac{x - 5}{2} - \frac{5}{6} \leq 1 - \frac{2 - 5x}{3}$$

$$1103. \quad 4 - 3 \left( \frac{2 - 5x}{4} - 2 \right) < x$$

$$1104. \quad \frac{x - a}{3} + 4 > 1 - a$$

$$1105. \quad 0 < 4 - 7x < 1$$

$$1106. \quad \frac{5x - 1}{4} \leq x + 1 < -2 + 2x$$

$$1107. \quad (x - 4)(x - 6) < 0$$

$$1108. \quad (3x + 6)(5 - 3x) \leq 0$$

$$1109. \quad (2x - 3)(4x - 7) > 0$$

$$1110. \quad -3(x + 1)(x + 2) > 0$$

$$1111. \quad x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$1112. \quad (5x - 1)(3x - 1) < (6x + 1)(3x - 1)$$

$$1113. \quad a^2 x^2 - 2x - 5 \leq 0$$

$$1114. \quad x^4 - 5x^2 + 4 > 0$$

$$1115. \quad (x + 1)(x + 2)(x + 3) > 0$$

1116.  $(x - 3)(x^2 - 4x - 12) > 0$
1117.  $(5x + 1)(-x^2 + 9) < 0$
1118.  $(x - 2)^2(x^2 - 5x - 6) < 0$
1119.  $-(3x - 2)^{2n}(x^3 - 4x^2 - 21x) \geq 0$  ( $n \geq 0$  egész)
1120.  $1 < x^2 < 4$
1121.  $4 < (2x + 3)^2 < 9$
1122.  $\frac{5}{4x+3} < 0$
1123.  $\frac{5}{4x - 8} < 2$
1124.  $\frac{4x - 1}{4x + 1} < -1$
1125.  $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 3} < x - 2$
1126.  $-3 < \frac{5}{4 - x} < -1$
1127.  $-1 < \frac{x - 1}{3 - 2x} < 2$
1128.  $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x - 7} > 0$

Oldjuk meg a következő exponenciális és logaritmus egyenlőtlenségeket

1129.  $\frac{1}{3^x} \geq 9$
1130.  $3^x > 4^x$
1131.  $2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x-2} < 3$
1132.  $4^{x+1} + 4^{-x+2} < 65$
1133.  $(3^x + 2)(5 - 2^x) < 0$
1134.  $0 < 10 - 5^x < 9$

1135.  $0 < \frac{2^x}{1-2^x} < 1$

1136.  $\lg(x+1) > 1$

1137.  ${}_2\log(3x-1) \leq -1$

1138.  ${}_5\log \frac{4x-1}{3-2x} > 0$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőségeket

1139.  $\sin x > \frac{1}{2}$

1140.  $\cos x < -\frac{1}{2}$

1141.  $\operatorname{tg} x \geq 1$

1142.  $\sin x \cdot \operatorname{tg} x > \frac{3}{2}$

1143.  $0 < \sin 2x < 1$

1144.  $-1 < \cos \frac{x}{3} \leq 0$

Oldjuk meg a következő vegyes feladatokat

1145.  $|2x+3| < 2$

1146.  $|2-x^2| > 3$

1147.  $|(2x-6)(3x-3)| < 6$

1148.  $|x+1| + |4-x| < 5$

1149.  $x+|x| < 4$

1150.  $x - |2x-3| < 0$

1151.  $\sin|2x-4| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

1152.  $\left| \frac{5^x}{5-5^x} \right| < 5$

1153.  $-3 < \lg \left| \frac{x}{x+1} \right| < -2$

1154.  $\frac{1}{2} < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

## 12. VEKTORALGEBRA

I. Oldjuk meg a következő feladatokat anélkül, hogy a bennük szereplő vektorokat koordinátákra bontanánk.

1201. Határozzuk meg szükséges és elégséges feltételét annak, hogy az  $\alpha$  és  $\beta$  számok minden értékére fennálljon:

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \perp \beta \bar{a} - \alpha \bar{b}.$$

1202. Mi jellemzi azokat a  $\bar{b}$  vektorokat, melyeknek  $\bar{a}$ -ra való vetülete egyenlő  $\bar{a}$ -nak  $\bar{b}$ -re való vetületével?

1203.\* Igazoljuk, hogy

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}| \quad (\text{geometriailag}).$$

1204. Bizonyítsuk be a háromszögekre vonatkozó szinusz-tételt.

1205. Bizonyítsuk be a háromszögekre vonatkozó koszinusz-tételt.

1206. Igazoljuk az

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2$$

azonosságot.

1207. Igazoljuk, hogy

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2.$$

1208. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést:

$$|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \leq |\bar{a}| |\bar{b}| |\bar{c}|.$$

Milyen esetben érvényes az egyenlőség?

1209. Mutassuk ki, hogy ha

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d} \quad \text{és}$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}, \quad \text{akkor}$$

$$\bar{a} - \bar{d} \parallel \bar{b} - \bar{c}.$$

1210. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

1211.\* Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást és ez a pont (súlypont) mindegyik súlyvonalat 2:1 arányban osztja.

1212. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges háromszög súlyvonalaival, mint oldalakkal háromszög szerkeszthető.



1213. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege ugy aránylik az oldalak négyzetösszegéhez, mint 3:4.
1214. Fejezzük ki a háromszög területét a csucsaiba mutató helyvektorokkal.
1215. Mutassuk ki, hogy bármely háromszögben

$$\cotg\alpha + \cotg\beta + \cotg\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}$$

ahol  $t$  a háromszög területének,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a háromszög oldalainak,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a megfelelő szembenfekvő szögeknek mérőszáma.

1216. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a tetraéder magasságai egy ponton menjenek át?
1217. Irjuk fel a kör egyenletét, ha ismerjük egyik átmérője két végpontját.  $[A(\vec{r}_1); B(\vec{r}_2)]$ .
1218. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az  $A(\vec{r}_1)$  ponton és egyenlő távol van a  $B(\vec{r}_2)$  és  $C(\vec{r}_3)$  pontoktól.
1219. Adva van két pont:  $A(\vec{r}_1)$  és  $B(\vec{r}_2)$ . Keressük meg azon  $P(\vec{r})$  pontok mértani helyét, amelyekre nézve az  $\overline{AP} \cdot \overline{BP}$  skalárszorzat értéke  $c$  (konstans).

### 13. ANALITIKUS GEOMETRIA

1301. Számítsuk ki a  $P_1(2, 0, 3)$  pontnak a  $P_2(-5, 1, 7)$  ponttól vett távolságát.
1302. Határozzuk meg azt a pontot, amely a  $P_1(2, 0, 3)$ , és  $P_2(-5, 1, 7)$  pontokat összekötő egyenesszakaszt 7:2 arányban osztja.
1303. Határozzuk meg a  $P_1(2, 0, 3)$  pontnak a  $P_2(-5, 1, 7)$  pontra vett tükörképét.
1304.  $P_1(1, 1)$ ;  $P_2(2, 2)$ ;  $P_3(3, -1)$  egy paralelogramma három egymásután következő csúcsa. Keressük meg a negyedik csúcspont koordinátáit.

1305.

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

Határozzuk meg  $\alpha$  értékét úgy, hogy  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  merőlegesek legyenek egymásra.

1306. Határozzuk meg az

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{és}$$

$$\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

vektorok bezárta szöget, továbbá  $\vec{a}$  vetületét  $\vec{b}$ -re.

1307. Adottak A(3, 5); B(6, -2) pontok. Számítsuk ki az  $\vec{AB}$  vektor vetületét a koordinátatengelynek az első negyedében fekvő szögfelezőjére.

1308. Adott négy pont: A(1, -2, 3); B(4, -4, 3); C(2, 4, 3) és D(8, 6, 6). Határozzuk meg az  $\vec{AB}$  vektornak a  $\vec{CD}$  irányába eső vetületét.

1309. Határozzuk meg az  $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$  vektor irányába mutató egységvektort és az  $\vec{a}$  vektor irányszögeit.

1310. Irjuk fel az

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k} \quad \text{és}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$$

vektorok egymásra eső vetületét.

1311. Mikor egyenlő két vektornak egymásra eső vetülete?

1312. Bontsuk fel az

$$\vec{a} = \vec{j} + 6\vec{k} \quad \text{vektort}$$

$$\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{k} \quad \text{irányu}$$

és  $\vec{c}$ -re merőleges komponensekre.

1313.\* Bontsuk fel a

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{vektort.}$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

vektorok irányába eső összetevők összegére.

1314. Bontsuk fel a

$$\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{vektort}$$

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}, \\ \bar{b} &= -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}, \\ \bar{c} &= 3\bar{i} + \bar{k} \quad \text{vektorok}\end{aligned}$$

irányába eső összetevők összegére.

1315. Az alábbi vektor-párok közül melyik lehet rombusznak, vagy téglalapnak két szomszédos oldalát megadó vektora

$$\begin{array}{ll} \bar{a} [3, 5, -4] & \bar{c} [1, -10, -7] \\ \text{A: } \bar{b} [2, -10, -11] & \text{B: } \bar{d} [2, 5, -11] \end{array}$$

1316. Irjunk fel egy olyan 4 egységnyi hosszúságu vektort, amely párhuzamos az  $\bar{a} = 3\bar{j} + 5\bar{k}$  vektorral.

1317. Határozzuk meg az
- $$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \quad \text{és} \\ \bar{b} &= 4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}\end{aligned}$$

vektorok által kifeszített paralelogramma területét.

1318. Számítsuk ki a
- $$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= 3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\bar{k}, \\ \bar{v}_2 &= 10\bar{i} + 5\bar{j} - 5\bar{k}, \\ \bar{v}_3 &= -9\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}\end{aligned}$$

vektorok által kifeszített paralelepipedon köbtartalmát.

1319. Számítsuk ki az
- $$\begin{aligned}A &(5, 4, 0) \\ B &(0, 5, -1) \\ C &(2, 0, -2)\end{aligned}$$

csucspontu háromszög területét.

1320. Egy háromszög csucspontjai:
- $$\begin{aligned}A &(1, 5, 6) \\ B &(-2, -1, 0) \\ C &(2, 2, 1).\end{aligned}$$

Számítsuk ki az AC oldalhoz tartozó magasságot.

1321. Mekkora a háromszög kerülete, ha két csúcspontja:  $P_1(2, 3, 5)$ ;  $P_2(4, -3, 0)$ , súlypontja pedig:  $S(3, 2, 1)$  ?
1322. A koordináta-rendszer kezdőpontját kössük össze a  $P_1(10, -5, 10)$ ;  $P_2(-11, -2, 10)$ ;  $P_3(-2, -14, -5)$  pontokkal. Bizonyítsuk be, hogy ezek egy kocka éllei, és számítsuk ki a kocka térfogatát.
1323. Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, ha csúcspontjaink koordinátái:

$$A(3, -1, -1)$$

$$B(5, -2, 3)$$

$$C(4, 0, -2)$$

$$D(5, 0, 1)$$

1324. Egy síkban van-e a következő négy pont?

$$P_1(2, 0, 0)$$

$$P_2(3, -5, -5)$$

$$P_3(4, 4, 3)$$

$$P_4(7, 3, 1)$$

1325. Egy tetraéder csúcspontjai:  $P_1(5, 4, -2)$ ;  $P_2(-1, 5, 1)$ ;  $P_3(2, 2, 4)$ ;  $P_4(3, 1, -2)$ .
- a) Mennyi a tetraéder  $\overline{P_1P_2}$  élének hossza?
- b) Mennyi a tetraéder térfogata?
- c) Mennyi a  $P_1P_2P_3$  háromszög területe?
- d) Milyen irányu a  $P_2$ -ből huzott magasság?

1326. Milyen szög alatt hajlik az

$$x = 2t - 5$$

$$y = -t + 1$$

$$z = 3t - 6 \quad \text{egyenes a}$$

$$2x + y - 3z + 5 = 0 \quad \text{síkhöz?}$$

1327. Mi a hajlásszöge a következő egyeneseknek?

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3} \text{ és}$$

$$x = t$$

$$y = 2t - 3$$

$$z = -5$$

1328. Mekkora távolságra van a  $P(2, 4, -3)$  pont az

$$\frac{x-1}{5} = \frac{2-y}{3} = -z \text{ egyenestől?}$$

1329. Mi annak az egyenesnek az egyenletrendszere, amely átmegy a  $P_0(2, -3, 5)$  ponton és párhuzamos a  $\vec{v}(4, 1, -2)$  vektorral?

1330. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a  $P_0(5, 1, -8)$  ponton megy át és párhuzamos a  $z$  tengellyel.

1331. Állapítsuk meg a

$$\frac{2x+3}{5} = -y = \frac{1-4z}{7}$$

egyenes egy irányvektorát, valamint egy pontjának koordinátáit.

1332. Határozzuk meg a  $P_0(5, -2)$  pontra illeszkedő és a

$$2x - 3y = 4$$

egyenesre merőleges  $[XY]$  síkban fekvő egyenes egyenletét.

1333. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a  $P_0(5, 7, 1)$  pontra illeszkedik és párhuzamos a következő két síkkal?

$$2x + y - z + 7 = 0$$

$$x - 8y + 2z - 3 = 0.$$

1334. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a  $P_0(2, 4, -3)$  pontra illeszkedik és merőleges az alábbi pontokkal megadott síkra?

$$P_1(4, 7, -2)$$

$$P_2(1, 0, 9)$$

$$P_3(0, 0, 1).$$

1335. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origón megy át; és az  $[xy]$  koordináta-síkhöz  $45^\circ$ , az  $[yz]$  koordináta-síkhöz  $30^\circ$  szög alatt hajlik.

1336.\* Határozzuk meg a következő síkok metszésvonalának egyenletrendszerét:

$$2x + y - 5z + 3 = 0 \text{ és}$$

$$x - y + 2z = 0.$$

1337. Mik az egyenletrendszerei azoknak az egyeneseknek, amelyek benne vannak a

$$-3x + 2y - 5z + 3 = 0 \text{ síkban}$$

és merőlegesek az

$$\frac{1 - 2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{5z}{4} \text{ egyenesre?}$$

1338. Egy paralelepipedon egyik csúcsa  $P_0(4, 3, 1)$ , az ebből kiinduló három élvektorai:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

Irjuk fel a testátlók egyenletrendszereit.

1339.\* Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a  $P_1(-1, 0, 2)$  pontra illeszkedik, az

$$\frac{x - 10}{3} = -\frac{y + 1}{6} = \frac{z - 7}{2}$$

egyenesre merőleges és attól 7 egység távolságra halad?

1340. Mi az egyenletrendszere az

$$x = 4 + t$$

$$y = -1 - t$$

$$z = 10 + 6t$$

egyenes vetületének a

$$3(x - 2) - 2(y - 1) + 4(z + 2) = 0 \text{ síkon?}$$

1341. Igazoljuk, hogy az

$$x - 3 = \frac{y - 8}{3} = \frac{z - 3}{4} \quad \text{és}$$

$$4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$$

egyenesek egy síkban vannak és határozzuk meg metszéspontjuk koordinátáit.

1342. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne fekszik

az 
$$x = \frac{y + 13}{5} = \frac{5 - z}{3} \quad \text{és}$$

az 
$$\frac{1 - x}{5} = \frac{y + 8}{3} = z - 2$$

egyenesek síkjában, átmegy metszéspontjukon és felezi hajlásszögüket.

1343. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origóra illeszkedik és a következő egyeneseket metszi.

$$x - 4 = -\frac{y + 7}{3} = \frac{z - 2}{2} \quad \text{és}$$

$$\frac{5 - x}{3} = \frac{9 - y}{5} = z + 9.$$

1344. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a

$$2x + 4y - z + 5 = 0$$

síkra merőleges és a következő egyeneseket metszi.

$$\frac{x}{2} = -y = z$$

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{3}.$$

1345. Határozzuk meg  $\lambda$  értékét úgy, hogy a következő egyenesek messék egymást:

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{1 - 2y}{3} = -z$$

$$\frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1+z.$$

- 1346.\* Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges és illeszkedik a következő egyenesekre (normáltranszverzális):

$$\begin{array}{ll} x = 3 + 2t & x = -1 - 3t \\ y = -2t & y = 2 + t \\ z = -2 - t & z = 4 + t \end{array}$$

és határozzuk meg a normáltranszverzális azon szakaszának hosszát, amely az adott egyenesek közé esik.

1347. Egy háromszög csúcspontjai:  $P_1(1, 1, 1)$ ;  $P_2(5, 1, 4)$ ;  $P_3(3, 3, 2)$ . Irjuk fel a  $P_1$  csúcsnál levő szög felező egyenesének egyenletrendszerét.

1348. Egy háromszög csúcspontjai:  $P_1(5, 1, -2)$ ;  $P_2(1, 0, 3)$ ;  $P_3(3, 5, -1)$ . Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges a háromszög síkjára és átmegy a háromszög súlypontján.

1349. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a koordinátarendszer kezdőpontját tartalmazza és normálvektora:  $\vec{n}[1, 2, 4]$ ?

1350. Mi az egyenlete annak a síknak, amelynek egy pontja  $P_0(-2, 3, 7)$  és amely merőleges az  $x = y = z$  egyenesre?

1351. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a  $P_0(5, -\frac{3}{2}, 0)$  pontra illeszkedik és párhuzamos a

$$3x - y + \frac{5}{3}z - 1 = 0 \quad \text{síkkal?}$$

1352. Mi az egyenlete az  $[y, z]$  koordinátasíknak?

1353. Határozzuk meg a következő sík metszéspontját:

$$x + y + z = 0$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + y - z = 0.$$



1354. Irjuk fel a  $P_1(2, 3, 1)$ ;  $P_2(-4, 2, -5)$ ;  $P_3(0, 1, 0)$  pontokra illeszkedő sík egyenletét.

1355. Mi az egyenlete a  $P_0(0, 2, -5)$  pontra illeszkedő és az

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{1-z}{4} \quad \text{és}$$

$$\frac{2x-1}{3} = 2 - y = \frac{z}{2}$$

egyenesekkel párhuzamos síknak?

1356.\* Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a

$$2x + y - 2z + 4 = 0 \quad \text{és}$$

$$2x - 3y + 6z - 5 = 0$$

síkok metszésvonalára és felezi e síkok hajlásszögét.

1357. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely a  $P_1(2, 7, -3)$  pontra és az

$$x = 2t - 1$$

$$y = t + 4$$

$$z = -3t + 2$$

egyenesre illeszkedik.

1358. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a  $P_0(2, 1, 6)$  pontra illeszkedik és merőleges a

$$2x + 5y - 3z + 8 = 0$$

$$x - 2y + z - 5 = 0$$

síkokra?

1359. Határozzuk meg a  $P_0(2, -1, -2)$  pontra illeszkedő és az

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{5z-1}{6} \quad \text{egyenesre merőleges sík egyenletét.}$$

1360. Irjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az

$$x = 2 + 3t$$

$$y = -3 + t$$

$$z = 5 - 2t$$

egyenesre merőleges és a dőféspont koordinátái:  $D(-1, -4, 7)$ .

1361. Mi az egyenlete annak a síknak, amely merőleges az  $5(x - 1) + 4y - (z + 1) = 0$  síkra és tartalmazza a következő síkok metszésvonalát:

$$2x - y + z + 3 = 0$$

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1362. Határozzuk meg azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek az

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{3 - y}{5} = \frac{z + 2}{5}$$

egyeneset a koordinátság síkokra vetítik.

1363. Mi az egyenlete annak a síknak, amely a  $P_1(5, 4, 2)$  és  $P_2(1, 3, 4)$  pontokra illeszkedik és egyenlő hosszú darabokat vág le az  $Y$  és  $Z$  koordinátatengelyek pozitív feléből.

1364. Egy tetraéder csúcspontjai:

$$A(1, -2, 0)$$

$$B(2, 3, 1)$$

$$C(-1, 2, 2)$$

$$D(3, 1, 4).$$

Írjuk fel:

- a) BCD sík egyenletét,  
b) BC élen átmenő, AD éllel párhuzamos sík egyenletét,  
c) az A csúcspontra illeszkedő és BCD síkkal párhuzamos sík egyenletét.
1365. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az  $X, Y, Z$  koordinátatengelyeket rendre  $-4, 5$ , ill.  $-7$ -ben metszi.
1366. Mi az egyenlete annak a síknak, amelyben a következő egyenesek benne vannak?

$$x = 9 + 2t$$

$$y = 14 + 3t$$

$$z = -5 - t$$

$$x = 1 - 5t$$

$$y = 2 + 4t$$

$$z = -1 - 2t.$$

1367. Adva van két egyenes

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = -\frac{z}{3}$$

Írjuk fel azoknak a síkoknak az egyenletét, amelyek egy-egy egyenesre illeszkednek és párhuzamosak egymással.

1368. Mi az egyenlete annak a síknak, amely az  $X$  tengelyre illeszkedik és amelyből az

$$x + y = 1$$

$$x - z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

síkok egyenlőszáru háromszöget metszenek ki? Hány ilyen sík van?

1369. Az  $x + 2y - z + \lambda = 0$  sík egyenletében határozzuk meg  $\lambda$  értékét úgy hogy a sík tartalmazza a

$$2x - y + z = 0$$

$$26x + 2y + 4z + 3 = 0$$

síkok metszésvonalát.

1370. Igazoljuk, hogy az

$$x - 1 = 4 - y = \frac{z - 3}{2} \text{ és az}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{7-y}{3} = 4 - z$$

egyenesek egy síkban vannak és írjuk fel a sík egyenletét.

1371. Írjuk fel a  $P_1(1, -3, 0)$  és  $P_2(3, 7, -4)$  pontokat összekötő egyenes szakaszt merőlegesen felező sík egyenletét.

1372. Írjuk fel az

$$x = 1,$$

$$y = 3 + 3t,$$

$$z = 4 + t,$$

egyenesre illeszkedő és a  $P_1(2, 1, 3)$  ponttól egységnyi távolságra haladó síkok egyenleteit.

1373. Határozzuk meg az

$$x + y + z - 7 = 0,$$

$$2x - 3y - z + 3 = 0,$$

$$x - y + z - 5 = 0$$

síkok metszéspontjának a  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(4, 5, 6)$ ,  $P_3(7, 8, 0)$  pontokon átfektetett síktól vett távolságát.

1374. Határozzuk meg a  $P_1(1, 5, -3)$  és  $P_2(2, 3, -5)$  pontokat összekötő egyenesdarabnak az

$$2x + 3y - 6z = 0$$

síkra való merőleges vetületét.

1375. Határozzuk meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelynek egyik csúcspontja  $P_1(2, 1, 2)$ , a többiek pedig a  $P_1$ -ből a következő síkokra bocsátott merőlegesen dőléspontjai:

$$x - 3y + z - 2 = 0,$$

$$x + y - 3z + 4 = 0,$$

$$x - y + 2z - 6 = 0.$$

1376. Határozzuk meg a következő párhuzamos síkok közti távolságot:

$$2x + y - 3z + 6 = 0$$

$$4x + 2y - 6z - 5 = 0.$$

1377.\* Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 2); B(3, 8, 0); C(-2, -1, 5).$$

Mik a koordinátái:

a) a magassági pontnak,

b) a körülírt kör középpontjának,

c) a beírt kör középpontjának?

1378. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 0); B(2, -5, 3); C(6, 2, -9).$$

Mi a mértani helye az  $AB$  alapon álló, az adott háromszög síkjában fekvő  $k$ -szor akkora területű háromszögek harmadik csúcspontjának?

1379. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól:

$$P_1 (2, 2, 1)$$

$$P_2 (8, 6, 2)$$

$$P_3 (6, 3, 5) ?$$

1380. Bontsuk fel a  $\vec{v}[10, 6, -8]$  vektort a következő egyenesekkel párhuzamos összetevőkre:

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{1-2z}{3} ,$$

$$2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2} ,$$

$$\frac{2x+3}{-3} = \frac{y+5}{4} = -z .$$

1381. Határozzuk meg  $\lambda$  értékét úgy, hogy az

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad \text{és} \quad \vec{r}' = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t$$

egyenesek messék egymást:

Az adatok:

$$\vec{r}_0 [1, 2, 3], \quad \vec{r}_1 [4, 1, -3],$$

$$\vec{v}_0 [3, -1, \lambda], \quad \vec{v}_1 [2, 0, -1].$$

1382. Számítsuk ki a következő egyenesek egymástól való távolságát:

$$\frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4} \quad \text{és}$$

$$x = y = z.$$

1383. Adva van három sík:

$$2x + 4y + 3z = 1 ,$$

$$x + 7y + 4z = 3 ,$$

$$3x - 5y - z = 2.$$

Van-e olyan vektor, amely mindhárom síkkal párhuzamos és ha igen, melyik az?

1384. Határozzuk meg az X tengelynek azt a pontját, amely egyenlő távol van a következő síkoktól:

$$3(x-1) + 2(y+2) - z + 6 = 0,$$

$$-x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

1385. Melyik az  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} = z+1$  egyenesnek az a pontja, mely egyenlő távolságra van a következő síkoktól?

$$4x + 2y - z + 6 = 0,$$

$$2x - 4y + z - 5 = 0.$$

1386. Mekkora az a távolság, melynek vetülete az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -\frac{z}{6} \quad \text{egyenesre 2 egység, az}$$

$$x = \frac{y-1}{4} = \frac{1-z}{8} \quad \text{egyenesre 3 egység, az}$$

$$\frac{1-2x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{4} \quad \text{egyenesre 1 egység?}$$

1387. Tükrözzük a  $P_1(2, 4, -3)$  pontot a

a)  $Q(1, 3, 7)$  pontra, az

b)  $x = 2y = 2z$  egyenesre és az

c)  $x - 2y + 5z = 0$  síkra

és állapítsuk meg a négy pont által meghatározott tetraéder térfogatát.

1388. Adva van a  $2x - 3y - 4z + 12 = 0$  síkban négy pont:

$$P_1(0, 0, 3); \quad P_2(0, 4, 0); \quad P_3(-6, 0, 0); \quad P_4(-2, 0, 2).$$

Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a  $P_4$  ponton megy át és felezi a  $P_1P_2P_3$  háromszög területét.

- 1389.\* Egy háromszög csúcspontjai:

$$P_1(1, 1, 1); \quad P_2(2, 2, 2); \quad P_3(-1, 2, 0).$$

Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, mely az  $X$  tengelyre illeszkedik és amelyre nézve a háromszög vetületének területe az eredetinek fele.

1390. Egy tetraéder csúcspontjai:  $P_1(1, 1, 1); P_2(-1, 1, 1); P_3(1, -1, 1); P_4(1, 1, -1)$ . Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely a  $P_2P_3P_4$  síkkal párhuzamos és a tetraédert egyenlő térfogatu részekre osztja.

## 14. DETERMINÁNSOK

Az alábbi feladatok közül többen előfordul a  $j$  betű. Jelentése mindig  $\sqrt{-1}$ .

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

$$1401. \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1402. \begin{vmatrix} j & j & j \\ j & 2+2j & j \\ j & j & 1+3j \end{vmatrix}$$

$$1403. \begin{vmatrix} 1 & 1+j & 1+2j \\ -1 & -1+j & -1+2j \\ 3 & 3+j & 3+2j \end{vmatrix}$$

$$1404. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3+j & 4+3j \\ 1 & 3 & 5+j & 7+3j \\ 1 & 4 & 7+j & 10+3j \\ 1 & 1 & 1+j & 1+3j \end{vmatrix}$$

$$1405. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{vmatrix}$$

$$1406. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & j & 0 \end{vmatrix}$$

$$1407. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-j & j & 1+j \\ -2j & -1 & 2j \end{vmatrix}$$

$$1408. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1409. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1410. \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

$$1411. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

$$1412. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1413. \begin{vmatrix} -j & 2j & 2j \\ 2j & -j & 2j \\ 2j & 2j & -j \end{vmatrix}$$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

$$1414. \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2(x^3 + y^3)$$

$$1415. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$$

Számítsuk ki a következő determináns értékét:

$$1416. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+j & 1 \\ 1 & 1 & 1+3j \end{vmatrix}$$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

$$1417. \begin{vmatrix} b & a & a & a & a & a \\ a & b & a & a & a & a \\ a & a & b & a & a & a \\ a & a & a & b & a & a \\ a & a & a & a & b & a \\ a & a & a & a & a & b \end{vmatrix} = (b+5a)(b-a)^5$$



$$1418. \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = 1 + ab + ad + cd + abcd$$

$$1419. \begin{vmatrix} a + d & 3a & b + 2a & b + d \\ 2b & b + d & c - b & c - d \\ a + c & c - 2d & d & a + 3d \\ b - d & c - d & a + c & a + b \end{vmatrix} = 0$$

$$1420. \begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$1421. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix} = -3(4 - x^2)(1 - x^2)$$

$$1422. \begin{vmatrix} 1 + a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + d \end{vmatrix} = bcd + acd + abd + abc + abcd$$

$$1423. \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = abc - a - c$$

$$1424. \begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$1425. \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (a+c)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$1426. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$$

(Az itt szereplő determinánst az  $x, y, z$  elemek által generált Vandermonde determinánssnak nevezzük. Jelölés:  $V_3(x, y, z)$ .)

$$1427. \begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix} = 64 \sin a \sin b \sin c (\sin^2 a - \sin^2 b)(\sin^2 a - \sin^2 c)(\sin^2 b - \sin^2 c)$$

$$1428. \begin{vmatrix} \sin^3 a & \sin^2 a \cos a & \sin a \cos^2 a & \cos^3 a \\ \sin^3 b & \sin^2 b \cos b & \sin b \cos^2 b & \cos^3 b \\ \sin^3 c & \sin^2 c \cos c & \sin c \cos^2 c & \cos^3 c \\ \sin^3 d & \sin^2 d \cos d & \sin d \cos^2 d & \cos^3 d \end{vmatrix} =$$

$$= \sin(a - b) \sin(a - c) \sin(a - d) \sin(b - c) \sin(b - d) \sin(c - d)$$

$$1429. \begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t & 1 \\ \sin t & \cos t & \cos t \\ \cos t & -\sin t & \sin t \end{vmatrix} = 0$$

$$1430. \begin{vmatrix} \cos(a - b) & \cos(b - c) & \cos(c - a) \\ \cos(a + b) & \cos(b + c) & \cos(c + a) \\ \sin(a + b) & \sin(b + c) & \sin(c + a) \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a)$$

$$1431. \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix} = \sin 2a \sin(b - c) + \sin 2b \sin(c - a) + \sin 2c \sin(a - b)$$

1432. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 0,1 & 1 & 0 \\ 0,01 & -0,1 & 1 \\ 0,001 & 0,01 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1433. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+j & 1-2j & 3+2j & 4j \\ (2+j)^2 & (1-2j)^2 & (3+2j)^2 & (4j)^2 \\ (2+j)^3 & (1-2j)^3 & (3+2j)^3 & (4j)^3 \end{vmatrix}$$

$$1434. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

1435. Számítsuk ki az alábbi determináns négyzetét önmagával való szorzása útján.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}^2 = ?$$

1436. Végezzük el négyféleképpen az alábbi szorzást, az eredményt a determinánsok értékének kiszámításával is ellenőrizzük.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 \\ j & j & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & j & -j \\ j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1437. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}^2 = ?$$

1438. Számítsuk ki a következő determináns értékét négyzetének meghatározása útján:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1439. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

1440. Számítsuk ki a következő determináns reciproka determinánsát és ellenőrizzük a számítást. A reciprokának nevezzük és  $A^{-1}$ -gyel jelöljük az olyan determinánst, melyre  $A \cdot A^{-1} = I$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

1441.\* Bizonyítsuk be, hogy a

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \text{ determináns reciproka eggyel egyen-} \\ \text{lő, ha } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + 1 = 0$$

1442. Oldjuk meg a determináns kifejtése nélkül az alábbi egyenleteket:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ b & b & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$$

1443. Bizonyítsuk be:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1444.\* Diszkutáljuk a

$$\begin{vmatrix} b - x & a \\ a & c - x \end{vmatrix} = 0 \text{ egyenletet!}$$

1445. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1 - x & -1 & 0 \\ 3 & 2 - x & 1 \\ 0 & 5 & 1 - x \end{vmatrix} = 0 \text{ egyenlet összes megoldását!}$$

1446. Határozzuk meg A értékét úgy, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & A & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ legyen.}$$

$$1447. \quad D(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Írjuk fel a  $\frac{d}{dt} D(t)$  függvényt!

1448.\* Számítsuk ki a következő un. Vandermonde determináns értékét

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \dots$$

1449. Számítsuk ki azon  $D_n$  és  $D_{n+1}$  determinánsok értékét, amelyeket az előző determinánsból kapunk úgy, hogy benne az utolsó sor kitevőit  $n$ -re, ill.  $(n+1)$ -re változtatjuk.

1450.\* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{1! 2! \dots (n-1)!}$$

Ahol  $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemek által generált Vandermonde-determináns.

1451. Bizonyítsuk be:

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ha } n > 3.$$

1452. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n \geq 3$ , akkor

$$\begin{vmatrix} a + a_1 b_1 & a + a_1 b_2 & \dots & 1 + a_1 b_n \\ 1 + a_2 b_1 & 1 + a_2 b_2 & \dots & 1 + a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_n b_1 & 1 + a_n b_2 & \dots & 1 + a_n b_n \end{vmatrix} = 0$$

1453. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \lambda_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \lambda_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n + \sum_{i=1}^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \dots \lambda_n$$

1454.\* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = f(x) - x \frac{d f(x)}{dx} \quad \text{ahol} \\ f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)$$

1455.\* Igazoljuk hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(x_1) \dots f(x_n),$$

ahol  $f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$  és  $x_i$  az  $x^n = 1$  egyenlet gyöke.

1456. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

ahol  $A_{n-1}$  és  $A_{n-2}$  ugyanolyan típusu  $(n-1)$ -ed, ill.  $(n-2)$ -ed rendű determináns mint  $A_n$ .

1457.\* Bizonyítsuk be, hogy az  $n$ -ed rendű determináns kifejtésében egyik tagként szerepel a mellékátlóban álló elemek szorzata is, és pedig pozitív előjellel, ha  $n$ -nek négyvel való osztásakor a maradék 0 vagy 1, minden más esetben az előjel negatív.

1458. Bizonyítsuk be, hogy ha egy determinánsban a fő átló fölött (vagy alatt) álló minden elem 0, akkor a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával.

1459. Bizonyítsuk be, hogy ha a determináns valamennyi elemét ugyanazzal a  $c$  számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke  $c^n$ -nel szorzódik.

1460. Bizonyítsuk be, hogy ha a determináns első  $r$  oszlopában az  $r$ -ik soron túl csupa  $0$  elem áll, akkor a determináns értéke megegyezik a bal felső sarokban álló  $r$ -rendű al-determináns és az eredeti determinánsból ezen al-determináns sorainak és oszlopainak törlése után visszamaradó al-determináns (kiegészítő al-determináns) szorzatával.
- 1461.\* Bizonyítsuk be, hogy ha a másodrendű determináns második sorában álló elemek a fölöttük álló elem komplex konjugáltjai, akkor a determináns értéke vagy nulla vagy pedig tiszta képzetes szám.
- 1462.\* Bizonyítsuk be, hogy ha egy determináns elemeinek komplex konjugáltjából képeztünk determinánst (ugyanabban az elrendezésben) akkor az eredeti determináns konjugáltját kapjuk.
- 1463.\* Igazoljuk, hogy ha az  $|a_{ik}|$  determinánsban  $a_{ik}$  és  $a_{ki}$  komplex konjugáltak, akkor a determináns értéke valós.
- 1464.\* Bizonyítsuk be, hogy ha egy  $n$ -edrendű determinánsban  $a_{ji} = -a_{ij}$  és  $n$  páratlan, a determináns értéke nulla.
- 1465.\* Legyen az  $|a_{ik}|$   $n$ -edrendű determinánsban  $a_{ii} = 0$   $a_{ik} = j a_{ki}$  ahol  $a_{ki}$  valós (ha  $i > k$ )
1. Melyek  $n$  azon értékei, amelyek mellett bármely  $a_{ki}$  választás esetén valós értékű a determináns és
  2. melyek mellett lesz tiszta képzetes szám?
  3. Bizonyítsuk be, hogy páratlan  $n$  esetén a determináns értéke  $A(1 \pm j)$  ahol  $A$  valós.
- 1466.\* Bizonyítsuk be, hogy ha a harmadrendű determináns soraiban ugyan-avval a differenciával bíró elsőrendű számtani sorozatok állnak, akkor a determináns értéke  $0$ . Igaz-e a tétel általánosítása negyedrendű determinánssra és ugyanazzal a második differenciával bíró másodrendű számtani sorozatra?
- 1467.\* Bizonyítsuk be, hogy a  $z_1, z_2, z_3$  pontok akkor, és csak akkor fekszenek egy egyenesen a komplex számsíkban, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0$$



1468. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns értékét, melynek elemei az új koordináta tengelyeknek a régiekkel bezárt szögek irány cosinusai. A koordináta-rendszerek itt derékszögűek.

## 15. MÁTRIXOK

Jelölés:

1.  $\underline{\underline{A}}$  transzponálja  $\underline{\underline{A}}'$ , ahol  $a'_{ik} = a_{ki}$ .  $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$
2.  $\underline{\underline{A}}$  algebrai adjungáltja  $\text{adj}\underline{\underline{A}}$ , úgy kapjuk hogy  $\underline{\underline{A}}'$  elemei helyére a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánst írjuk.
3. Inverz mátrix  $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{\text{adj}\underline{\underline{A}}}{\det\underline{\underline{A}}}$  akkor és csak akkor létezik, ha  $\det\underline{\underline{A}} \neq 0$
4. Mátrix nyoma  $\text{Sp}\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$
5. Derivált mátrix  $\frac{d\underline{\underline{A}}}{dx} = \left( \frac{d a_{ik}}{dx} \right)$
6. Konjugált mátrix  $\overline{\underline{\underline{A}}} = (\overline{a_{ik}})$ , ahol  $\overline{a_{ik}}$   $a_{ik}$  komplex konjugáltját jelenti.
7. Adjungált mátrix  $\underline{\underline{A}}^* = \overline{(\underline{\underline{A}}')}$  (transzponált konjugáltja).
8. Def.  $\underline{\underline{A}}$  unitér mátrix, ha  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$
9. Def.  $\underline{\underline{A}}$  valós elemű mátrix ortogonális, ha  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$
10. Adjungált mátrix inverze  $\check{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{A}}^*)^{-1}$
11. Mátrix rangja: rang  $\underline{\underline{A}}$ , a lineárisan független oszlop ill. sorvektorok maximális száma.

12.  $j = \sqrt{-1}$

1501. Végezzük el a következő műveleteket:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = ?$$

1502.  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = ?$

1503.  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} = ?$

1504.  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}} - 4\underline{\underline{C}} = ?$

1505.  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 2j & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4j & 1+2j \\ 4 & 3-j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{pmatrix}, \quad j\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{B}} + 3\underline{\underline{C}} = ?$

1506. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1507.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1508.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1509.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1510.  $(5, 1, 0, -3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$1511. \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1512. \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$1513. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1514. \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$1515. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^2$$

$$1516. \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}^k$$

$$1517. \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k$$

$$1518. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

1519. Számítsuk ki  $\underline{\underline{AB}} - \underline{\underline{BA}}$  értékét:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1520. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1521. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Számítsuk ki az } \underline{\underline{A}}^2, \underline{\underline{A}}^3, \underline{\underline{A}}^{-1}, \underline{\underline{A}}^{-2} \text{ mátrixokat.}$$

1522. Számítsuk ki  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ , majd  $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}}$  értékét.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1523. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1524. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 2j & 3j \\ 2j & j & 4j \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1525. \quad \underline{\underline{A}} = (1 \quad 4j \quad 3), \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j \\ 3 \\ j \end{pmatrix}$$

$$1526. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

Határozzuk meg az  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}}$  mátrixot.

1527. Vizsgáljuk meg az

$$\underline{\underline{X}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$$

egyenletet, ahol  $\underline{\underline{A}}$  és  $\underline{\underline{X}}$  másodrendű négyzetes mátrix,  $\underline{\underline{0}}$  null mátrix.

1528. Határozzuk meg az  $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}$  egyenlet megoldását, ahol  $\underline{\underline{A}}$  másodrendű négyzetes mátrix.

1529. Határozzuk meg a következő mátrixok transzponáltját:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1530. 
$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1531. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
 Határozzuk meg  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})$  mátrixot.

1532. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j & 4 \\ 0 & -j \\ 2 & 1+j \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})$  mátrixot!

1533. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 Határozzuk meg az  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})$  mátrixot.

1534. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & -j & 0 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})$  mátrixot.

1535. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & j & -j \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 Határozzuk meg  $\underline{\underline{A}}'$  és  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$  mátrixokat!

1536. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}$$
 Határozzuk meg  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}'$  mátrixot!

1537. 
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
 Határozzuk meg  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}'$  mátrixot!

1538. Bizonyítsuk be, hogy minden kvadratikus mátrix előállítható, mint egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összege.

1539. Számítsuk ki a következő inverz mátrixokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

1540.  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

1541.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

1542.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

1543.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$

1544. Legyen  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Oldjuk meg a  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$  mátrix-egyenletet.  
 $\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$

1545. Legyen az  $(a_{ik})$  mátrix determinánsa 1. Számítsuk ki az  $(A_{ik})$  mátrix determinánsának értékét, ahol  $A_{ik}$  az  $a_{ik}$  elemhez tartozó előjeles aldetermináns.

1546. Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket; (feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők)

1.  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}'$       2.  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}' \underline{\underline{A}}'$       3.  $(\underline{\underline{A}}^{-1})' = (\underline{\underline{A}}')^{-1}$   
 4.  $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}'$       5.  $(\underline{\underline{A}}')' = \underline{\underline{A}}$

1547.\* Bizonyítsuk be, hogy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus.

1548. Bizonyítsuk be, hogy páros rendű antiszimmetrikus mátrix inverze is antiszimmetrikus.

1549. Null - osztó-e vagy sem a  $3 \times 3$ -as mátrixok körében az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix?}$$

( $\underline{\underline{A}}$  null osztó ha lehet találni hozzá egy olyan  $\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{0}}$  mátrixot, hogy vagy  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$  vagy  $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ .)

1550. Null-osztó-e vagy sem a  $4 \times 4$ -es mátrixok körében

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -8 & 12 & -7 & 4 \\ 6 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} ?$$

1551. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{\underline{A}}$  kvadratikus mátrix és  $\det \underline{\underline{A}} = 0$ , akkor  $\underline{\underline{A}} \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} = \operatorname{adj} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ . Vagyis  $\operatorname{adj} \underline{\underline{A}}$  két oldali nullosztó, ha  $\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$ .

1552. Vizsgáljuk meg az  $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$  alakú mátrixokat!

- Két ilyen alakú mátrix szorzata is ilyen alakú-e?
- Kommutatív-e az ilyen alakú mátrixok szorzata?
- Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alakú mátrixot jobbról szorozva a bal oldali tényezőt kapjuk vissza?
- Van-e köztük olyan, amellyel balról szorozva a jobb oldali tényezőt kapjuk vissza?
- Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alakú mátrixot jobbról, ill. balról szorozva nulla mátrixot kapunk?

1553. Vizsgáljuk meg az  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  alakú mátrixokat!

- Ilyenek szorzata is ilyen alakú-e?
- Kommutatív-e az ilyen alakú mátrixok szorzata?
- Irjuk fel az  $M(a, b)$  jelöléssel az  $[M(1, 0)]^2, [M(0, 1)]^2, M(a, b) \cdot M(c, d), M(a, b) \cdot M(a, -b)$  szorzatokat.
- Irjuk fel az előbbi szorzatokat az  $\underline{\underline{E}}_1 = M(1, 0)$   $\underline{\underline{E}}_2 = M(0, 1)$  mátrixokkal kifejezve.

1554. Keressük meg az összeadás, kivonás és szorzás műveletének szabályait a  $q = a e + b i + c j + d k$  alakú un. hiperkomplex számok körében, ahol

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

és  $a, b, c, d$  tetszőleges komplex számok.

1555. \*  $\underline{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Mutassuk meg, hogy az  $a\underline{E} + b\underline{D}_1$  alakú mátrixokra, ahol  $a$  és  $b$  skalár számok, ugyanazok a műveleti szabályok érvényesek, mint az  $a + bj$  alakú komplex számokra.

1556.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \underline{P}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{M}_{32}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X}_{33}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Mivel egyenlők a  $\underline{P}_{23}\underline{A}$ ,  $\underline{A}\underline{P}_{23}$ ,  $\underline{M}_{32}(w)\underline{A}$ ,  $\underline{A}\underline{M}_{32}(w)$ ,  $\underline{X}_{33}(x)\underline{A}$ ,  $\underline{A}\underline{X}_{33}(x)$  mátrixok?

1557. Ha  $\underline{P}_{ik}$  az a mátrix, amelyik az  $\underline{E}$  mátrixból úgy keletkezik, hogy  $\underline{E}$ -ben az  $i$ -edik sort a  $k$ -adikkal felcseréljük, akkor mi jellemzi a  $\underline{P}_{ik}\underline{B}$  és  $\underline{B}\underline{P}_{ik}$  mátrixokat? ( $\underline{E}$  és  $\underline{B}$   $n \times n$ -es mátrixok.)
1558. Ha  $i \neq k$ , jelöljük  $\underline{M}_{ik}(t)$ -vel azt az  $n \times n$ -es mátrixot, amelyik az egység mátrixtól csak annyiban különbözik, hogy  $i$ -edik sorának  $k$ -adik eleme nem 0, hanem  $t$ . Ha  $\underline{B}$  tetszés szerinti  $n \times n$ -es mátrix, hogyan lehet jellemezni az  $\underline{M}_{ik}(t)$ ,  $\underline{B}$  és a  $\underline{B}\underline{M}_{ik}(t)$  szorzatokat?
1559. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrixhoz mindig található olyan mátrixot, amellyel az adott mátrixot balról megszorozva a szorzat mátrix fő átlója alatt csupa nulla áll.



1560. Hogyan jellemezhető az a mátrix, amely egy adott mátrixból egy diagonális mátrixszal jobbról ill. balról szorozva keletkezik.
1561. Bizonyítsuk be, hogy bármely négyzetes mátrixhoz találhatunk két másikat úgy, hogy az elsővel balról szorozva és a kapott szorzatot a másodikkal jobbról szorozva a fő diagonális alatt is és fölött is csupa nulla áll. (Nem biztos, hogy a főátlóban álló minden elem zérustól különböző lesz.)
1562. Keresendő véges számú mátrix, amelyek lineár-kombinációival bármely  $n \times n$ -es mátrix előállítható.
1563. Melyek azok a mátrixok, amelyek valamennyi  $n \times n$ -es mátrixszal felcserélhetők?

1564. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1565.  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 18 \end{pmatrix}$

1566.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

1567.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 22 & 6 \end{pmatrix}$

1568.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1569.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1570.  $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$1571. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1572. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1573. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1574. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 18 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1575. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1576.\* Bizonyítsuk be, hogy ha egy mátrix rangja  $r$ , akkor előállítható  $r$  db. 1 rangú mátrix összegeként.

1577.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$   $n$ -edrendű kvadratikus mátrixok, és  $\det \underline{A} \neq 0$ ,  $\det \underline{B} \neq 0$ , akkor  $\text{rang } \underline{A} \underline{B} = \text{rang } \underline{B} \underline{A} = \text{rang } \underline{A}$

1578.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$   $n$ -ed rendű kvadratikus mátrixok és  $\det \underline{A} \neq 0$ , akkor  $\text{rang } (\underline{A}\underline{B}) \leq \text{rang } \underline{A}$ , és  $\text{rang } (\underline{B}\underline{A}) \leq \text{rang } \underline{A}$

$$1579. \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 + 3j & 3 + 4j \\ 2 + 2j & 4 + j \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 + j & 4 + 2j \\ 1 + 2j & 3 + 4j \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az  $(\underline{A} + \underline{B})$ ,  $\overline{\underline{A} \underline{B}}$ , és  $(\overline{\underline{A}})^{-1}$  mátrixokat.

1580. Bizonyítsuk be, a következő összefüggéseket, feltéve hogy a kijelölt műveleteket elvégezhetők:

$$1. \quad (\overline{\underline{A} + \underline{B}}) = \overline{\underline{A}} + \overline{\underline{B}} \quad 2. \quad \overline{\underline{A}\underline{B}} = \overline{\underline{A}} \overline{\underline{B}} \quad 3. \quad (\overline{\underline{A}^{-1}}) = (\overline{\underline{A}})^{-1}$$

$$4. \quad \overline{\det \underline{A}} = \det \overline{\underline{A}} \quad 5. \quad \overline{\overline{\underline{A}}} = \underline{A}$$

$$1581. \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 + 3j & 3 + 4j \\ 2 + 2j & 4 + j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 + j & 4 + 2j \\ 1 + 2j & 3 + 4j \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg az  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^*$ ,  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^*$ , és  $\check{\underline{\underline{A}}} \check{\underline{\underline{B}}}$  mátrixokat.

1582. Oldjuk meg a következő mátrix-egyenleteket;

$$(\underline{\underline{A}}^{-1})^* \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{Y}} (\underline{\underline{A}}^{-1})^* = \underline{\underline{B}}, \quad \text{ahol}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & j \end{pmatrix}$$

1583. Oldjuk meg az  $(\underline{\underline{A}}^*)^{-1} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$  és  $\underline{\underline{Y}} (\underline{\underline{A}}^*)^{-1} = \underline{\underline{B}}$  mátrix-egyenleteket, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1584. Számítsuk ki  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^*$  mátrixot ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{pmatrix}$$

1585. Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket, feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők.

1.  $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{A}}^* + \underline{\underline{B}}^*$ ,
2.  $(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}})^* = \underline{\underline{B}}^* \cdot \underline{\underline{A}}^*$ ,
3.  $(\underline{\underline{A}}^{-1})^* = (\underline{\underline{A}}^*)^{-1}$ ,
4.  $\det \underline{\underline{A}}^* = (\det \underline{\underline{A}})^*$ ,
5.  $(\underline{\underline{A}}^*)^* = \underline{\underline{A}}$ .

1586. Igazoljuk, hogy ha  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$  és  $\check{\underline{\underline{A}}}$ ,  $\check{\underline{\underline{B}}}$ ,  $\check{\underline{\underline{C}}}$  létezik, akkor  $\check{\underline{\underline{A}}} \check{\underline{\underline{B}}} = \check{\underline{\underline{C}}}$ .

1587. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{\underline{U}}$  unitér mátrix, akkor  $\underline{\underline{U}}^{-1}$ ,  $\underline{\underline{U}}'$ , és  $\underline{\underline{U}}^*$  és  $\check{\underline{\underline{U}}}$  is unitér.

1588.\* Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{U}_1$  és  $\underline{U}_2$  unitér mátrixok, akkor  $\underline{U}_1 \underline{U}_2$  és  $\underline{U}_2 \underline{U}_1$  is unitér.

1589.\* Bizonyítsuk be, hogy unitér mátrix determinánása +1 vagy -1.

1590. Legyen  $\underline{A}$  tetszés szerinti,  $\underline{U}$  pedig unitér mátrix és  $\underline{B} = \underline{U}^{-1} \underline{A} \underline{U}$ . Mivel egyenlő a  $\underline{B}^*$  mátrix?

1591. 
$$\underline{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}}j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}j & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \underline{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}j \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}j & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Mivel egyenlők az  $\underline{U}_1^{-1}$ ,  $\underline{U}_2^{-1}$ ,  $(\underline{U}_1 \underline{U}_2)^{-1}$  és  $(\underline{U}_2 \underline{U}_1)^{-1}$  mátrixok?

1592. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{D}_1$  és  $\underline{D}_2$  ortogonális mátrixok, akkor  $(\underline{D}_1 \underline{D}_2)$  is ortogonális.

1593.\* Bizonyítsuk be, hogy ortogonális mátrix determinánása +1 vagy -1.

1594. 
$$\underline{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kiszámítandók a  $(\underline{D}_1 \underline{D}_2)^{-1}$ ,  $\det \underline{D}_1$  és  $\det \underline{D}_2$ !

1595.\* Legyen  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$  két n-edrendű kvadratikus mátrix. Bizonyítsuk be, hogy  $\text{Sp}(\underline{A} + \underline{B}) = \text{Sp} \underline{A} + \text{Sp} \underline{B}$

1596. Legyen  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$  n-edrendű kvadratikus mátrix, továbbá  $\det \underline{A} \neq 0$ . Határozzuk meg az  $\underline{A} \underline{B} \underline{A}^{-1}$  mátrix nyomát.

1597.\* Legyen  $\underline{A}$  és  $\underline{B}$  két olyan mátrix, hogy  $\underline{A} \underline{B}$  és  $\underline{B} \underline{A}$  létezzenek, és kvadratikus mátrixok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $\text{Sp}(\underline{A} \underline{B}) = \text{Sp}(\underline{B} \underline{A})$ .

1598. 
$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg  $\underline{A} \underline{B}$  és  $\underline{B} \underline{A}$  nyomát.

## 16. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

### INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZEREK

Megoldhatók-e a következő egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg.

1601.

$$(1-j)x_1 + (2+j)x_2 = 1 - j,$$

$$(1+j)x_1 + (1-j)x_2 = 1 + j.$$

1603.

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7,$$

$$3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1,$$

$$x_1 + 14x_2 + x_3 = 2.$$

1605.

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 = 1,$$

$$(1-j)x_1 + 2x_2 + (1-j)x_3 = j,$$

$$-2jx_1 + (1+j)x_2 + 3x_3 = -j.$$

1607.

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 = -2 + 2j,$$

$$3x_1 + (1+3j)x_2 + (-2+2j)x_3 = -2.$$

1609.

$$jx_1 + (1+j)x_2 + (1-j)x_3 = 1,$$

$$-x_1 + 2jx_2 - 2jx_3 = j,$$

$$-jx_1 + (-2+2j)x_2 + (-2-2j)x_3 = 1+j.$$

1602.

$$jx_1 + x_2 = 1,$$

$$-x_1 + (1+j)x_2 = 2 + j.$$

1604.

$$2x - z = 1,$$

$$2x + 4y - z = 1,$$

$$-x + 8y + 3z = 2.$$

1606.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$

$$3x_1 + (4+j)x_2 + 7x_3 = -2 + 2j.$$

1608.

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 = -2 + 2j,$$

$$x_1 + (1-j)x_2 - 2jx_3 = -2 - 2j.$$

1610.

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$

$$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$$

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 = -2 + 2j.$$

1611.

$$\begin{aligned}x_1 + (1+j)x_2 + 2j x_3 &= 1 \\(1-j)x_1 + 2x_2 + (1-j)x_3 &= j, \\(3-2j)x_1 + (5+j)x_2 + 2x_3 &= 1+2j.\end{aligned}$$

1613.

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1, \\2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7, \\3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 &= -8, \\x_2 - x_3 - x_4 &= -1.\end{aligned}$$

1615.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3, \\x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1, \\x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0, \\3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5,\end{aligned}$$

1617.

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3, \\x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2, \\2x_1 + 5x_2 - x_4 &= -1, \\2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1.\end{aligned}$$

1619.

$$\begin{aligned}5x + 4z + 2t &= 3, \\x - y + 2z + t &= 1, \\4x + y + 2z &= 1, \\x + y + z + t &= 0.\end{aligned}$$

1612.

$$\begin{aligned}x_1 + (1+j)x_2 + 2j x_3 &= 1, \\(1-j)x_1 + 2x_2 + (1-j)x_3 &= j, \\-jx_1 + (1-j)x_2 + (1-3j)x_3 &= 1+j.\end{aligned}$$

1614.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\x_1 + x_3 + x_4 &= 2, \\x_1 + x_2 + x_4 &= 3, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 4.\end{aligned}$$

1616.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2, \\2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2, \\3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0,\end{aligned}$$

1618.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9, \\2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0.\end{aligned}$$

1620.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 13, \\2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10, \\2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11, \\2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6, \\2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3.\end{aligned}$$

1621.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\x_2 + x_3 + x_4 &= 9, \\x_3 + x_4 + x_5 &= 3, \\x_4 + x_5 + x_6 &= -3, \\x_5 + x_6 + x_7 &= -9, \\x_6 + x_7 + x_8 &= -6, \\x_7 + x_8 + x_1 &= -2, \\x_8 + x_1 + x_2 &= 2.\end{aligned}$$

1623.

$$\begin{aligned}7x_1 + 3x_2 &= 2, \\x_1 - 2x_2 &= -3, \\4x_1 + 9x_2 &= 11.\end{aligned}$$

1625.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\jx_1 + x_3 + x_4 &= j, \\jx_1 + jx_2 + x_4 &= -1, \\jx_1 + jx_2 + jx_3 &= -j, \\jx_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1.\end{aligned}$$

1627.

$$\begin{aligned}x_1 + (1+j)x_2 + 2jx_3 &= 1, \\2jx_1 + (-2+2j)x_2 - 4x_3 &= -j.\end{aligned}$$

1629.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 &= 3, \\4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 4, \\-7x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5, \\x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= -2.\end{aligned}$$

1622.

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\jx_1 + x_3 + x_4 &= j, \\jx_1 + jx_2 + x_4 &= -1, \\jx_1 + jx_2 + jx_3 &= -j,\end{aligned}$$

1624.

$$\begin{aligned}x_1 - 8x_2 &= 3, \\2x_1 + x_2 &= 1, \\4x_1 + 7x_2 &= -4.\end{aligned}$$

1626.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= j, \\x_1 + (1+j)x_2 + x_3 &= 1, \\-x_1 + (-1+j)x_2 - x_3 &= 1 - 2j, \\-jx_1 + (1-j)x_2 - jx_3 &= -j.\end{aligned}$$

1628.

$$\begin{aligned}(1+j)x_1 + (2-j)x_2 + jx_3 &= 2 + j, \\2x_1 + jx_2 - jx_3 &= -1 - j.\end{aligned}$$

1630.

$$\begin{aligned}5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1, \\x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0.\end{aligned}$$





1637.

$$\binom{0}{0}x_0 + \binom{1}{0}x_1 + \binom{2}{0}x_2 + \dots + \binom{n}{0}x_n = \binom{n+1}{n},$$

$$\binom{1}{1}x_0 + \binom{2}{1}x_1 + \binom{3}{1}x_2 + \dots + \binom{n+1}{1}x_n = \binom{n+2}{2},$$

$$\binom{2}{2}x_0 + \binom{3}{2}x_1 + \binom{4}{2}x_2 + \dots + \binom{n+2}{2}x_n = \binom{n+3}{3},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n}x_0 + \binom{n+1}{n}x_1 + \binom{n+2}{n}x_2 + \dots + \binom{2n}{n}x_n = \binom{2n+1}{n+1}$$

1638.\*

$$1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0,$$

$$1 + 2x_1 + 4x_2 + \dots + 2^n x_n = 0,$$

$$\dots$$

$$1 + n x_1 + n^2 x_2 + \dots + n^n x_n = 0.$$

1639.

$$\frac{x_1}{a_1 - b_1} + \dots + \frac{x_n}{a_1 - b_n} = 1,$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_1}{a_n - b_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n - b_n} = 1,$$

ahol  $a_i \neq b_k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ )

1640. Diszkutáljuk a következő egyenletrendszert:

$$x + y + z = a,$$

$$x + (1+a)y + z = 2a, \quad \text{ahol } \underline{a} \text{ konstans}$$

$$x + y + (1+a)z = 0.$$

1641. Diszkutáljuk az

$$ax + y + z = 1,$$

$$x + ay + z = a,$$

$$x + y + az = a^2, \quad \text{egyenletrendszer megoldását.}$$

1642. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}uv - 3vw + w &= -13, \\ -3uv + 4vw - 2w &= 12, \\ 2uv + vw &= 10.\end{aligned}$$

1643. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 0, \\ 2x - y + z &= 0, \\ x + y + z &= t, \\ 2x - 2y + z &= u, \text{ egyenletrendszerből } u\text{-t, mint } t \text{ függvényét.}\end{aligned}$$

1644.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= a_1 a_2, \\ x_1 + x_3 &= a_1 a_3, \\ x_1 + x_4 &= a_1 a_4, \\ x_2 + x_3 &= a_2 a_3, \\ x_2 + x_4 &= a_2 a_4, \\ x_3 + x_4 &= a_3 a_4.\end{aligned}$$

Milyen feltételeknek kell az  $a_i$ -k-re teljesülni, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen? Oldjuk meg az egyenletrendszert.

1645. Meghatározandó  $u$  és  $v$  úgy, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen. Oldjuk is meg az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 44, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 &= 134, \\ -x_1 - 6x_2 - 15x_3 &= u, \\ x_1 - 2x_2 - 15x_3 &= v.\end{aligned}$$

Határozzuk meg  $a$  és  $c$  értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszereknek

1. csak egy megoldása legyen
2. végtelen sok megoldása legyen
3. ne legyen megoldása